

Fubini et changement de variables

Exercice 1 : Sections d'une partie mesurable

Soit $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On fixe $x \in X$. Pour $E \subset X \times Y$, on note $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : E_x \in \mathcal{B}\}$ est une tribu sur $X \times Y$ qui contient les rectangles mesurables. En déduire que $E_x \in \mathcal{B}$ pour tout $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.
2. Soit $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable pour $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Montrer que $f_x : y \mapsto f(x, y)$ est $\mathcal{B}$ -mesurable.
3. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne. Montrer que son graphe $\Gamma_g = \{(t, g(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 2 : Diagonale et graphes négligeables

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $\lambda_2 = \lambda \otimes \lambda$.

1. Montrer que la diagonale $\Delta = \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ vérifie $\lambda_2(\Delta) = 0$.
2. Plus généralement, soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne. Montrer que $\lambda_2(\Gamma_g) = 0$, où Γ_g est le graphe de g (voir l'exercice 1).
3. En déduire que le cercle unité $\{x^2 + y^2 = 1\}$ est négligeable dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 : Une intégrale calculée par Tonelli

Soit a et b deux réels tels que $-1 < a < b$. On pose $I(a, b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$.

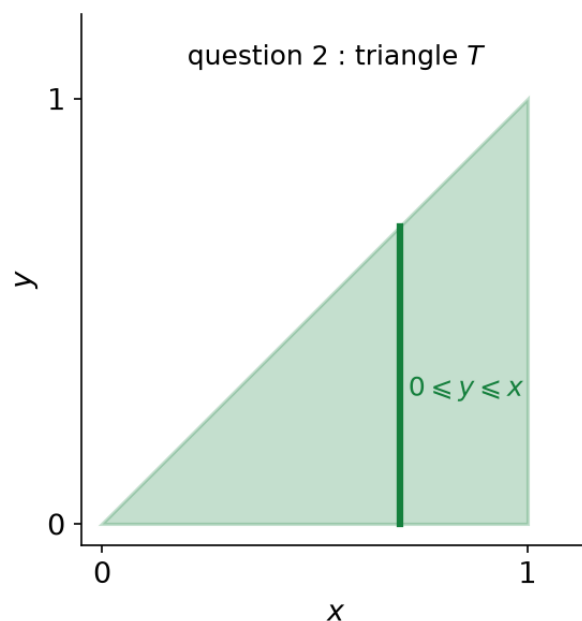
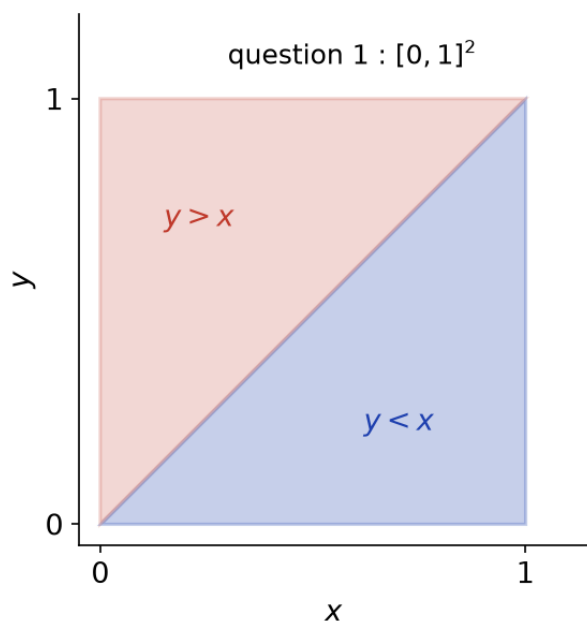
1. Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^t dt$. En déduire que l'intégrande est positif.

2. Justifier soigneusement l'interversion des intégrales et en déduire $I(a, b) = \ln \frac{1+b}{1+a}$.

3. Calculer $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} - 1}{\ln x} dx$ et $\int_0^1 \frac{x^3 - x}{\ln x} dx$.

Exercice 4 : Calculs d'intégrales doubles par Fubini

On note $T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{array} \right\}$. La figure ci-dessous représente les domaines utilisés.



1. Calculer $\iint_{[0,1]^2} |x - y| \, dx \, dy$.
2. Calculer $\iint_T x y \, dx \, dy$ puis $\iint_T e^{x^2} \, dx \, dy$.
3. En déduire la valeur de $\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2} \, dx \right) dy$, alors que e^{x^2} n'a pas de primitive élémentaire.

Exercice 5 : Sommes doubles et mesure de comptage

On note $\zeta(s) = \sum_{k \geq 1} k^{-s}$ pour $s > 1$.

1. Montrer que $\sum_{n \geq 2} (\zeta(n) - 1) = 1$.
2. Montrer que $\sum_{n \geq 1} (\zeta(2n) - 1) = \frac{3}{4}$.

3. On pose, pour $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{m,n} = 1$ si $n = m$, $a_{m,n} = -1$ si $n = m + 1$, et $a_{m,n} = 0$ sinon. Calculer $\sum_m \sum_n a_{m,n}$ et $\sum_n \sum_m a_{m,n}$. Quelle hypothèse du théorème de Fubini est en défaut ?

Exercice 6 : Un contre-exemple au théorème de Fubini

On pose, pour $(x, y) \in]0, 1]^2$, $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$.

1. Pour $x > 0$ fixé, calculer la dérivée de $y \rightarrow \frac{y}{x^2 + y^2}$.
2. Calculer $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ et $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$.
3. Montrer, à l'aide des coordonnées polaires, que f n'est pas intégrable sur $]0, 1]^2$. Commenter.

Exercice 7 : Hypothèse de σ -finitude

On munit $[0, 1]$ de sa tribu borélienne. Soit λ la mesure de Lebesgue et ν la mesure de comptage sur $[0, 1]$. On note Δ la diagonale de $[0, 1]^2$.

1. Montrer que ν n'est pas σ -finie.

2. Calculer $\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} 1_{\Delta}(x, y) d\nu(y) \right) d\lambda(x)$ et $\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} 1_{\Delta}(x, y) d\lambda(x) \right) d\nu(y)$.

3. Expliquer pourquoi ce résultat ne contredit pas le théorème de Fubini-Tonelli.

Exercice 8 : Image de la mesure de Lebesgue par une application linéaire

On utilise la formule $\lambda_n(T(E)) = |\det T| \lambda_n(E)$.

1. Calculer l'aire du parallélogramme de sommets $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$ et $(1, 3)$.
2. Calculer l'aire de $\mathcal{E} = \left\{ (x, y) : \frac{(x+y)^2}{4} + \frac{(x-y)^2}{9} \leq 1 \right\}$.
3. Montrer par Fubini que le tétraèdre $\left\{ \begin{array}{l} x, y, z \geq 0, \\ x + y + z \leq 1 \end{array} \right\}$ a pour volume $\frac{1}{6}$. En déduire le volume du tétraèdre de sommets $0, u, v, w$ en fonction de $\det(u, v, w)$.

Exercice 9 : Transvection et invariance par translation

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $T_a(x, y) = (x + ay, y)$. Pour $E \subset \mathbb{R}^2$ et $y \in \mathbb{R}$, on note $E^y = \{ x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E \}$.

1. Soit E un borélien de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $(T_a(E))^y = E^y + ay$.
2. En déduire, par Tonelli et l'invariance de λ par translation, que $\lambda_2(T_a(E)) = \lambda_2(E)$.
3. Pour $\alpha \neq 0$, on pose $D_\alpha(x, y) = (\alpha x, y)$. Montrer que $\lambda_2(D_\alpha(E)) = |\alpha| \lambda_2(E)$.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ avec $ad \neq 0$. Écrire A comme composée de transvections et de dilatations, puis en déduire $\lambda_2(A(E)) = |ad| \lambda_2(E)$.

Exercice 10 : Coordonnées polaires

1. Calculer $\iint_D x y \, dx \, dy$, où $D = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{array} \right\}$.
2. Calculer $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx \, dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$.
3. Pour $\alpha > 0$, déterminer à quelle condition $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx \, dy}{(1 + x^2 + y^2)^\alpha}$ est finie, et calculer alors sa valeur.

Exercice 11 : Intégrale de Gauss par les coordonnées polaires

On pose $G = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$.

1. Justifier que G est finie.
2. Montrer que $G^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2 + y^2)} \, dx \, dy$, puis calculer cette intégrale en coordonnées polaires. En déduire G .
3. Pour $a > 0$, en déduire $\int_{\mathbb{R}} e^{-a x^2} \, dx$, puis $\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2} \, dx$ et
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} \, dt.$$
4. Calculer $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} \, dx$, où $|\cdot|$ est la norme euclidienne.

Exercice 12 : Intégrale de Gauss par Tonelli

On pose $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $F = \iint_{]0, +\infty[^2} y e^{-(1+x^2)y^2} dx dy$.

1. Calculer F en intégrant d'abord par rapport à y .
2. Calculer F en intégrant d'abord par rapport à x , à l'aide du changement de variable $u = xy$ à y fixé.
3. Justifier l'égalité des deux calculs et en déduire la valeur de I .

Exercice 13 : Forme quadratique et intégrale gaussienne

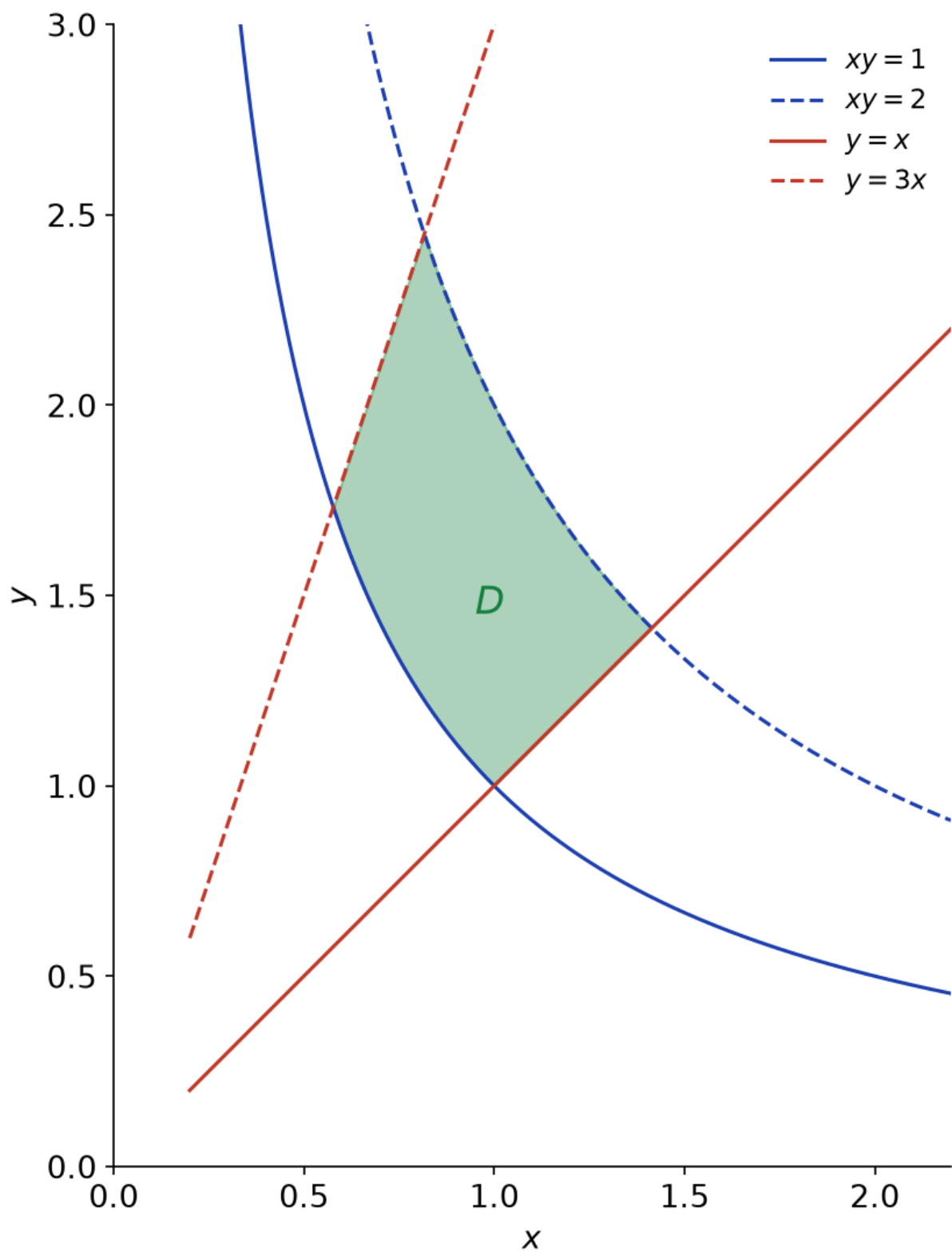
1. Écrire $x^2 + xy + y^2$ comme somme de deux carrés de formes linéaires indépendantes.

2. En déduire $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2 + xy + y^2)} dx dy$ par un changement de variables linéaire.

3. Soit S une matrice symétrique réelle 2×2 définie positive. Montrer que $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\langle S X, X \rangle} dX = \frac{\pi}{\sqrt{\det S}}$. Vérifier la cohérence avec la question précédente.

Exercice 14 : Changement de variables hyperbolique

On considère $D = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} x > 0, \\ y > 0, \\ 1 \leq xy \leq 2, \\ x \leq y \leq 3x \end{array} \right\}$, représenté ci-dessous.



1. Montrer que $\varphi(x, y) = \left(x, y, \frac{y}{x}\right)$ est un C^1 -difféomorphisme de $]0, +\infty[^2$ sur lui-même, et donner φ^{-1} .
2. Déterminer $\varphi(D)$ et calculer le jacobien de φ , puis celui de φ^{-1} .

3. Calculer l'aire de D .

4. Calculer $\iint_D xy \, dx \, dy$ et $\iint_D y^2 \, dx \, dy$.

Exercice 15 : Coordonnées sphériques et cornet

On pose $\Phi(r, \theta, \phi) = (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi)$ et on note B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer le jacobien de Φ .

2. Calculer $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$, puis $\iiint_B z^2 \, dx \, dy \, dz$ à l'aide d'un argument de symétrie.

3. Calculer le volume du « cornet » $C = \left\{ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$.

4. Calculer $\iiint_C z \, dx \, dy \, dz$, puis la cote $\bar{z}$ du centre de gravité de C , supposé homogène.

Exercice 16 : Volume de la boule unité par récurrence

On note B_n la boule unité euclidienne fermée de $\mathbb{R}^n$ et $V_n = \lambda_n(B_n)$.

1. Montrer que la boule fermée de centre 0 et de rayon $r > 0$ a pour volume $r^n V_n$.

2. Pour $n \geq 3$, montrer que $V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}$, en écrivant les points de $\mathbb{R}^n$ sous la forme (x, y, z) avec $z \in \mathbb{R}^{n-2}$.

3. Calculer V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 , puis montrer que $V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}$ pour $k \geq 1$.
4. Montrer que $V_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 17 : Intégrales doubles et séries

On admet que $\zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que $\iint_{[0,1]^2} \frac{dx dy}{1 - xy} = \zeta(2)$, en justifiant chaque interversion.
2. Montrer que $\iint_{[0,1]^2} \frac{dx dy}{1 + xy} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$, puis que cette somme vaut $\frac{\pi^2}{12}$.
3. En intégrant d'abord en y dans la question 1, montrer que $\int_0^1 \frac{-\ln(1-x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 18 : Convolution de deux indicatrices

On note $f = 1_{[0,1]}$ et $g = 1_{[-1,1]}$.

1. Calculer $f * f$ sur $\mathbb{R}$ et vérifier que $\int f * f = \left(\int f \right)^2$.
2. Calculer $f * g$ sur $\mathbb{R}$ et vérifier que $\int f * g = \int f \int g$.
3. Montrer que $f * f$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais non dérivable en 0 , 1 et 2 .

Exercice 19 : Propriétés du produit de convolution

Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, boréliennes.

1. Montrer que $\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x-y) g(y)| dx dy = \|f\|_1 \|g\|_1$. En déduire que $f * g$ est définie presque partout et que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
2. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} f * g = \int_{\mathbb{R}} f \int_{\mathbb{R}} g$.
3. Montrer que $f * g = g * f$ presque partout.
4. On suppose seulement $f \in L^1$ et g bornée et uniformément continue. Montrer que $f * g$ est définie partout, bornée par $\|f\|_1 \|g\|_\infty$ et uniformément continue.
5. On suppose que f est nulle hors de $[a, b]$ et g nulle hors de $[c, d]$. Montrer que $f * g$ est nulle hors de $[a+c, b+d]$.

Exercice 20 : Convolution de gaussiennes

Pour $a > 0$, on pose $g_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a}}$.

1. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} g_a = 1$.
2. Soit $a, b > 0$. Montrer que $g_a * g_b = g_{a+b}$.
3. En déduire, pour $n \geq 1$, la convolée de n copies de g_a .

Exercice 21 : Régularisation par convolution

On admet que $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ pour $|x| < 1$ et $\varphi(x) = 0$ sinon définit une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, paire et positive. On pose $c = \int_{\mathbb{R}} \varphi$, $\rho = \frac{\varphi}{c}$ et, pour $\varepsilon > 0$, $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

1. Montrer que ρ_ε est nulle hors de $[-\varepsilon, \varepsilon]$ et que $\int \rho_\varepsilon = 1$.
2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $f * \rho_\varepsilon$ est de classe C^1 et que $(f * \rho_\varepsilon)' = f * \rho'_\varepsilon$.
3. Soit f continue et bornée. Montrer que $(f * \rho_\varepsilon)(x) \rightarrow f(x)$ pour tout x quand $\varepsilon \rightarrow 0$, et que la convergence est uniforme si f est uniformément continue.
4. On prend $f = 1_{[0,1]}$ et $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Calculer $(f * \rho_\varepsilon)(x)$ pour $x \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, pour $x \notin [-\varepsilon, 1 + \varepsilon]$, puis en $x = 0$. Déterminer la limite simple de $f * \rho_\varepsilon$.

Exercice 22 : Intégrale de Dirichlet par Fubini

On veut montrer que $\int_0^A \frac{\sin x}{x} dx$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand $A \rightarrow +\infty$.

1. Pour $x > 0$, calculer $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$.
2. Soit $A > 0$. Montrer que $(x, t) \rightarrow \sin x e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, A] \times]0, +\infty[$.
3. Montrer que, pour $t > 0$, $\int_0^A \sin x e^{-xt} dx = \frac{1 - e^{-At}(\cos A + t \sin A)}{1 + t^2}$, puis que

$$\int_0^A \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} e^{-At} \frac{\cos A + t \sin A}{1+t^2} dt.$$

4. Montrer que la dernière intégrale est majorée en valeur absolue par $\frac{3}{2A}$ et conclure.
5. Montrer que $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 23 : Volume de la boule unité par la gaussienne

On note V_n le volume de la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$. On admet que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \pi^{n/2}$ et que la sphère unité est négligeable.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $e^{-|x|^2} = \int_0^{+\infty} 2r e^{-r^2} 1_{|x| < r} dr$.

2. En déduire, par Tonelli, que $\pi^{n/2} = V_n \int_0^{+\infty} 2r^{n+1} e^{-r^2} dr$.

3. Calculer cette dernière intégrale à l'aide de Γ et conclure que $V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$. Vérifier pour $n = 1, 2, 3$.

4. Par une méthode analogue, montrer que $\int_{B_n} |x|^2 dx = \frac{n}{n+2} V_n$.

Exercice 24 : Problème : fonctions Gamma et Bêta, aire des boules de ℓ^p

Pour $s > 0$, on pose $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$ et, pour $a, b > 0$,

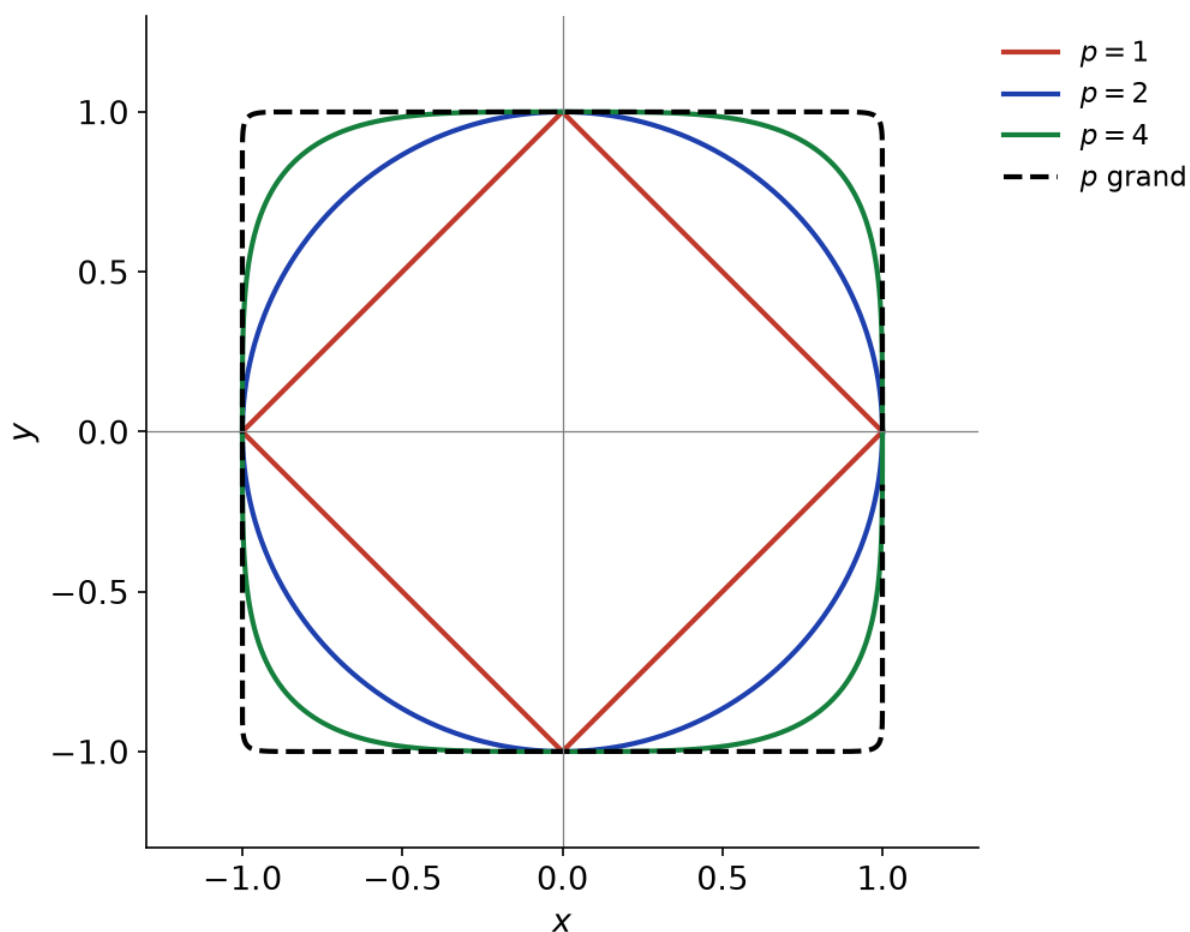
$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$. On admet que $\Gamma(s+1) = s \Gamma(s)$ et que Γ est continue.

Partie A : la formule d'Euler.

1. Montrer que $B(a, b)$ est finie pour $a, b > 0$.
2. Montrer que $\psi(s, t) = (s t, s(1-t))$ est un C^1 -difféomorphisme de $]0, +\infty[\times]0, 1[$ sur $]0, +\infty[^2$, et calculer son jacobien.
3. En écrivant $\Gamma(a)\Gamma(b)$ comme une intégrale double, montrer que $\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b) B(a, b)$.
4. Calculer $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ à l'aide de $t = \sin^2 u$. Retrouver $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
5. Calculer $\int_0^1 \sqrt{t(1-t)} dt$ et interpréter géométriquement le résultat.

Partie B : aire de la boule unité de ℓ^p . Pour $p \geq 1$, on note A_p l'aire de

$K_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^p + |y|^p \leq 1\}$. La figure ci-dessous représente K_p pour plusieurs valeurs de p .



1. Montrer que $A_p = 4 \int_0^1 (1 - x^p)^{1/p} dx$.

2. À l'aide du changement de variable $x = t^{1/p}$, montrer que $A_p = \frac{4 \Gamma(1 + \frac{1}{p})^2}{\Gamma(1 + \frac{2}{p})}$.

3. Vérifier la formule pour $p = 1$ et $p = 2$, puis déterminer la limite de A_p quand $p \rightarrow +\infty$. Interpréter.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [Fubini et changement de variables, cours de maths en L3](#)
- À maîtriser avant : [Intégrale de Lebesgue et théorèmes de convergence](#)
- Chapitre précédent : [Intégrale de Lebesgue et théorèmes de convergence](#)
- Chapitre suivant : [Espaces \$L^p\$](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)