

Fractions rationnelles

I. PGCD de deux polynômes et algorithme d'Euclide

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ possède une division euclidienne, comme $\mathbb{Z}$. Par conséquent, toute l'arithmétique des entiers se transpose presque mot pour mot. Le rôle des nombres premiers est tenu par les polynômes irréductibles. De plus, le rôle des entiers positifs est tenu par les polynômes unitaires.

1. Diviseurs communs et PGCD

Rappelons que A divise B s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = AQ$. Deux polynômes qui se divisent mutuellement sont associés : ils diffèrent d'une constante non nulle. Ainsi, chaque classe de polynômes associés non nuls contient un unique polynôme unitaire.

Définition :

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, non tous deux nuls. Le **PGCD** de A et B , noté $A \wedge B$, est l'unique polynôme unitaire D tel que les diviseurs communs de A et B soient exactement les diviseurs de D . C'est aussi le diviseur commun unitaire de plus grand degré.

L'existence de ce polynôme repose sur un lemme simple. En effet, si $A = BQ + R$, alors les diviseurs communs de A et B sont exactement ceux de B et R . On peut donc remplacer le couple (A, B) par un couple de degrés plus petits.

2. L'algorithme d'Euclide

Méthode :

Pour calculer $A \wedge B$ avec $B \neq 0$, on pose $R_0 = A$ et $R_1 = B$. Ensuite, tant que $R_k \neq 0$, on note R_{k+1} le reste de la division euclidienne de R_{k-1} par R_k . Les degrés décroissent strictement, donc l'algorithme s'arrête. Le dernier reste non nul, rendu unitaire, est le PGCD.

Exemple :

Prenons $A = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ et $B = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$. D'abord, on obtient $A = (X - 1)B + 2(X^2 + X + 1)$. Ensuite, $B = (X^2 + X + 1)(X + 1)$, avec un reste nul. Par conséquent, $A \wedge B = X^2 + X + 1$.

3. Relation de Bézout

En remontant les divisions de l'algorithme, on exprime le PGCD à l'aide de A et B . C'est l'analogue exact du résultat connu dans $\mathbb{Z}$.

Théorème :

Relation de Bézout. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non tous deux nuls, et $D = A \wedge B$. Il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = D$.

Démonstration :

On montre par récurrence que chaque reste R_k de l'algorithme s'écrit $AU_k + BV_k$. C'est vrai pour $R_0 = A$ et $R_1 = B$. Si c'est vrai aux rangs $k-1$ et k , alors $R_{k+1} = R_{k-1} - Q_k R_k$ s'écrit encore sous cette forme. Enfin, le PGCD est un multiple constant du dernier reste non nul, d'où le résultat.

Dans l'exemple précédent, la première division donne directement

$$2(X^2 + X + 1) = A - (X - 1)B. \text{ Autrement dit, on peut prendre } U = \frac{1}{2} \text{ et } V = -\frac{1}{2}(X - 1).$$

II. Polynômes premiers entre eux, lemme de Gauss et PPCM

1. Polynômes premiers entre eux

Définition :

Deux polynômes A et B sont **premiers entre eux** si $A \wedge B = 1$. Autrement dit, leurs seuls diviseurs communs sont les constantes non nulles.

Théorème :

Théorème de Bézout. Les polynômes A et B sont premiers entre eux si et seulement s'il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.

Le sens direct découle de la relation de Bézout. Réciproquement, un diviseur commun de A et B divise $AU + BV = 1$. Il est donc constant.

Proposition :

Soient $A, B \in \mathbb{C}[X]$ non tous deux nuls. Alors A et B sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont **aucune racine complexe commune**.

Démonstration :

Si α est une racine commune, alors $X - \alpha$ divise A et B , donc $A \wedge B \neq 1$.
Réciproquement, si $D = A \wedge B$ n'est pas constant, le théorème de d'Alembert-Gauss (partie III) fournit une racine α de D . Or D divise A et B , donc α est racine commune.

Cette caractérisation vaut aussi pour deux polynômes réels, car leur PGCD est le même dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$. En effet, l'algorithme d'Euclide ne fait intervenir que des opérations sur les coefficients.

Méthode :

Pour montrer que deux polynômes sont premiers entre eux, on dispose de deux voies. D'une part, on peut exhiber une relation $AU + BV = 1$. D'autre part, on peut montrer qu'ils n'ont aucune racine commune dans $\mathbb{C}$. Par exemple, $X^n - 1$ et $X^n + 1$ sont premiers entre eux, car $(X^n + 1) - (X^n - 1) = 2$.

2. Lemme de Gauss

Théorème :

Lemme de Gauss. Si A divise BC et si $A \wedge B = 1$, alors A divise C .

Démonstration :

Écrivons $AU + BV = 1$. En multipliant par C , on obtient $C = ACU + BCV$. Or A divise ACU et A divise BC . Par conséquent, A divise C .

Corollaire :

Si A et B sont premiers entre eux et divisent tous deux C , alors AB divise C . Plus généralement, si $A_1, \dots, A_r$ sont premiers entre eux deux à deux et divisent C , alors leur produit divise C .

Ce corollaire sert constamment. Par exemple, si $a_1, \dots, a_r$ sont des racines distinctes de P , les polynômes $X - a_i$ sont premiers entre eux deux à deux. Ainsi, le produit $(X - a_1) \dots (X - a_r)$ divise P .

3. PPCM

Définition :

Soient A et B non nuls. Le **PPCM** de A et B , noté $A \vee B$, est l'unique polynôme unitaire M dont les multiples sont exactement les multiples communs de A et B .

Propriété :

Si A et B sont unitaires, alors $(A \wedge B)(A \vee B) = AB$. En particulier, si A et B sont unitaires et premiers entre eux, leur PPCM est AB .

Exemple :

Avec $A = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ et $B = X^3 + X^2 = X^2(X+1)$, on lit $A \wedge B = X(X+1)$. Ensuite, $A \vee B = X^2(X-1)(X+1)$. On vérifie bien que le produit des deux vaut $X^3(X-1)(X+1)^2 = AB$.

III. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$

1. Polynômes irréductibles

Définition :

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est **irréductible** s'il est non constant et si ses seuls diviseurs sont les constantes non nulles et les polynômes associés à P .

Tout polynôme de degré 1 est irréductible. En revanche, un polynôme de degré au moins 2 qui possède une racine a n'est jamais irréductible, puisque $X - a$ le divise. L'irréductibilité dépend donc du corps : $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, mais pas dans $\mathbb{C}[X]$.

2. Le théorème de d'Alembert-Gauss

Théorème :

Théorème de d'Alembert-Gauss (admis). Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Par récurrence sur le degré, on en déduit que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé. De plus, il se décompose de façon unique sous la forme suivante.

Théorème :

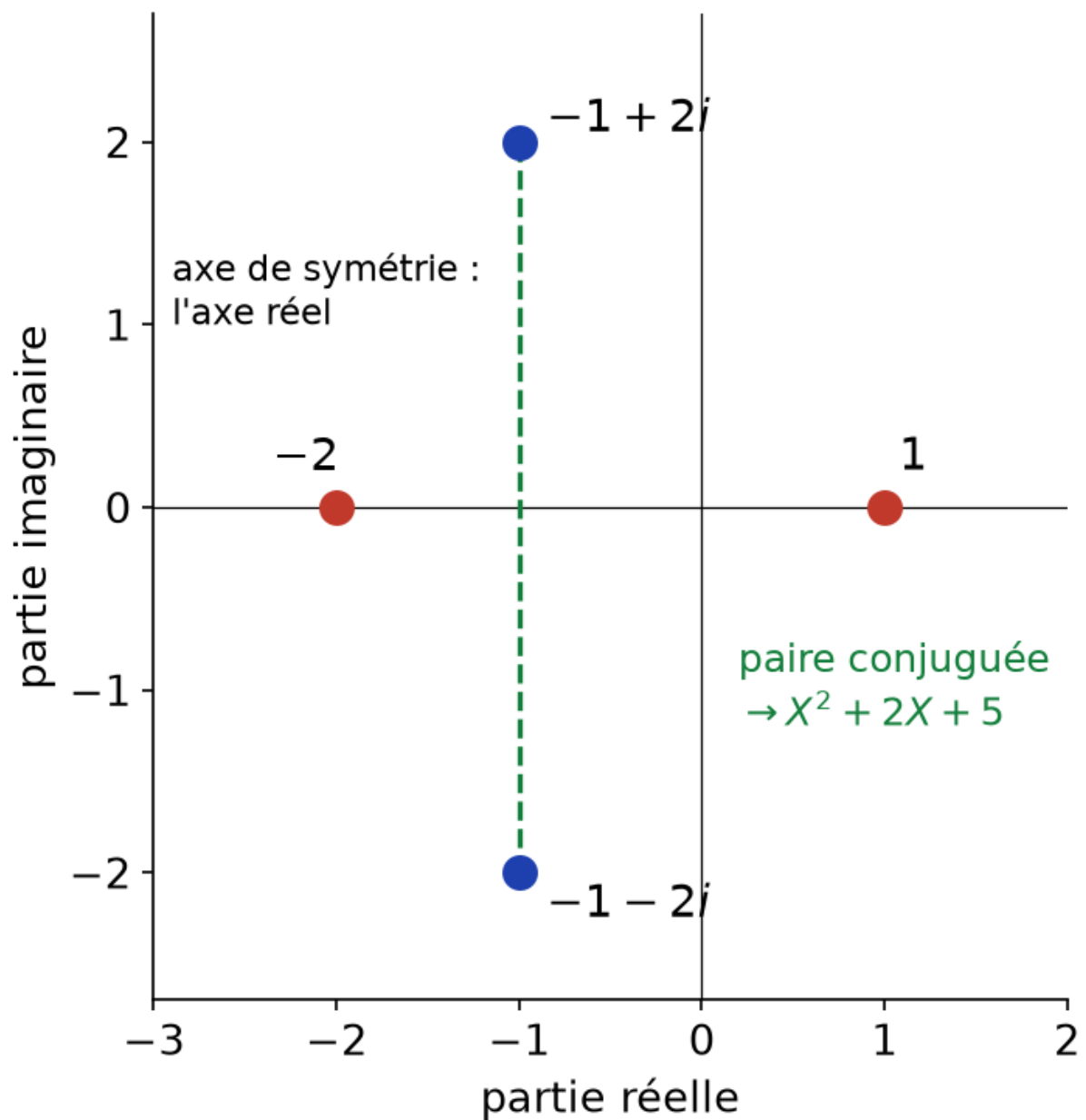
Les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1. Tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant s'écrit de façon unique, à l'ordre près :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^r (X - a_k)^{m_k},$$

où λ est le coefficient dominant, les a_k les racines distinctes et les m_k leurs multiplicités.

3. Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Comme ses coefficients sont réels, on a $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$ pour tout complexe z . Ainsi, les racines non réelles de P se regroupent par paires conjuguées, avec la même multiplicité. La figure ci-dessous illustre cette symétrie pour $P = (X - 1)(X + 2)(X^2 + 2X + 5)$.



Chaque paire $\{z, \bar{z}\}$ fournit un facteur réel de degré 2, car

$(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2$. Son discriminant $-4(\operatorname{Im} z)^2$ est strictement négatif.

Théorème :

Les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif. Tout $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant s'écrit de façon unique, à l'ordre près :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^r (X - a_k)^{m_k} \prod_{j=1}^s (X^2 + p_j X + q_j)^{n_j},$$

avec a_k réels distincts et $p_j^2 - 4q_j < 0$, les trinômes étant distincts.

Remarque :

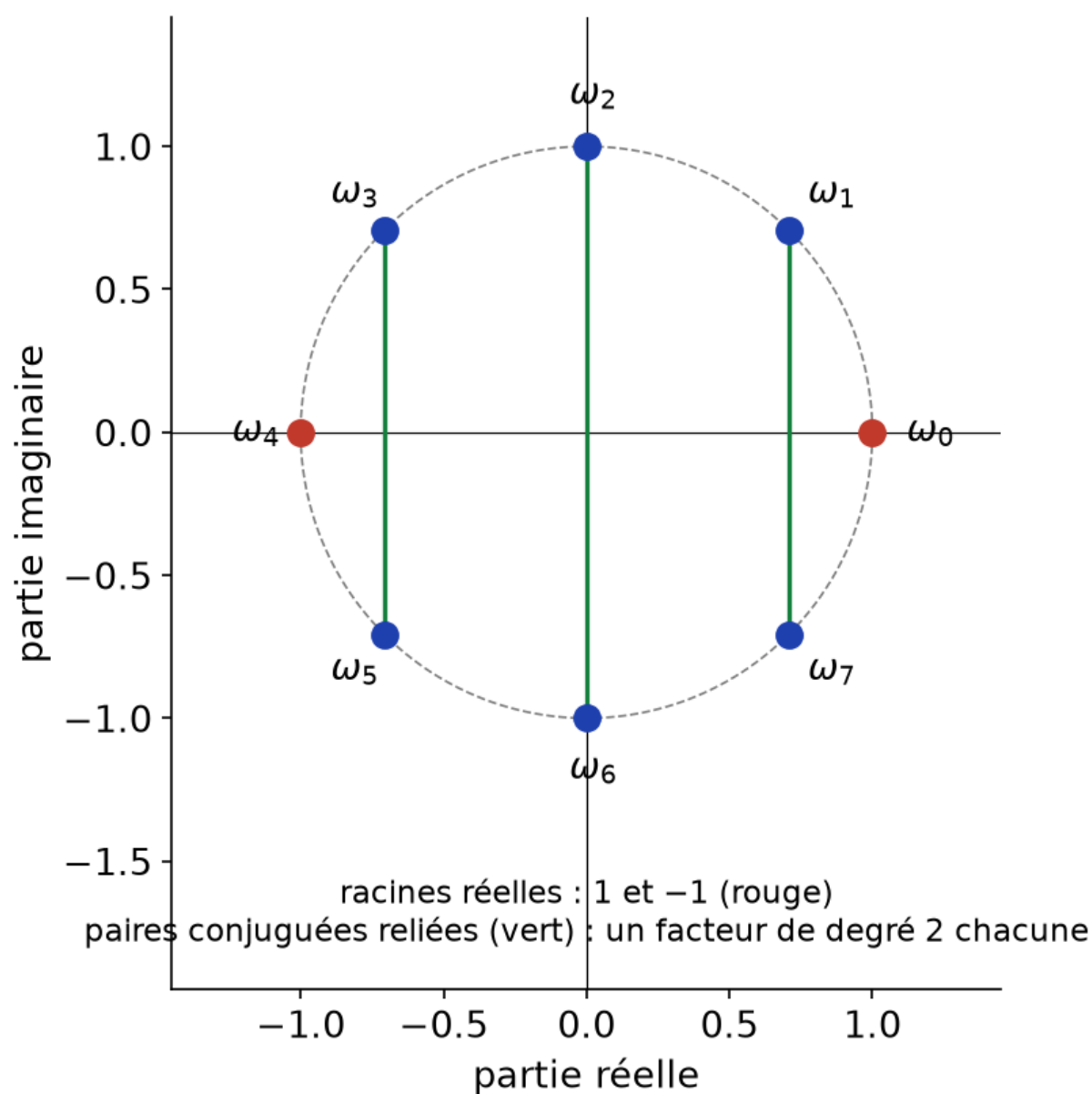
Un polynôme réel de degré impair a donc toujours une racine réelle. En effet, ses racines non réelles sont en nombre pair, comptées avec multiplicité.

4. Factorisation de $X^n - 1$

Les racines de $X^n - 1$ sont les racines n -ièmes de l'unité $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$, pour $0 \leq k \leq n-1$. Elles sont distinctes, donc toutes simples. Dans $\mathbb{C}[X]$, on a donc

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k).$$

Dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe ω_k et $\omega_{n-k} = \overline{\omega_k}$. Comme le montre la figure ci-dessous pour $n = 8$, les racines réelles sont 1 et, si n est pair, -1 .



Proposition :

Si $n = 2p + 1$ est impair :

$$X^n - 1 = (X - 1) \prod_{k=1}^p \left(X^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n} X + 1 \right).$$

Si $n = 2p$ est pair :

$$X^n - 1 = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{p-1} \left(X^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n} X + 1 \right).$$

Exemple :

Pour $n = 8$, on a $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Par conséquent :

$$X^8 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1).$$

Méthode :

Pour factoriser $P \in \mathbb{R}[X]$, on cherche d'abord ses racines complexes, avec leurs multiplicités. On écrit ensuite la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$. Enfin, on regroupe chaque racine non réelle avec sa conjuguée pour obtenir un trinôme réel. Une racine évidente, même complexe, fournit souvent un facteur de degré 2 qui abaisse le degré.

IV. Le corps des fractions rationnelles

1. Définition et forme irréductible

Définition :

Une **fraction rationnelle** à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un quotient formel $F = \frac{P}{Q}$, avec $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \neq 0$. Deux écritures $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P_1}{Q_1}$ désignent la même fraction si $PQ_1 = P_1Q$. L'ensemble de ces fractions est un corps, noté $\mathbb{K}(X)$.

On calcule avec les fractions rationnelles comme avec les fractions de nombres. En outre, on identifie un polynôme P à la fraction $\frac{P}{1}$. Ainsi, $\mathbb{K}[X]$ est un sous-anneau de $\mathbb{K}(X)$.

Proposition :

Toute fraction non nulle admet un unique **représentant irréductible** $\frac{P}{Q}$ avec $P \wedge Q = 1$ et Q unitaire. On l'obtient en divisant P et Q par leur PGCD.

2. Degré et partie entière

Définition :

Le **degré** de $F = \frac{P}{Q}$ est $\deg F = \deg P - \deg Q$, qui ne dépend pas du représentant. Par convention, $\deg 0 = -\infty$. On a $\deg(FG) = \deg F + \deg G$ et $\deg(F + G) \leq \max(\deg F, \deg G)$.

Théorème :

Toute fraction $F \in \mathbb{K}(X)$ s'écrit de façon unique $F = E + G$, où $E \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg G < 0$. Le polynôme E est la **partie entière** de F : c'est le quotient de la division euclidienne de P par Q .

Exemple :

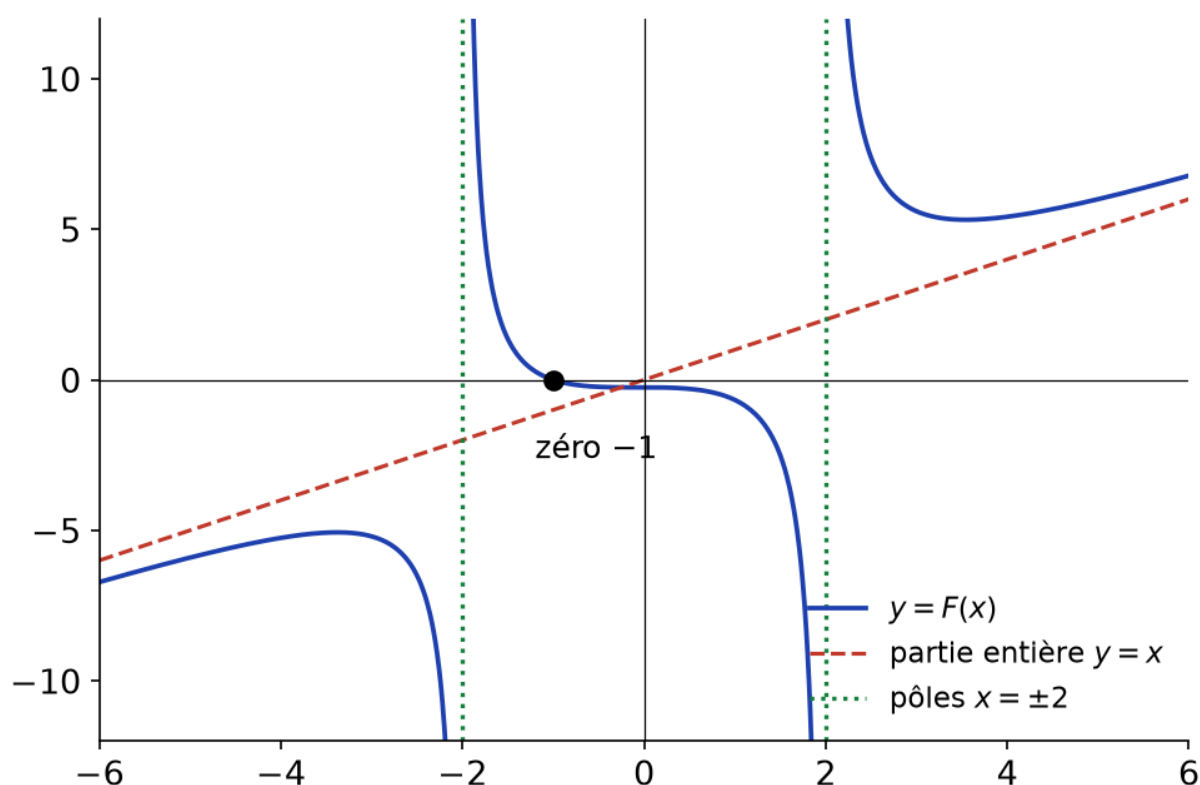
Soit $F = \frac{X^3 + 1}{X^2 - 4}$. La division euclidienne donne $X^3 + 1 = X(X^2 - 4) + 4X + 1$. Par conséquent, $F = X + \frac{4X + 1}{X^2 - 4}$, et la partie entière est X .

3. Zéros et pôles

Définition :

Soit $F = \frac{P}{Q}$ sous forme irréductible. Les **zéros** de F sont les racines de P . Les **pôles** de F sont les racines de Q . La multiplicité d'un zéro ou d'un pôle est sa multiplicité comme racine de P ou de Q .

La fonction rationnelle associée $x \rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)}$ est définie hors des pôles. Au voisinage d'un pôle réel, elle tend vers l'infini en valeur absolue. De plus, en $\pm\infty$, elle se rapproche de sa partie entière. La figure ci-dessous montre ces deux comportements pour l'exemple précédent.



Attention :

Il faut simplifier avant de lire les pôles. Par exemple, $\frac{X^2-1}{X-1} = X+1$ est un polynôme : 1 n'est pas un pôle.

V. Décomposition en éléments simples

1. Le théorème sur $\mathbb{C}$

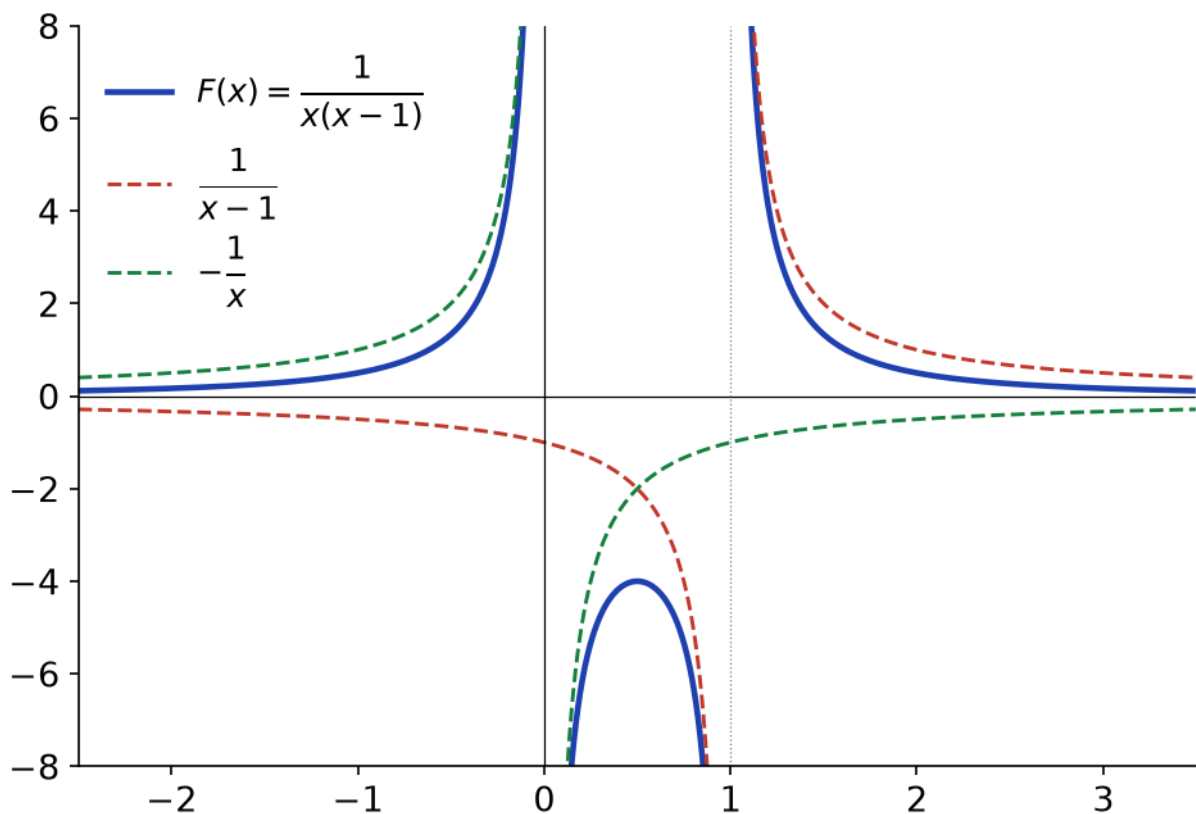
Théorème :

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ irréductible, avec $Q = \prod_{k=1}^r (X - a_k)^{m_k}$. Il existe une unique famille de complexes $\lambda_{k,j}$ telle que

$$F = E + \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{m_k} \frac{\lambda_{k,j}}{(X - a_k)^j},$$

où E est la partie entière de F . La somme intérieure est la **partie polaire** relative au pôle a_k .

La figure ci-dessous montre la décomposition $\frac{1}{X(X-1)} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X}$. Près de chaque pôle, la courbe de F suit celle de l'élément simple correspondant.



2. Calcul des coefficients

Proposition :

Si a est un **pôle simple** de $F = \frac{P}{Q}$, le coefficient de $\frac{1}{X-a}$ vaut

$$\lambda = \frac{P(a)}{Q_1(a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}, \text{ où } Q = (X - a)Q_1.$$

Démonstration :

On écrit $F = \frac{\lambda}{X-a} + G$, où a n'est pas pôle de G . En multipliant par $X - a$, on obtient $\frac{P}{Q_1} = \lambda + (X - a)G$. On évalue alors en a : $\lambda = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$. Enfin, en dérivant

$Q = (X - a)Q_1$, on trouve $Q'(a) = Q_1(a)$.

Exemple :

Décomposons $F = \frac{1}{X^n - 1}$. Ses pôles sont les ω_k , tous simples. Comme $Q' = nX^{n-1}$ et $\omega_k^n = 1$, on trouve $\lambda_k = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n}$. Ainsi :

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{X - \omega_k}.$$

Méthode :

Pour un **pôle multiple** a d'ordre m , on obtient le coefficient de $\frac{1}{(X - a)^m}$ en multipliant par $(X - a)^m$ puis en évaluant en a . Pour les autres coefficients, plusieurs outils existent. On peut évaluer en quelques points, utiliser la limite de $x F(x)$ en $+\infty$, exploiter une parité, ou poser $Y = X - a$ et effectuer une division suivant les puissances croissantes.

Exemple :

Soit $F = \frac{1}{(X - 1)^2(X + 1)}$. En -1 , pôle simple : $\lambda = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$. En 1 , on multiplie par $(X - 1)^2$: le coefficient de $\frac{1}{(X - 1)^2}$ vaut $\frac{1}{2}$. Enfin, $x F(x) \rightarrow 0$ donne $\mu + \frac{1}{4} = 0$ pour le coefficient μ de $\frac{1}{X - 1}$. Donc

$$F = \frac{1}{4(X + 1)} - \frac{1}{4(X - 1)} + \frac{1}{2(X - 1)^2}.$$

3. Décomposition sur $\mathbb{R}$

Théorème :

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ irréductible, de dénominateur factorisé dans $\mathbb{R}[X]$. Alors F est la somme de sa partie entière, de termes $\frac{\lambda}{(X - \alpha)^j}$ pour les pôles réels, et de termes

$$\frac{\alpha X + \beta}{(X^2 + pX + q)^j}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

pour chaque facteur irréductible de degré 2, avec j allant jusqu'à sa multiplicité. Cette écriture est unique.

En pratique, on décompose d'abord sur $\mathbb{C}$. Ensuite, on regroupe les termes associés à deux pôles conjugués. En effet, les coefficients de deux pôles conjugués sont eux-mêmes conjugués, par unicité de la décomposition.

Exemple :

Pour $n = 3$, on a $\frac{j}{X-j} + \frac{\bar{j}}{X-\bar{j}} = \frac{(j+\bar{j})X - 2|j|^2}{X^2 + X + 1} = \frac{-X-2}{X^2 + X + 1}$. On en déduit

$$\frac{1}{X^3 - 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X-1} - \frac{X+2}{X^2 + X + 1} \right).$$

4. Décomposition de P'/P

Proposition :

Si P est scindé, de racines distinctes $a_1, \dots, a_r$ de multiplicités $m_1, \dots, m_r$, alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^r \frac{m_k}{X - a_k}.$$

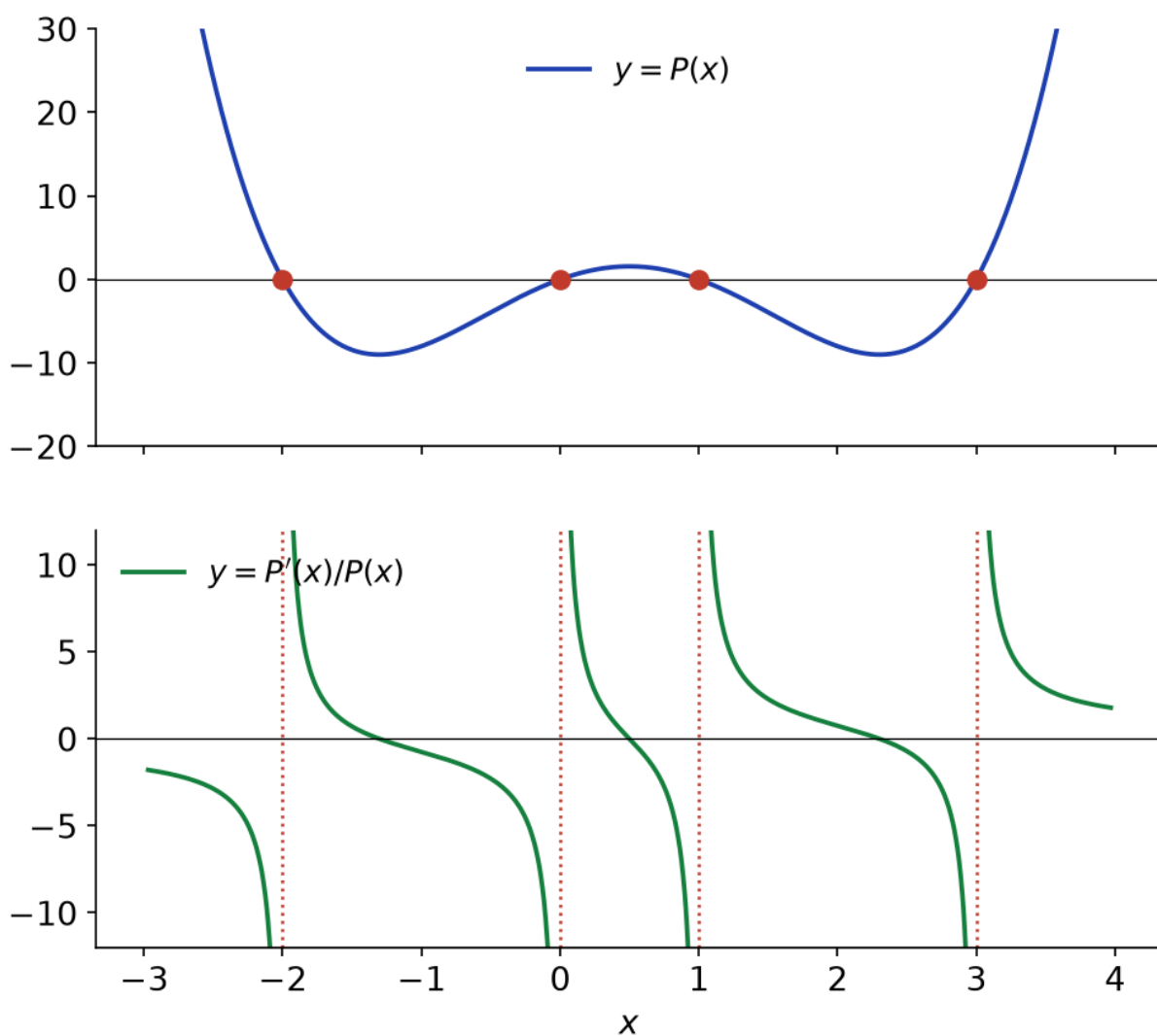
Démonstration :

Écrivons $P = \lambda \prod_k (X - a_k)^{m_k}$. La dérivée d'un produit donne

$$P' = \sum_k m_k (X - a_k)^{m_k - 1} \lambda \prod_{j \neq k} (X - a_j)^{m_j}.$$

On divise alors terme à terme par P .

Cette formule transforme une somme sur les racines en un calcul sur les coefficients. Par exemple, si P est scindé à racines simples et $P(x) \neq 0$, alors $\sum_k \frac{1}{x - a_k} = \frac{P'(x)}{P(x)}$. La figure ci-dessous montre qu'un pôle simple de résidu 1 apparaît en chaque racine de P .



VI. Applications : primitives et dérivées successives

1. Primitives des fractions rationnelles

La décomposition ramène le calcul d'une primitive à celui des éléments simples. D'abord, $\frac{1}{x-a}$ a pour primitive $\ln|x-a|$ sur un intervalle sans pôle. Ensuite, pour $j \geq 2$, $\frac{1}{(x-a)^j}$ a pour primitive $\frac{-1}{(j-1)(x-a)^{j-1}}$.

Méthode :

Pour intégrer $\frac{\alpha x + \beta}{x^2 + px + q}$ avec $p^2 - 4q < 0$, on écrit d'abord le numérateur comme $\frac{\alpha}{2}(2x + p) + c$. Le premier morceau s'intègre en $\frac{\alpha}{2}\ln(x^2 + px + q)$. Pour le second, on met le trinôme sous forme canonique $(x + \frac{p}{2})^2 + b^2$. On utilise alors

$$\int \frac{dx}{(x + \frac{p}{2})^2 + b^2} = \frac{1}{b} \arctan \frac{x + p/2}{b}.$$

Exemple :

Sur $]1, +\infty[$, la décomposition du V.3 donne une primitive de $\frac{1}{x^3 - 1}$:

$$\frac{1}{3}\ln(x - 1) - \frac{1}{6}\ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}.$$

En effet, $\frac{x + 2}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}.$

2. Dérivées k-ièmes

Un élément simple se dérive sans effort : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{x - a} \right) = \frac{(-1)^k k!}{(x - a)^{k+1}}.$$

Par conséquent, on obtient la dérivée k -ième d'une fraction rationnelle en dérivant sa décomposition terme à terme.

Exemple :

Comme $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right)$, on a pour tout $x \notin \{-1, 1\}$:

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right) = \frac{(-1)^k k!}{2} \left(\frac{1}{(x - 1)^{k+1}} - \frac{1}{(x + 1)^{k+1}} \right).$$

Remarque :

Pour $\frac{1}{x^2+1}$, on passe par la décomposition sur $\mathbb{C}$: $\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right)$. La formule reste valable pour a complexe, car on dérive une fonction de variable réelle à valeurs complexes.

Ce qu'il faut retenir

- L'algorithme d'Euclide calcule $A \wedge B$; en remontant les divisions, on obtient une relation de Bézout $AU + BV = A \wedge B$.
- A et B sont premiers entre eux si et seulement si $AU + BV = 1$ a une solution, si et seulement s'ils n'ont aucune racine complexe commune.
- Lemme de Gauss : si $A \mid BC$ et $A \wedge B = 1$, alors $A \mid C$; des diviseurs premiers entre eux deux à deux ont un produit qui divise.
- Pour A et B unitaires, $(A \wedge B)(A \vee B) = AB$.
- D'Alembert-Gauss : tout polynôme complexe non constant est scindé ; les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont de degré 1.
- Les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont de degré 1, ou de degré 2 à discriminant strictement négatif ; on les obtient en regroupant les racines conjuguées.
- Une fraction se lit sous forme irréductible : partie entière par division euclidienne, pôles et zéros avec leurs multiplicités.
- Pôle simple : coefficient $\frac{P(a)}{Q'(a)}$; pôle multiple : multiplication par $(X-a)^m$, évaluations et limite de $x F(x)$.
- $\frac{P'}{P} = \sum \frac{m_k}{X-a_k}$ transforme les sommes sur les racines en calculs sur P .
- La décomposition en éléments simples donne primitives et dérivées k -ièmes des fractions rationnelles.

Questions fréquentes sur fractions rationnelles

Comment savoir rapidement si deux polynômes sont premiers entre eux ?

Deux polynômes sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont aucune racine complexe commune. C'est souvent le plus rapide quand les racines sont connues. Sinon, on cherche une relation $AU + BV = 1$, par exemple par l'algorithme d'Euclide.

Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?

Ce sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif. Un polynôme réel de degré au moins 3 a toujours un facteur de degré 1 ou 2, grâce au théorème de d'Alembert-Gauss et au regroupement des racines conjuguées.

Comment trouver vite le coefficient d'un pôle simple ?

Si a est un pôle simple de $F = P/Q$, le coefficient de $\frac{1}{X-a}$ vaut $\frac{P(a)}{Q'(a)}$. On peut aussi multiplier F par $X - a$ puis évaluer en a . La formule avec Q' est très efficace quand Q est de la forme $X^n - 1$.

Faut-il toujours calculer la partie entière avant la décomposition ?

Oui dès que le degré de la fraction est positif ou nul : la partie entière est le quotient de la division euclidienne du numérateur par le dénominateur. Si le degré est strictement négatif, elle est nulle et on passe directement aux parties polaires.

Pour aller plus loin en maths sup

- Les énoncés : [exercices de maths sup sur fractions rationnelles](#)
- À maîtriser avant : [Polynômes : division euclidienne, racines, interpolation](#), [Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs](#)
- Chapitre précédent : [Polynômes : division euclidienne, racines, interpolation](#)

- Chapitre suivant : [Relations de comparaison : domination, équivalents](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)