

Fractions rationnelles

Exercice 1 : PGCD par l'algorithme d'Euclide

On considère $A = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ et $B = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Effectuer l'algorithme d'Euclide et en déduire $A \wedge B$.
2. Donner deux polynômes U et V tels que $AU + BV = A \wedge B$.
3. Factoriser A et B dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$, et retrouver le PGCD.

Exercice 2 : Relation de Bézout et ses solutions

Soient $A = (X - 1)^2$ et $B = X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Justifier que A et B sont premiers entre eux.
2. Déterminer deux polynômes U_0 et V_0 tels que $AU_0 + BV_0 = 1$.
3. À l'aide du lemme de Gauss, déterminer tous les couples $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $AU + BV = 1$.
4. Montrer qu'il existe un unique couple solution avec $\deg U < 2$ et $\deg V < 2$.

Exercice 3 : Un polynôme et sa dérivée

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.

1. Montrer que P et P' sont premiers entre eux si et seulement si toutes les racines de P sont simples.
2. Pour $n \geq 1$, montrer que $X^n - 1$ et sa dérivée sont premiers entre eux.
3. Déterminer $P \wedge P'$ pour $P = X^3 - 3X + 2$.

Exercice 4 : PGCD de $X^m - 1$ et $X^n - 1$

Soient m et n deux entiers naturels non nuls, et $d = \text{pgcd}(m, n)$.

1. Montrer que si deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés à racines simples, leur PGCD est le produit des $X - a$, où a parcourt leurs racines communes.
2. Déterminer $(X^6 - 1) \wedge (X^4 - 1)$.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $z^m = 1$ et $z^n = 1$ si et seulement si $z^d = 1$. On pourra utiliser une relation de Bézout entre m et n .
4. En déduire que $(X^m - 1) \wedge (X^n - 1) = X^d - 1$.

Exercice 5 : PPCM de deux polynômes

Soient $A = X^3 - X$ et $B = X^3 + X^2$.

1. Factoriser A et B en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

2. En déduire $A \wedge B$ et $A \vee B$.
3. Vérifier la relation $(A \wedge B)(A \vee B) = AB$.
4. Déterminer tous les polynômes P de degré au plus 5 divisibles à la fois par A et par B .

Exercice 6 : Lemme de Gauss et divisibilité

On note $j = e^{2i\pi/3}$.

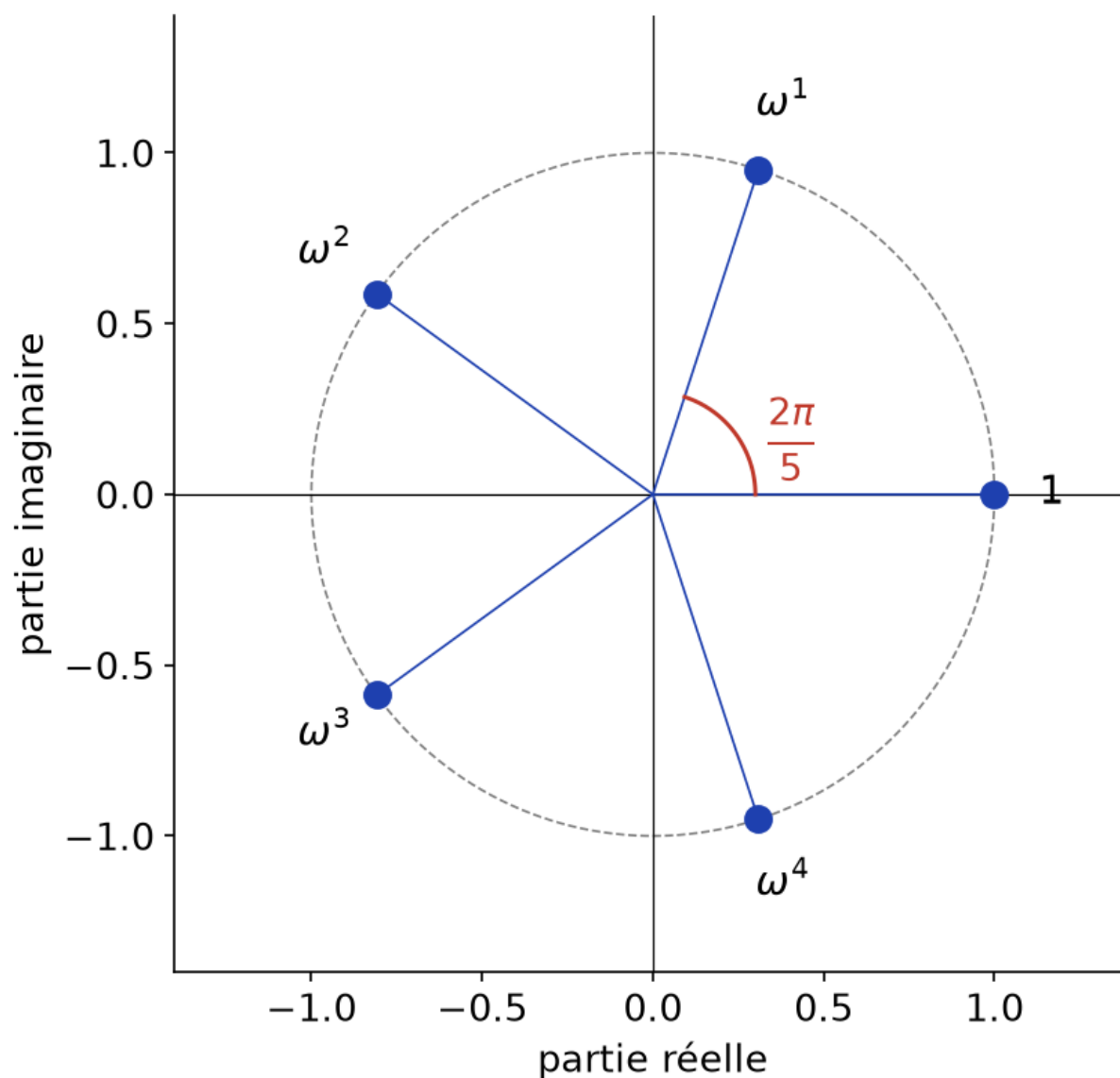
1. Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ avec $A \wedge B = 1$, $A \mid C$ et $B \mid C$. Montrer que $AB \mid C$.
2. Soient $a, b, c \in \mathbb{N}$. Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{3a} + X^{3b+1} + X^{3c+2}$.
3. Vérifier que $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$ et que ces deux facteurs sont premiers entre eux.
4. Montrer que $X^4 + X^2 + 1$ divise $Q = X^{12} + X^4 + X^2$.

Exercice 7 : Factorisations classiques

1. Factoriser $X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Retrouver la factorisation réelle de $X^4 + 1$ en écrivant $X^4 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2$.
3. Factoriser $X^4 + X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ par la même astuce.
4. Factoriser $X^3 + 8$ dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 8 : Factorisation de $X^5 - 1$ et $X^6 + 1$

On note $\omega = e^{2i\pi/5}$. La figure ci-dessous représente les racines cinquièmes de l'unité.



1. Écrire la factorisation de $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ à l'aide de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.
2. En posant $a = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $b = 2\cos\frac{4\pi}{5}$, calculer $a + b$ et ab en identifiant les coefficients. En déduire $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
3. Écrire alors $X^5 - 1$ comme produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ à coefficients explicites.
4. Factoriser $X^6 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9 : Factorisation à partir d'une racine complexe

Soit $P = X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 2X + 5$.

1. Calculer $P(i)$. Que peut-on en déduire pour $P(-i)$?
2. En déduire que $X^2 + 1$ divise P , et calculer le quotient.
3. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 10 : Polynômes réels positifs

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $P(x) \geq 0$ pour tout réel x .

1. Montrer que le coefficient dominant de P est strictement positif et que chaque racine réelle de P est de multiplicité paire.
2. En utilisant la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, montrer qu'il existe $c > 0$, $S \in \mathbb{R}[X]$ et $T \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P = c S^2 T \bar{T}$, où $\bar{T}$ désigne le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de T .
3. En écrivant $T = A + iB$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$, montrer que P est la somme des carrés de deux polynômes réels.
4. Écrire explicitement $X^4 + 1$ comme somme de deux carrés de polynômes réels.

Exercice 11 : Forme irréductible, degré et partie entière

1. Soit $F = \frac{X^3 - 3X + 2}{X^3 - X^2 - X + 1}$. Mettre F sous forme irréductible, puis donner son degré, sa partie entière, ses zéros et ses pôles avec leurs multiplicités.

2. Soit $G = \frac{2X^4 + X^3 + 1}{X^2 + 1}$. Déterminer la partie entière de G et écrire $G = E + \frac{R}{X^2 + 1}$ avec $\deg R < 2$.
3. Déterminer les pôles de G dans $\mathbb{C}$, puis la limite de $G(x) - E(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 12 : Éléments simples, pôles simples

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

1. $F = \frac{X^2 + 1}{X(X - 1)(X + 2)}$;
2. $G = \frac{X^3}{(X - 1)(X - 2)}$;
3. $H = \frac{1}{X^2 - 4}$, et en déduire une primitive de $x \rightarrow \frac{1}{x^2 - 4}$ sur $]2, +\infty[$.

Exercice 13 : Éléments simples, pôles multiples

1. Décomposer $F = \frac{1}{(X - 1)^2(X + 1)}$ en éléments simples.
2. Décomposer $G = \frac{X^2}{(X - 1)^3}$ en posant $Y = X - 1$.
3. Décomposer $H = \frac{X + 1}{X^2(X - 1)^2}$ en éléments simples.

Exercice 14 : Décomposition sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$

On note $j = e^{2i\pi/3}$.

1. Décomposer $\frac{1}{X^3 - 1}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.
2. En regroupant les termes conjugués, en déduire la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$.
3. Décomposer de même $\frac{X}{X^4 - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$.

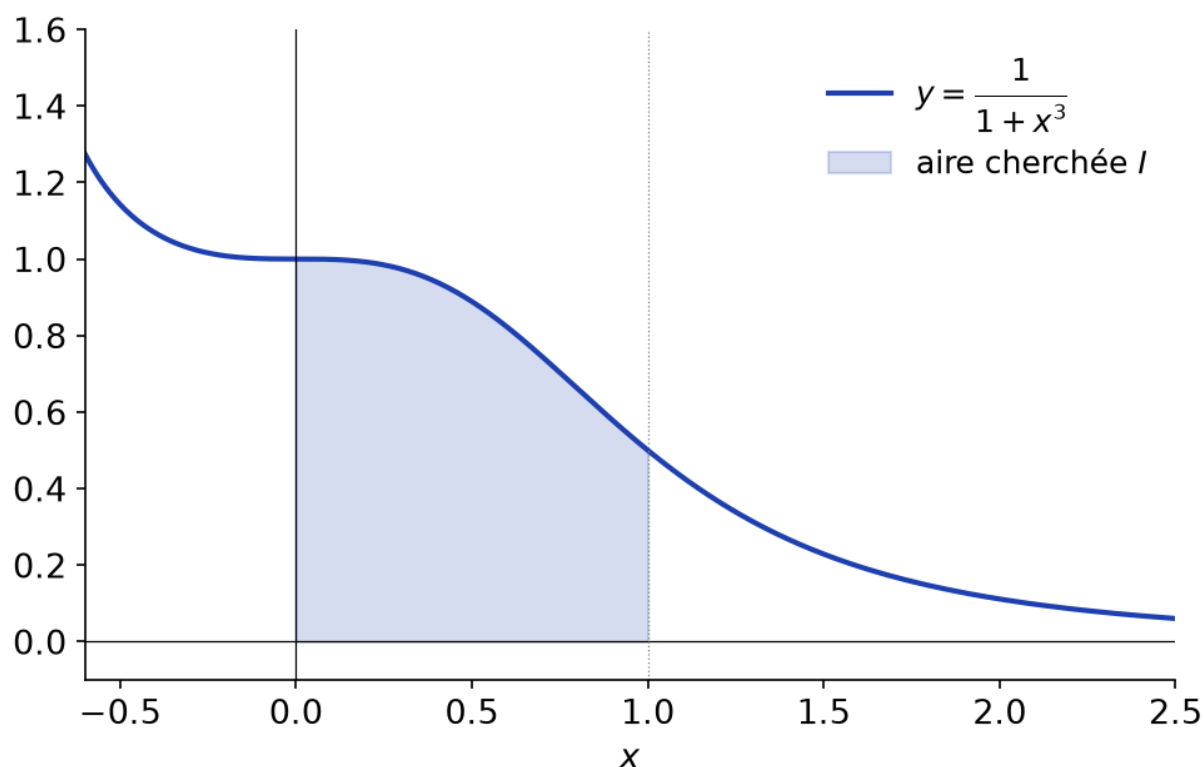
Exercice 15 : Facteur irréductible au carré

Soit $F = \frac{1}{X(X^2 + 1)^2}$.

1. Justifier la forme de la décomposition de F dans $\mathbb{R}(X)$.
2. Calculer le coefficient de $\frac{1}{X}$, puis simplifier $F - \frac{1}{X}$ pour obtenir la décomposition complète.
3. En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x(x^2 + 1)^2}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 16 : Calcul d'une intégrale

On veut calculer $I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^3}$, aire représentée sur la figure ci-dessous.



1. Décomposer $\frac{1}{X^3+1}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.
2. En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$ sur $] -1, +\infty[$.
3. Calculer I .
4. Déterminer la limite de $\int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 17 : Dérivées k-ièmes

1. Soit $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Calculer $f^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \notin \{-1, 1\}$.
2. En déduire $f^{(k)}(0)$, et vérifier le résultat pour $k \leq 2$.
3. Soit $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Décomposer g sur $\mathbb{C}$ et montrer que

$$g^{(k)}(0) = (-1)^k k! \sin \frac{(k+1)\pi}{2}.$$

4. Vérifier l'égalité $g(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 g(x)$. En déduire $g^{(k)}(0)$ pour $k \leq 4$ à l'aide de la formule de Leibniz, et comparer avec la question 3.

Exercice 18 : Sommes sur les racines avec P'/P

Soit $P = X^3 + X + 1$, de racines complexes x_1, x_2, x_3 .

1. Montrer que les racines de P sont simples.
2. Rappeler la décomposition de $\frac{P'}{P}$ en éléments simples.
3. Calculer $\sum_{k=1}^3 \frac{1}{x_k}$ de deux façons : avec $\frac{P'}{P}$, puis avec les relations coefficients-racines.
4. Calculer $\sum_{k=1}^3 \frac{1}{1-x_k}$ puis $\sum_{k=1}^3 \frac{1}{(1-x_k)^2}$.

Exercice 19 : Sommes sur les racines de l'unité

Soit $n \geq 2$ et $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

1. Calculer $S = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2 - \omega_k}$.
2. On pose $Q = 1 + X + \dots + X^{n-1}$. Déterminer les racines de Q , puis calculer $T = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \omega_k}$.
3. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ non multiple de 2π , montrer que $\frac{1}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \cot \frac{\theta}{2}$.

4. En déduire $\sum_{k=1}^{n-1} \cot \frac{k\pi}{n}$, et vérifier la cohérence avec la question 2.

Exercice 20 : La fonction logarithme n'est pas rationnelle

1. Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ et $a \in \mathbb{C}$ qui n'est pas pôle de F . Montrer que a n'est pas pôle de F' .
2. Soit a un pôle de F d'ordre $m \geq 1$. Montrer que a est un pôle de F' d'ordre $m + 1$.
3. En déduire qu'il n'existe aucune fraction rationnelle F telle que $F' = \frac{1}{X}$.
4. Montrer que la fonction $\ln$ ne coïncide sur aucun intervalle $]\alpha, \beta[\subset]0, +\infty[$ avec une fonction rationnelle.

Exercice 21 : Problème, une famille de fractions et des sommes télescopiques

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \frac{1}{X(X+1)(X+2)\dots(X+n)}$.

1. Déterminer les pôles de F_n et leur multiplicité, ainsi que la partie entière de F_n .
2. Montrer que $F_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{X+k}$.
3. Pour $n \geq 1$, en considérant $x F_n(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$, retrouver $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.
4. En évaluant en $X = 1$, calculer $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k}$.
5. Montrer que $F_n(X) - F_n(X+1) = (n+1)F_{n+1}(X)$.

6. En déduire, pour tout $m \geq 1$, que la suite $\left(\sum_{p=1}^N F_m(p) \right)_{N \geq 1}$ converge, et que sa limite vaut $\frac{1}{m \cdot m!}$.

7. Expliciter le cas $m = 2$: décomposer F_2 et calculer $\sum_{p=1}^N \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [fractions rationnelles, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Polynômes : division euclidienne, racines, interpolation](#), [Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs](#)
- Chapitre précédent : [Polynômes : division euclidienne, racines, interpolation](#)
- Chapitre suivant : [Relations de comparaison : domination, équivalents](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)