

Fubini et changement de variables

I. Tribu produit et sections

Dans tout le chapitre, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ sont deux espaces mesurés. On veut mesurer des parties de $X \times Y$ et intégrer des fonctions de deux variables. Il faut d'abord choisir une tribu sur le produit. Le choix naturel consiste à rendre mesurables les « rectangles » $A \times B$.

Définition :

On appelle **rectangle mesurable** toute partie $A \times B$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$. La **tribu produit** $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est la tribu sur $X \times Y$ engendrée par les rectangles mesurables.

Les rectangles mesurables forment une classe stable par intersection finie, car $(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$. Cette stabilité servira pour l'unicité de la mesure produit. Par ailleurs, les deux projections p_X et p_Y sont mesurables, et $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est la plus petite tribu qui les rend mesurables.

Proposition :

Pour tous entiers $p, q \geq 1$, on a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^q) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q})$. En particulier, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est la tribu produit de n copies de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

En effet, un pavé ouvert est un rectangle mesurable, et tout ouvert de $\mathbb{R}^{p+q}$ est réunion dénombrable de pavés ouverts à sommets rationnels. Réciproquement, $A \rightarrow A \times \mathbb{R}^q$ envoie les boréliens sur des

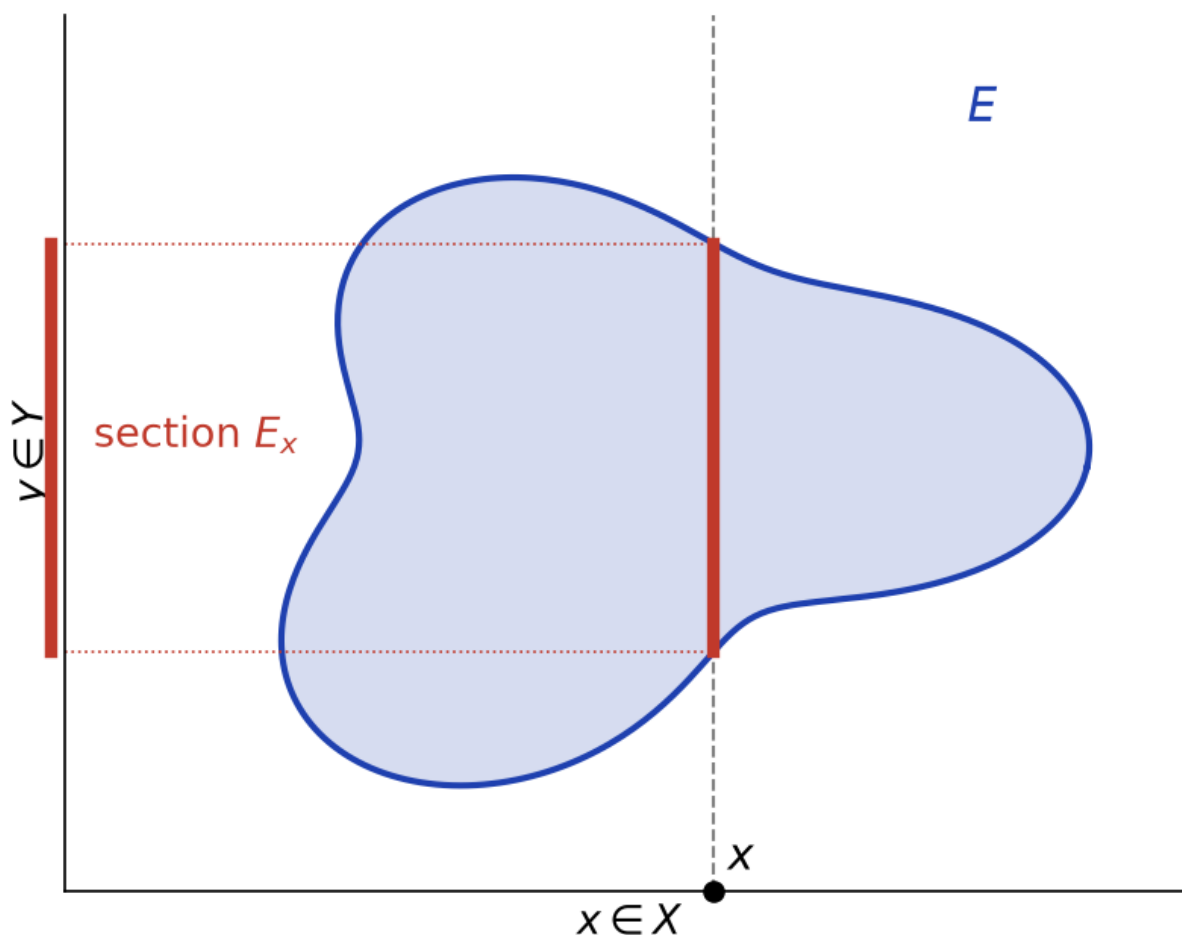
boréliens, car la projection est continue.

1. Sections d'une partie et d'une fonction

Définition :

Soit $E \subset X \times Y$ et $x \in X$. La **section** de E en x est
 $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$. De même, pour $y \in Y$, on pose
 $E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$. Pour une fonction f sur $X \times Y$, on note
 $f_x : y \rightarrow f(x, y)$ et $f^y : x \rightarrow f(x, y)$.

Géométriquement, la section E_x est la trace de E sur la droite verticale d'abscisse x , comme le montre la figure ci-dessous.



Proposition :

Si $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, alors $E_x \in \mathcal{B}$ pour tout $x \in X$ et $E^y \in \mathcal{A}$ pour tout $y \in Y$. Si $f : X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -mesurable, alors chaque f_x est $\mathcal{B}$ -mesurable et chaque f^y est $\mathcal{A}$ -mesurable.

Démonstration :

Fixons x et notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ tels que $E_x \in \mathcal{B}$. D'abord, $\mathcal{C}$ contient les rectangles : $(A \times B)_x$ vaut B si $x \in A$, et $\emptyset$ sinon. Ensuite, les sections commutent avec les opérations ensemblistes : $(E^c)_x = (E_x)^c$ et $\left(\bigcup_n E_n\right)_x = \bigcup_n (E_n)_x$. Donc $\mathcal{C}$ est une tribu contenant les rectangles, et ainsi $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Enfin, pour une fonction, on écrit $f_x^{-1}(I) = \left(f^{-1}(I)\right)_x$ pour tout intervalle I .

Attention :

La réciproque est fautive : une partie dont toutes les sections sont mesurables n'est pas forcément dans la tribu produit. De plus, la tribu de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ est strictement plus grosse que le produit des tribus de Lebesgue de $\mathbb{R}$. Dans ce chapitre, on travaille donc avec des fonctions boréliennes, ce qui suffit en pratique.

II. Mesure produit

On cherche maintenant une mesure sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ qui donne à un rectangle la mesure « longueur fois largeur ». L'idée naturelle consiste à intégrer la mesure des sections. Pour que cela fonctionne, on suppose les deux mesures **σ -finies** : X est réunion dénombrable de parties de mesure finie, et de même pour Y .

Théorème :

Soit μ et ν deux mesures σ -finies. Pour tout $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, les fonctions $x \rightarrow \nu(E_x)$ et $y \rightarrow \mu(E^y)$ sont mesurables, et

$$\int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y).$$

Cette valeur commune définit une mesure $\mu \otimes \nu$ sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. C'est l'unique mesure vérifiant $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \nu(B)$ pour tous $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$.

Démonstration :

Supposons d'abord μ et ν finies. Soit $\mathcal{M}$ la classe des E pour lesquels l'énoncé sur les deux intégrales est vrai. Elle contient les rectangles, car les deux intégrales valent $\mu(A) \nu(B)$. Ensuite, elle est stable par différence $F \setminus E$ avec $E \subset F$, puisque les mesures sont finies. Elle est aussi stable par réunion croissante, grâce au théorème de convergence monotone. Par conséquent, $\mathcal{M}$ est une classe monotone contenant un π -système, donc elle contient la tribu engendrée.

L'additivité dénombrable de $E \rightarrow \int \nu(E_x) d\mu(x)$ découle, elle aussi, de la convergence monotone. Pour l'unicité, deux mesures qui coïncident sur le π -système des rectangles et qui sont finies coïncident sur la tribu engendrée : c'est le lemme d'unicité des mesures. Enfin, le cas σ -fini s'obtient en découpant $X \times Y$ en une suite croissante de rectangles $X_n \times Y_n$ de mesure finie.

Exemple :

La diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ est un fermé, donc un borélien de $\mathbb{R}^2$. Pour la mesure de Lebesgue λ , chaque section $\Delta_x = \{x\}$ est de mesure nulle. Par conséquent,

$$(\lambda \otimes \lambda)(\Delta) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(\{x\}) dx = 0.$$

Le même argument montre que le graphe d'une fonction borélienne est négligeable dans le plan.

III. Théorèmes de Fubini-Tonelli et de Fubini

Le théorème précédent traite les indicatrices. Par linéarité, on passe aux fonctions étagées positives, puis, par convergence monotone, à toutes les fonctions mesurables positives. On obtient ainsi le premier grand théorème du chapitre.

Théorème :

Théorème de Fubini-Tonelli. Soit μ, ν σ -finies et $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable pour $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Alors $x \rightarrow \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ et $y \rightarrow \int_X f(x, y) d\mu(x)$ sont mesurables, et

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Ces égalités ont lieu dans $[0, +\infty]$, sans aucune hypothèse de finitude.

Pour une fonction de signe quelconque, il faut en revanche une hypothèse d'intégrabilité. Celle-ci se vérifie justement grâce à Tonelli appliqué à $|f|$.

Théorème :

Théorème de Fubini. Soit μ, ν σ -finies et $f \in L^1(\mu \otimes \nu)$. Alors :

- pour μ -presque tout x , la fonction f_x est ν -intégrable ;
- la fonction $x \rightarrow \int_Y f(x, y) d\nu(y)$, définie presque partout, est μ -intégrable ;
- les deux intégrales itérées existent et sont égales à $\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu)$.

Démonstration :

On écrit $f = f^+ - f^-$. Par Tonelli,

$$\int_X \left(\int_Y f^\pm(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int f^\pm d(\mu \otimes \nu) < +\infty.$$

Une fonction positive d'intégrale finie est finie presque partout. Donc, pour presque tout x , les intégrales de f_x^+ et f_x^- sont finies, et f_x est intégrable. On soustrait ensuite les deux égalités de Tonelli, ce qui est licite car tous les termes sont finis. Enfin, le rôle de x et de y est symétrique.

Méthode :

Pour justifier une interversion d'intégrales :

- vérifier que les mesures sont σ -finies (Lebesgue, mesure de comptage sur un ensemble dénombrable) et que la fonction est mesurable sur le produit ;
- si $f \geq 0$, invoquer directement Fubini-Tonelli : aucune autre vérification n'est nécessaire ;
- sinon, calculer d'abord $\iint |f|$ par intégrales itérées (Tonelli), montrer que c'est fini, puis appliquer Fubini.

Exemple :

Calculons $I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx$. Pour $x \in]0, 1[$, on a $\frac{x-1}{\ln x} = \int_0^1 x^t dt$, car

$\frac{d}{dt} x^t = x^t \ln x$. La fonction $(x, t) \rightarrow x^t$ est continue et positive sur $]0, 1[\times [0, 1]$. Ainsi, Tonelli donne

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^t dx \right) dt = \int_0^1 \frac{dt}{t+1} = \ln 2.$$

Attention :

Sans intégrabilité, les intégrales itérées peuvent différer. Pour $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ sur $]0, 1]^2$, on trouve $\frac{\pi}{4}$ dans un ordre et $-\frac{\pi}{4}$ dans l'autre : la fonction n'est pas intégrable. De même, l'hypothèse de σ -finitude est indispensable : avec la mesure de comptage sur $[0, 1]$, qui n'est pas σ -finie, l'indicatrice de la diagonale donne deux intégrales itérées égales à 0 et à 1.

Corollaire :

Avec la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, Tonelli dit que pour une suite double $(a_{m,n})$ de réels positifs, $\sum_m \sum_n a_{m,n} = \sum_n \sum_m a_{m,n}$ dans $[0, +\infty]$. Fubini dit que, si $\sum_{m,n} |a_{m,n}| < +\infty$, les deux sommes itérées convergent et sont égales. On retrouve le théorème d'interversion des séries doubles.

IV. Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

Définition :

La **mesure de Lebesgue** λ_n sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est la mesure produit $\lambda \otimes \dots \otimes \lambda$ de n copies de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$. C'est l'unique mesure borélienne telle que

$$\lambda_n\left(\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]\right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Proposition :

La mesure λ_n est invariante par translation : $\lambda_n(a + E) = \lambda_n(E)$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$. Réciproquement, toute mesure borélienne invariante par translation et finie sur les compacts est de la forme $c \lambda_n$ avec $c = \mu([0, 1]^n)$.

En effet, les deux mesures $E \rightarrow \lambda_n(a + E)$ et λ_n coïncident sur les pavés, qui forment un π -système. Le lemme d'unicité conclut. La réciproque s'obtient en découpant $[0, 1]^n$ en k^n petits cubes translatés les uns des autres. On en déduit la valeur de μ sur tous les pavés à sommets rationnels, puis sur tous les boréliens.

1. Effet d'une application linéaire

Théorème :

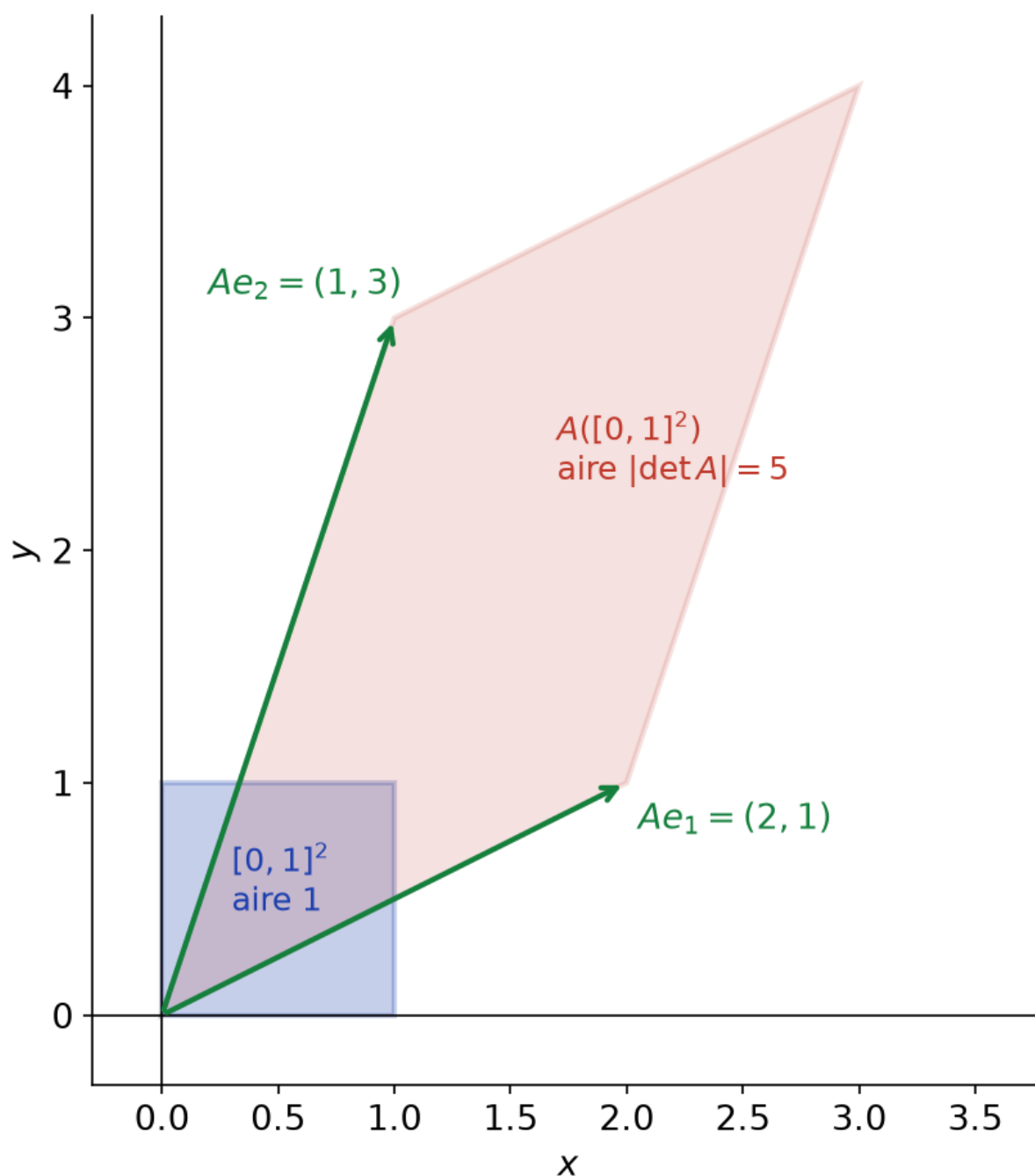
Pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et tout borélien E , on a $\lambda_n(T(E)) = |\det T| \lambda_n(E)$. En particulier, une isométrie conserve la mesure et une homothétie de rapport r la multiplie par $|r|^n$.

Démonstration :

Si T n'est pas inversible, $T(E)$ est contenu dans un hyperplan. Or un hyperplan est négligeable, par Tonelli, après une rotation qui l'envoie sur $\{x_n = 0\}$. Supposons donc T inversible. La mesure $E \rightarrow \lambda_n(T(E))$ est invariante par translation, car $T(a + E) = T(a) + T(E)$. De plus, elle est finie sur les compacts. Il existe donc $c(T) > 0$ tel que $\lambda_n(T(E)) = c(T) \lambda_n(E)$. Ensuite, $c(ST) = c(S) c(T)$. Il suffit donc de traiter les matrices élémentaires, qui engendrent le groupe linéaire. Pour une dilatation d'un axe par a , l'image de $[0, 1]^n$ est un pavé de volume $|a|$. Pour une permutation des coordonnées, Tonelli

donne $c = 1$. Pour une transvection $(x_1, x_2, \dots) \rightarrow (x_1 + a x_2, x_2, \dots)$, chaque section à $x_2, \dots, x_n$ fixés est translatée de $a x_2$: sa mesure ne change pas, d'où $c = 1$. Enfin, c et $|\det|$ sont deux morphismes qui coïncident sur les générateurs.

La figure ci-dessous illustre ce théorème pour $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Le carré unité devient un parallélogramme d'aire $|\det T| = 6 - 1 = 5$.



Exemple :

L'ellipse pleine $\mathcal{E} = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$, avec $a, b > 0$, est l'image du disque unité par $(u, v) \rightarrow (a u, b v)$. Son aire vaut donc $a b \times \pi = \pi a b$.

V. Théorème de changement de variables

Le théorème linéaire se généralise aux transformations non linéaires. Localement, un difféomorphisme ressemble à sa différentielle. Ainsi, il multiplie les petits volumes par la valeur absolue de son jacobien.

Définition :

Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Un C^1 -**difféomorphisme** $\varphi : U \rightarrow V$ est une bijection de classe C^1 dont la réciproque est de classe C^1 . Son **jacobien** est $J\varphi(x) = \det d\varphi(x)$, le déterminant de la matrice des dérivées partielles.

Théorème :

Théorème de changement de variables. Soit $\varphi : U \rightarrow V$ un C^1 -difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$. Pour toute fonction borélienne $f : V \rightarrow [0, +\infty]$,

$$\int_V f(y) \, dy = \int_U f(\varphi(x)) |J\varphi(x)| \, dx.$$

De plus, f est intégrable sur V si et seulement si $(f \circ \varphi) |J\varphi|$ est intégrable sur U , et l'égalité vaut alors encore.

Remarque :

La démonstration, admise ici, découpe U en petits cubes. Sur chacun, φ est proche de sa différentielle, et le théorème linéaire donne le volume de l'image. En pratique, on retient la règle formelle $dy = |J\varphi(x)| dx$. Par ailleurs, on peut retirer de U et de V des parties négligeables : cela ne change aucune intégrale et permet souvent d'obtenir une bijection.

Méthode :

Pour calculer une intégrale multiple par changement de variables :

- choisir de nouvelles variables qui simplifient le domaine (bornes constantes) ou l'intégrande ;
- vérifier que φ est une bijection $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert sur un ouvert, de réciproque $\mathcal{C}^1$, quitte à retirer une partie négligeable ;
- calculer le jacobien, en valeur absolue, et décrire précisément le nouveau domaine ;
- conclure par Fubini-Tonelli sur le nouveau domaine, souvent un pavé.

Exemple :

Soit $Q = \{ (x, y) : |x| + |y| < 1 \}$. Posons $u = x + y$ et $v = x - y$. Alors Q correspond au carré $] -1, 1[$ et $\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right| = 2$, donc $du dv = 2 dx dy$. Par conséquent,

$$\iint_Q (x + y)^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u^2 du dv = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 2 = \frac{2}{3}.$$

VI. Coordonnées polaires et sphériques, intégrale de Gauss et volume de la boule

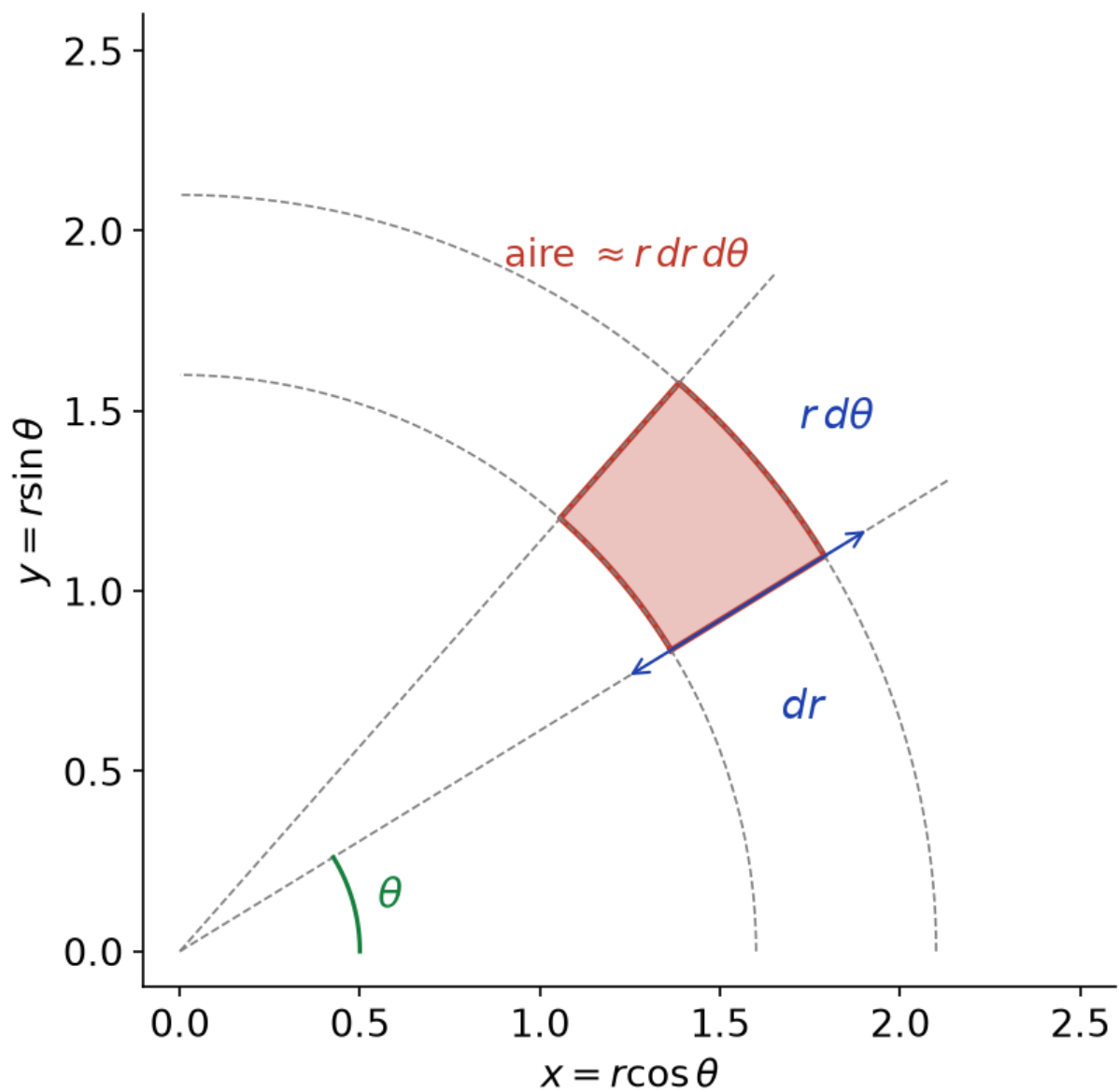
1. Coordonnées polaires

Proposition :

L'application $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ est un C^1 -difféomorphisme de $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite $\mathbb{R}_- \times \{0\}$, qui est négligeable. Son jacobien vaut r . Ainsi, pour $f \geq 0$ borélienne,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{+\infty} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \, r \, dr \, d\theta.$$

Le facteur r s'interprète simplement. Un petit « rectangle polaire » a pour côtés dr et $r \, d\theta$, comme le montre la figure ci-dessous.



Théorème :

Intégrale de Gauss. On a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Démonstration :

Notons $G = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$, finie par comparaison. D'abord, Tonelli appliqué à la fonction positive $e^{-x^2 - y^2} = e^{-x^2} e^{-y^2}$ donne $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2 + y^2)} dx dy = G^2$. Ensuite, en coordonnées polaires,

$$G^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = \pi.$$

Comme $G > 0$, on conclut $G = \sqrt{\pi}$.

Remarque :

Par Tonelli sur n variables, $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \pi^{n/2}$. Par ailleurs, le changement de variable $x = \sqrt{t}$ donne $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, où $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$.

2. Coordonnées sphériques

Proposition :

Posons $\Phi(r, \theta, \phi) = (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi)$, où ϕ est l'angle avec l'axe vertical. Sur $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times]0, \pi[$, c'est un C^1 -difféomorphisme sur $\mathbb{R}^3$ privé d'un demi-plan négligeable. Son jacobien vaut $r^2 \sin \phi$, d'où la règle $dx dy dz = r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi$.

Exemple :

Le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^3$ vaut

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta = 2\pi \times 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

3. Volume de la boule unité en dimension n

Théorème :

Notons $V_n = \lambda_n(B_n)$, où B_n est la boule unité euclidienne fermée de $\mathbb{R}^n$. Alors $V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}$ pour $n \geq 3$, et

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

En particulier, $V_1 = 2$, $V_2 = \pi$, $V_3 = \frac{4\pi}{3}$, $V_4 = \frac{\pi^2}{2}$.

Démonstration :

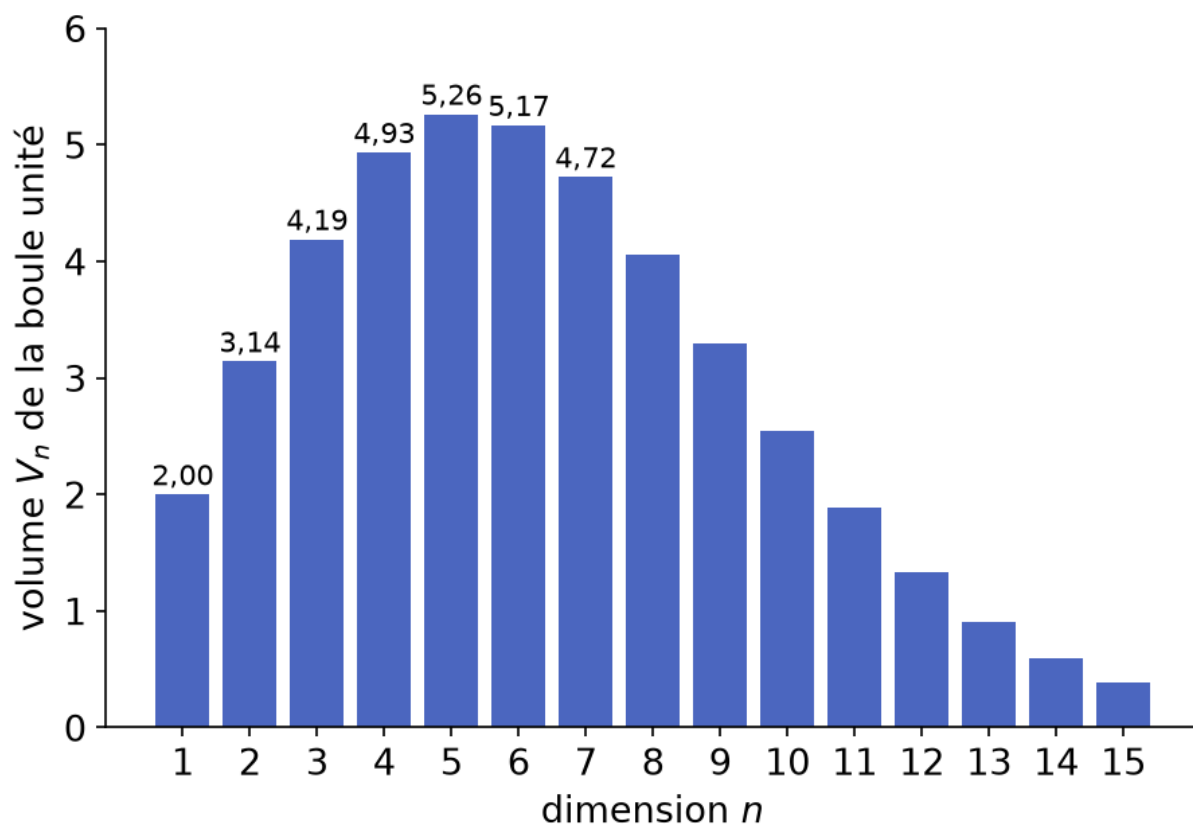
Écrivons un point de $\mathbb{R}^n$ sous la forme (x, y, z) avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $z \in \mathbb{R}^{n-2}$. Le point est dans B_n si et seulement si $x^2 + y^2 \leq 1$ et $|z|^2 \leq 1 - x^2 - y^2$. La section correspondante est une boule de rayon $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ dans $\mathbb{R}^{n-2}$. Son volume vaut donc $V_{n-2} (1 - x^2 - y^2)^{(n-2)/2}$, par l'effet d'une homothétie. Par Tonelli, puis en coordonnées polaires,

$$V_n = V_{n-2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{n-2}{2}} r \, dr \, d\theta = 2\pi V_{n-2} \left[-\frac{(1 - r^2)^{n/2}}{n} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}.$$

Enfin, la formule avec Γ est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$, et elle vérifie la même récurrence,

$$\text{car } \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Le diagramme ci-dessous montre un fait surprenant. Le volume de la boule unité croît jusqu'à la dimension 5, puis tend vers 0.



VII. Produit de convolution

Définition :

Soit $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ boréliennes. Le **produit de convolution** de f et g est, lorsque l'intégrale converge absolument,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy.$$

Théorème :

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $(f * g)(x)$ est défini pour presque tout x , la fonction $f * g$ est intégrable, et

$$|f * g|_1 \leq |f|_1 |g|_1, \quad \int f * g = \int f \int g.$$

De plus, $f * g = g * f$ et $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Démonstration :

La fonction $F(x, y) = f(x - y) g(y)$ est borélienne sur $\mathbb{R}^{2n}$, car $(x, y) \rightarrow x - y$ est continue. Par Tonelli, puis par invariance de λ_n par translation,

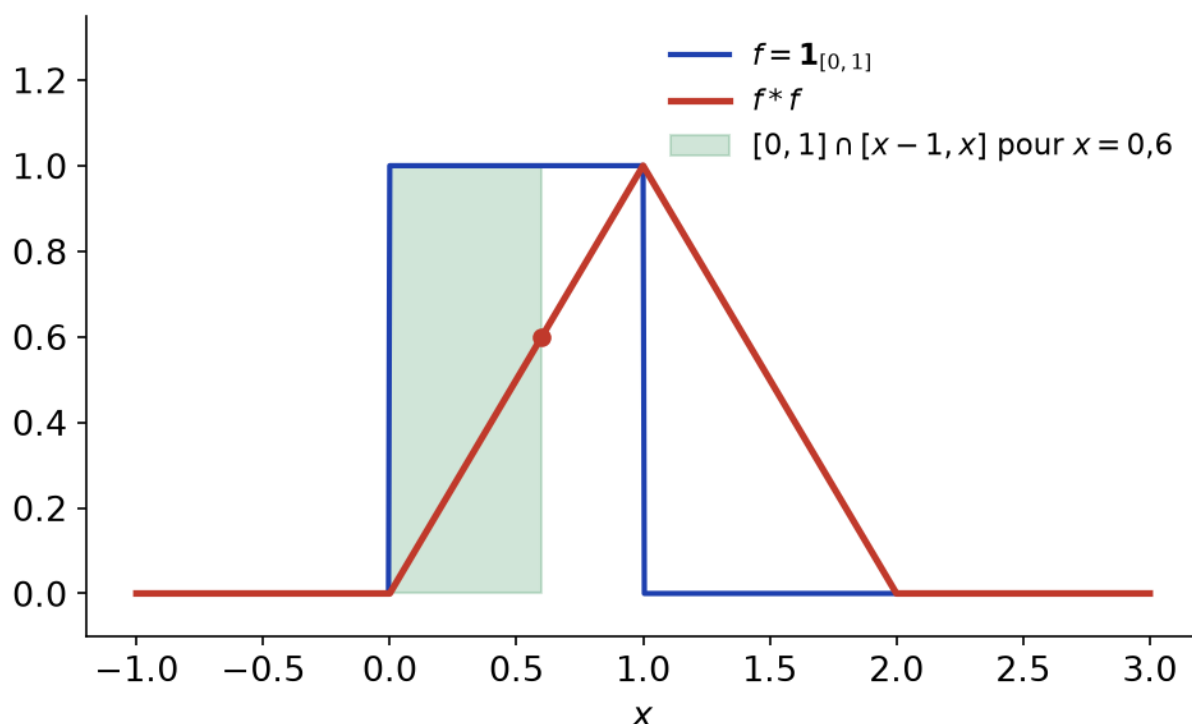
$$\iint |F(x, y)| dx dy = \int |g(y)| \left(\int |f(x - y)| dx \right) dy = |f|_1 |g|_1 < +\infty.$$

Ainsi F est intégrable. Le théorème de Fubini montre alors que $x \rightarrow \int F(x, y) dy$ est définie presque partout et intégrable, avec la majoration annoncée. On obtient $\int f * g$ de la même manière, sans les valeurs absolues. Enfin, le changement de variable $y \rightarrow x - y$, de jacobien ± 1 , donne la commutativité.

Exemple :

Pour $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$, on a $(f * f)(x) = \lambda([0, 1] \cap [x - 1, x])$. Ainsi, $f * f(x) = x$ sur $[0, 1]$, $f * f(x) = 2 - x$ sur $[1, 2]$, et 0 ailleurs : c'est la fonction « triangle ».

La figure ci-dessous montre ce calcul. La convolution de deux créneaux discontinus est déjà continue : la convolution régularise.



Proposition :

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et g bornée. Alors $f * g$ est définie partout, bornée par $\|f\|_1 \|g\|_\infty$, et uniformément continue. Si de plus g est de classe C^1 avec g et ∇g bornés, alors $f * g$ est C^1 et $\partial_i (f * g) = f * \partial_i g$.

La continuité uniforme repose sur la continuité des translations dans L^1 : $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$, conséquence de la densité des fonctions continues à support compact. La dérivabilité découle du théorème de dérivation sous l'intégrale, avec la domination $|f(y)| \|\nabla g\|_\infty$ après avoir écrit

$$f * g = \int f(y) g(x - y) dy.$$

Méthode :

Pour étudier un produit de convolution :

- justifier l'existence par Tonelli sur $|f(x - y) g(y)|$, ou par une majoration directe si l'une des fonctions est bornée ;
- pour un calcul explicite, décrire le support de $y \rightarrow f(x - y) g(y)$ selon la position de x ;
- pour la régularité, faire porter les dérivées sur le facteur le plus régulier.

Ce qu'il faut retenir

- La tribu produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est engendrée par les rectangles ; les sections d'une partie ou d'une fonction mesurable sont mesurables.
- Pour des mesures σ -finies, la mesure produit est l'unique mesure telle que $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \nu(B)$.
- Fubini-Tonelli : pour $f \geq 0$ mesurable, on intervertit toujours les intégrales, dans $[0, +\infty]$.
- Fubini : pour f de signe quelconque, on vérifie d'abord $\iint |f| < +\infty$ par Tonelli.
- La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est invariante par translation et $\lambda_n(T(E)) = |\det T| \lambda_n(E)$.
- Changement de variables : $dy = |J\varphi(x)| dx$ pour un C^1 -difféomorphisme entre ouverts.
- Polaires : $dx dy = r dr d\theta$; sphériques : $dx dy dz = r^2 \sin\phi dr d\theta d\phi$.

- $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ et $V_n = \pi^{n/2} / \Gamma(\frac{n}{2} + 1)$.

- Le produit de convolution de deux fonctions intégrables est intégrable, commutatif, et régularise.

Questions fréquentes sur Fubini et changement de variables

Quand peut-on intervertir deux intégrales sans rien vérifier ?

Lorsque la fonction est mesurable et positive, et que les deux mesures sont σ -finies : c'est le théorème de Fubini-Tonelli. L'égalité a alors lieu dans $[0, +\infty]$, même si les intégrales sont infinies. Pour une fonction de signe quelconque, il faut d'abord montrer $\iint |f| < +\infty$, en calculant cette intégrale par Tonelli.

Pourquoi met-on une valeur absolue sur le jacobien ?

Le jacobien mesure le facteur de dilatation des volumes, qui est toujours positif. Son signe indique seulement si l'orientation est conservée. En dimension 1, la formule $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ utilise des bornes orientées ; avec des intégrales sur des ensembles, il faut donc $|\varphi'|$.

Comment calculer l'intégrale de Gauss rapidement ?

On élève au carré : par Tonelli, $G^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2 + y^2)} dx dy$. En coordonnées polaires, avec $dx dy = r dr d\theta$, on obtient $2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = \pi$. Donc $G = \sqrt{\pi}$.

À quoi sert le produit de convolution ?

Il combine deux fonctions en une fonction qui hérite de la régularité de la plus lisse des deux. On l'utilise pour approcher une fonction intégrable par des fonctions de classe C^∞ . En probabilités, la densité de la somme de deux variables indépendantes à densité est la convolée de leurs densités.

Pour aller plus loin en L3

- Les énoncés : [exercices de maths en L3 sur fubini et changement de variables](#)
- À maîtriser avant : [Intégrale de Lebesgue et théorèmes de convergence](#)
- Chapitre précédent : [Intégrale de Lebesgue et théorèmes de convergence](#)
- Chapitre suivant : [Espaces \$L^p\$](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)