

Fractions rationnelles

Corrigé de l'exercice 1 : PGCD par l'algorithme d'Euclide

1. On divise d'abord A par B . Le quotient commence par X , et

$$XB = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X. \text{ Il reste } A - XB = -X^3 + 0X^2 + 0X + 1.$$

Ensuite, on ajoute B : $-X^3 + 1 + B = 2X^2 + 2X + 2$. Ainsi,

$$A = (X - 1)B + 2(X^2 + X + 1).$$

On divise ensuite B par ce reste. Or

$(X^2 + X + 1)(X + 1) = X^3 + 2X^2 + 2X + 1 = B$, donc le reste suivant est nul. Le dernier reste non nul est $2(X^2 + X + 1)$, que l'on rend unitaire. **Donc**

$$A \wedge B = X^2 + X + 1.$$

2. La première division donne directement $2(X^2 + X + 1) = A - (X - 1)B$. En divisant par 2, on obtient une relation de Bézout. **On peut prendre** $U = \frac{1}{2}$ **et** $V = -\frac{1}{2}(X - 1)$.

3. On a déjà $B = (X + 1)(X^2 + X + 1)$. De plus,

$(X^2 + 1)(X^2 + X + 1) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 = A$. Les trinômes $X^2 + 1$ et $X^2 + X + 1$ ont des discriminants -4 et -3 , donc ils sont irréductibles sur $\mathbb{R}$. Dans $\mathbb{C}[X]$, avec $j = e^{2i\pi/3}$, on obtient

$$A = (X - i)(X + i)(X - j)(X - \bar{j}), \quad B = (X + 1)(X - j)(X - \bar{j}).$$

Les racines communes sont j et $\bar{j}$, toutes simples. **On retrouve**

$$A \wedge B = (X - j)(X - \bar{j}) = X^2 + X + 1.$$

Corrigé de l'exercice 2 : Relation de Bézout et ses solutions

1. La seule racine de A est 1 , et les racines de B sont i et $-i$. Ces polynômes n'ont donc

aucune racine complexe commune. **Par conséquent, A et B sont premiers entre eux.**

2. On applique l'algorithme d'Euclide. D'abord, $A = X^2 - 2X + 1$, donc $B = 1 \cdot A + 2X$. Ensuite, $A = 2X \cdot \left(\frac{X}{2} - 1\right) + 1$. On remonte alors les calculs :

$$1 = A - 2X\left(\frac{X}{2} - 1\right) = A - (B - A)\left(\frac{X}{2} - 1\right) = A \cdot \frac{X}{2} - B\left(\frac{X}{2} - 1\right).$$

Vérifions : $\frac{X}{2}(X^2 - 2X + 1) - (X^2 + 1)\left(\frac{X}{2} - 1\right)$ vaut

$$\frac{X^3}{2} - X^2 + \frac{X}{2} - \frac{X^3}{2} + X^2 - \frac{X}{2} + 1 = 1. \text{ Ainsi, } U_0 = \frac{X}{2} \text{ et } V_0 = 1 - \frac{X}{2}.$$

3. Soit (U, V) une solution. En soustrayant, on a $A(U - U_0) = B(V_0 - V)$. Donc A divise $B(V_0 - V)$. Comme $A \wedge B = 1$, le lemme de Gauss donne $A \mid V_0 - V$. On écrit alors $V = V_0 - AW$ avec $W \in \mathbb{R}[X]$. En reportant, $A(U - U_0) = ABW$, et comme $A \neq 0$, $U = U_0 + BW$. Réciproquement, ces couples conviennent, car

$$A(U_0 + BW) + B(V_0 - AW) = AU_0 + BV_0 = 1. \text{ Les solutions sont les}$$

couples $\left(\frac{X}{2} + (X^2 + 1)W, 1 - \frac{X}{2} - (X - 1)^2 W \right)$, avec $W \in \mathbb{R}[X]$.

4. Si $W \neq 0$, alors $\deg(BW) \geq 2$ et $\deg U_0 = 1$, donc $\deg U \geq 2$. Ainsi, la condition $\deg U < 2$ impose $W = 0$. Dans ce cas, $V = 1 - \frac{X}{2}$ est bien de degré 1. **Le couple $\left(\frac{X}{2}, 1 - \frac{X}{2}\right)$ est donc l'unique solution de degrés strictement inférieurs à 2.**

Point de méthode : pour résoudre $AU + BV = 1$, on cherche une solution particulière par Euclide, puis on applique le lemme de Gauss à la différence de deux solutions, exactement comme pour l'équation $au + bv = 1$ dans $\mathbb{Z}$.

Corrigé de l'exercice 3 : Un polynôme et sa dérivée

1. D'après le cours, P et P' sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont aucune racine complexe commune. Or une racine commune a vérifie $P(a) = P'(a) = 0$. Autrement dit, c'est une racine de P de multiplicité au moins 2. Réciproquement, une racine multiple de P annule P' . **Donc $P \wedge P' = 1$ si et seulement si toutes les racines de P sont simples.**
2. La dérivée de $X^n - 1$ est nX^{n-1} , dont la seule racine éventuelle est 0 . Or 0 n'est pas

racine de $X^n - 1$. Ainsi, ces polynômes n'ont aucune racine commune. **Donc $X^n - 1$ et $X^m - 1$ sont premiers entre eux, et les racines n -ièmes de l'unité sont simples.**

3. On a $P(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ et $P' = 3X^2 - 3 = 3(X - 1)(X + 1)$. Par division, on obtient $P = (X - 1)(X^2 + X - 2) = (X - 1)^2(X + 2)$. Les racines communes à P et P' sont donc réduites à 1, car $P(-1) = 4 \neq 0$. De plus, 1 est racine simple de P' . Le PGCD unitaire est donc $X - 1$. **Ainsi, $P \wedge P' = X - 1$.**

Corrigé de l'exercice 4 : PGCD de $X^m - 1$ et $X^n - 1$

- Notons C l'ensemble des racines communes de A et B , et $D = \prod_{c \in C} (X - c)$.
D'abord, les $X - c$ sont premiers entre eux deux à deux et divisent A . Donc D divise A , et de même D divise B . Ensuite, soit D_1 un diviseur commun unitaire. Il est scindé dans $\mathbb{C}$, et ses racines sont des racines communes. De plus, elles sont simples dans D_1 , car elles le sont dans A . Par conséquent, D_1 est un produit de facteurs $X - c$ distincts avec $c \in C$, et il divise D . **Donc $A \wedge B = D$.**
- Les racines de $X^4 - 1$ sont $1, -1, i, -i$. Or $1^6 = (-1)^6 = 1$, tandis que $i^6 = (-i)^6 = -1$. Les racines communes sont donc 1 et -1 . Les deux polynômes sont scindés à racines simples (exercice 3). **D'après la question 1,**
 $(X^6 - 1) \wedge (X^4 - 1) = X^2 - 1$.
- D'après le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $um + vn = d$. Si $z^m = z^n = 1$, alors $z \neq 0$ et $z^d = (z^m)^u (z^n)^v = 1$. Réciproquement, si $z^d = 1$, comme d divise m , on a $z^m = (z^d)^{m/d} = 1$, et de même $z^n = 1$. **Ainsi,**
 $z^m = z^n = 1$ équivaut à $z^d = 1$.
- Les polynômes $X^m - 1$ et $X^n - 1$ sont scindés à racines simples. Par la question 3, leurs racines communes sont exactement les racines d -ièmes de l'unité. Le produit des $X - \omega$, pour $\omega^d = 1$, vaut $X^d - 1$. **Par conséquent, $(X^m - 1) \wedge (X^n - 1) = X^m \wedge X^n - 1$.**

Corrigé de l'exercice 5 : PPCM de deux polynômes

1. On factorise directement : $A = X(X^2 - 1) = X(X - 1)(X + 1)$ et $B = X^2(X + 1)$.
Ces facteurs sont tous de degré 1, donc irréductibles.
2. Comme dans $\mathbb{Z}$, le PGCD prend chaque irréductible commun avec le plus petit exposant, et le PPCM avec le plus grand. **Donc** $A \wedge B = X(X + 1)$ **et**
 $A \vee B = X^2(X - 1)(X + 1) = X^4 - X^2$.
3. D'une part, $AB = X^3(X - 1)(X + 1)^2$. D'autre part,
 $X(X + 1) \cdot X^2(X - 1)(X + 1) = X^3(X - 1)(X + 1)^2$. **La relation**
 $(A \wedge B)(A \vee B) = AB$ **est vérifiée, les deux polynômes étant unitaires.**
4. Les multiples communs de A et B sont exactement les multiples de $A \vee B$, de degré 4. Un tel multiple de degré au plus 5 s'écrit donc $(X^4 - X^2)R$ avec $\deg R \leq 1$. **Les polynômes cherchés sont les** $(\alpha X + \beta)(X^4 - X^2)$, **avec** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 6 : Lemme de Gauss et divisibilité

1. Écrivons $C = AC_1$. Alors B divise AC_1 , et $B \wedge A = 1$. Le lemme de Gauss donne $B \mid C_1$, donc $C_1 = BC_2$. **Ainsi, $C = ABC_2$ et AB divise C .**
2. Notons $P = X^{3a} + X^{3b+1} + X^{3c+2}$. Comme $j^3 = 1$, on a
 $P(j) = 1 + j + j^2 = 0$. De même, $\bar{j}^3 = 1$, donc $P(\bar{j}) = 1 + \bar{j} + \bar{j}^2 = 0$. Ainsi,
 $X - j$ et $X - \bar{j}$ divisent P . Ils sont premiers entre eux, car $j \neq \bar{j}$. D'après la question 1, leur produit divise P . **Donc $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \bar{j})$ divise P .**
3. On a $(X^2 + 1 + X)(X^2 + 1 - X) = (X^2 + 1)^2 - X^2 = X^4 + X^2 + 1$. Les racines de $X^2 + X + 1$ sont j et $\bar{j}$. Celles de $X^2 - X + 1$ sont leurs opposées $-j$ et $-\bar{j}$, car $z^2 + z + 1 = 0$ équivaut à $(-z)^2 - (-z) + 1 = 0$. Ces ensembles sont disjoints.
Donc les deux facteurs sont premiers entre eux.
4. On a $Q = X^{3 \cdot 4} + X^{3 \cdot 1 + 1} + X^{3 \cdot 0 + 2}$. Par la question 2, on peut écrire
 $Q(X) = (X^2 + X + 1)S(X)$. En remplaçant X par $-X$, et comme Q est pair, on obtient $Q(X) = (X^2 - X + 1)S(-X)$. Ainsi, $X^2 - X + 1$ divise aussi Q . **Par les questions 1 et 3, $X^4 + X^2 + 1$ divise Q .**

Corrigé de l'exercice 7 : Factorisations classiques

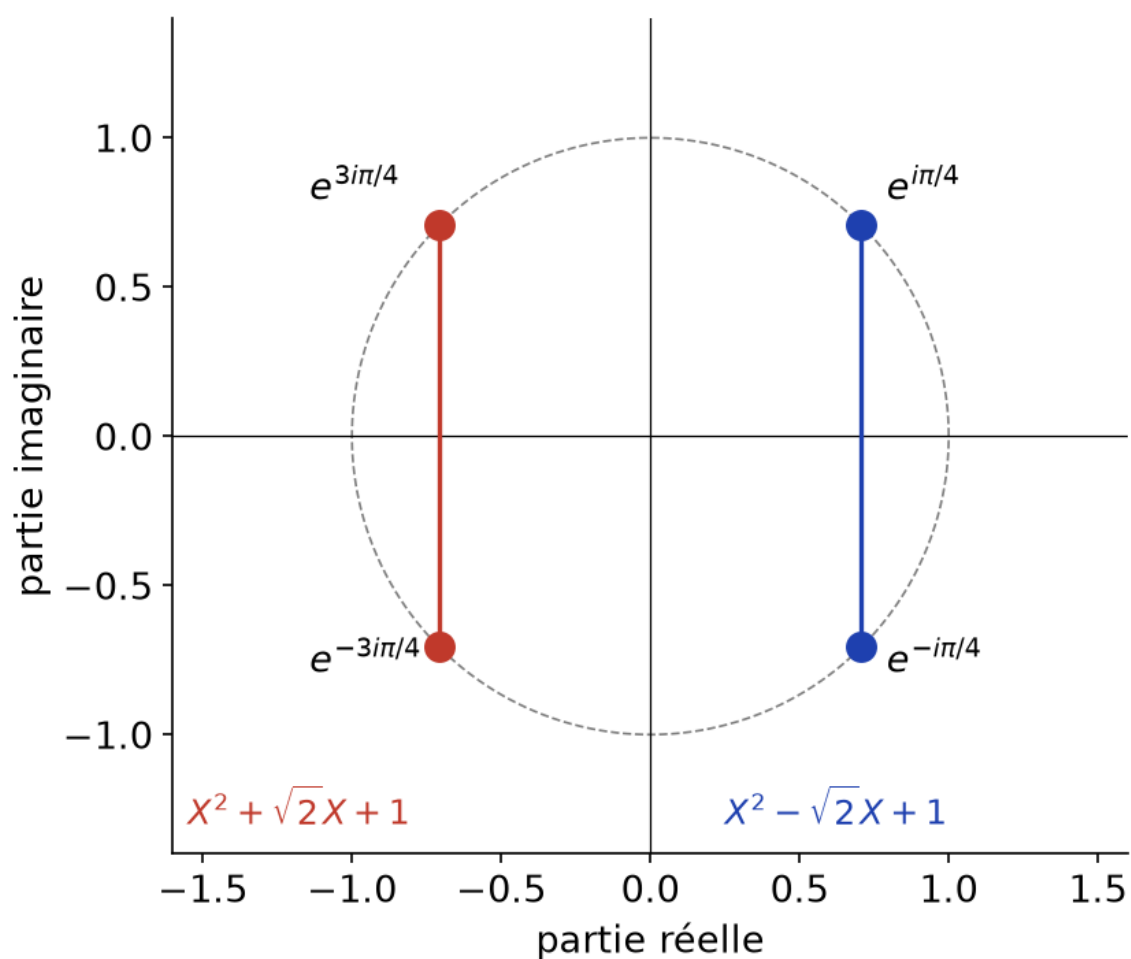
1. Les racines de $X^4 + 1$ sont les z tels que $z^4 = -1 = e^{i\pi}$. Ce sont donc $e^{i\pi/4}$, $e^{3i\pi/4}$, $e^{-3i\pi/4}$ et $e^{-i\pi/4}$. Ainsi,

$$X^4 + 1 = (X - e^{i\pi/4})(X - e^{-i\pi/4})(X - e^{3i\pi/4})(X - e^{-3i\pi/4}).$$

On regroupe ensuite les paires conjuguées, comme le montre la figure ci-dessous. On utilise

$$(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - 2\cos\theta X + 1. \text{ Donc}$$

$$X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \text{ dans } \mathbb{R}[X].$$



2. On a $(X^2 + 1)^2 - 2X^2 = X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2 = X^4 + 1$. C'est une différence de deux carrés, donc $X^4 + 1 = (X^2 + 1 - \sqrt{2}X)(X^2 + 1 + \sqrt{2}X)$. Les deux trinômes ont pour discriminant $2 - 4 = -2 < 0$. **On retrouve la factorisation en irréductibles de la question 1.**
3. De même, $(X^2 + 1)^2 - X^2 = X^4 + X^2 + 1$. Donc

$X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$. Les discriminants valent -3 . **Cette écriture est la factorisation de $X^4 + X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.**

4. Comme -2 est racine, on divise : $X^3 + 8 = (X + 2)(X^2 - 2X + 4)$. Le trinôme a pour discriminant $4 - 16 = -12 < 0$, et ses racines sont $1 \pm i\sqrt{3}$. **Dans $\mathbb{R}[X]$,**
 $X^3 + 8 = (X + 2)(X^2 - 2X + 4)$; **dans $\mathbb{C}[X]$,**
 $X^3 + 8 = (X + 2)(X - 1 - i\sqrt{3})(X - 1 + i\sqrt{3})$.

Corrigé de l'exercice 8 : Factorisation de $X^5 - 1$ et $X^6 + 1$

1. Les racines sont $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$, avec $\omega^4 = \bar{\omega}$ et $\omega^3 = \bar{\omega^2}$. En regroupant les paires conjuguées :

$$X^5 - 1 = (X - 1)\left(X^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5}X + 1\right).$$

Les deux trinômes sont irréductibles, car $|2\cos\theta| < 2$ donne un discriminant $4\cos^2\theta - 4 < 0$.

2. On sait que $X^5 - 1 = (X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$. Par intégrité de $\mathbb{R}[X]$,
 $(X^2 - aX + 1)(X^2 - bX + 1) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. Or le produit de gauche vaut $X^4 - (a + b)X^3 + (2 + ab)X^2 - (a + b)X + 1$. Par identification, $a + b = -1$ et $ab = -1$. Ainsi, a et b sont les racines de $t^2 + t - 1$, à savoir $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Or
 $a = 2\cos\frac{2\pi}{5} > 0$, car $\frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$. Donc $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $b = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **Par conséquent,**
 $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

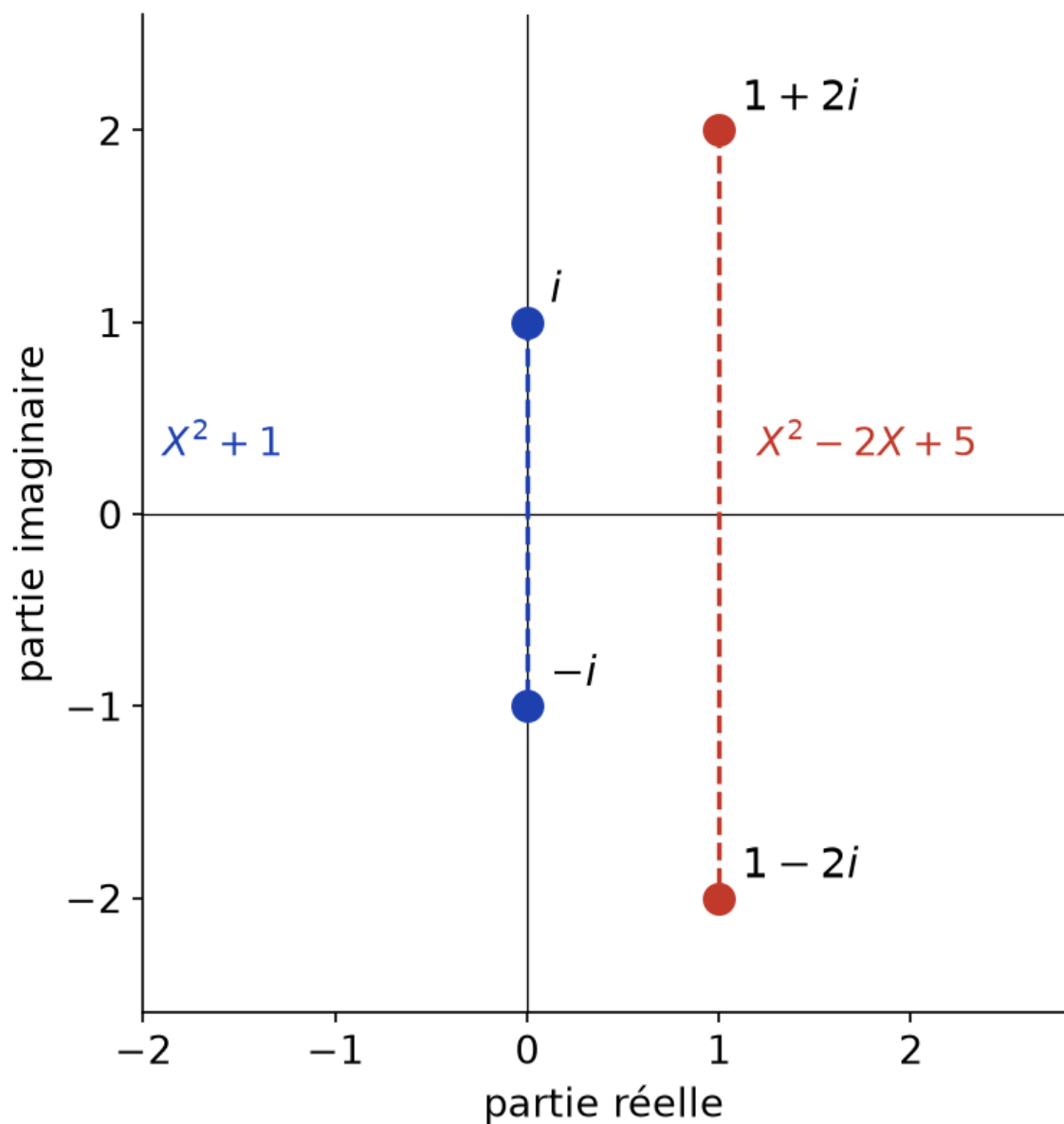
3. On reporte ces valeurs dans la question 1. **On obtient**

$$X^5 - 1 = (X - 1)\left(X^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}X + 1\right)\left(X^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}X + 1\right).$$

4. Les racines de $X^6 + 1$ vérifient $z^6 = e^{i\pi}$. Ce sont donc les $e^{i(2k+1)\pi/6}$, pour $0 \leq k \leq 5$. Les paires conjuguées correspondent aux angles $\pm\frac{\pi}{6}$, $\pm\frac{\pi}{2}$ et $\pm\frac{5\pi}{6}$. Or
 $2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $2\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $2\cos\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$. Vérifions enfin :
 $(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1) = X^4 - X^2 + 1$, et
 $(X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1) = X^6 + 1$. **Donc**
 $X^6 + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$.

Corrigé de l'exercice 9 : Factorisation à partir d'une racine complexe

1. On a $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ et $i^4 = 1$. Donc $P(i) = 1 + 2i - 6 - 2i + 5 = 0$. Comme P est à coefficients réels, $P(-i) = P(\bar{i}) = \overline{P(i)}$. Ainsi, $P(i) = 0$ et $P(-i) = 0$.
2. Les polynômes $X - i$ et $X + i$ divisent P et sont premiers entre eux. Leur produit $X^2 + 1$ divise donc P . La division euclidienne donne ensuite le quotient. En effet, $(X^2 + 1)(X^2 - 2X + 5) = X^4 - 2X^3 + 5X^2 + X^2 - 2X + 5 = P$. **Le quotient est $X^2 - 2X + 5$.**
3. Le discriminant de $X^2 - 2X + 5$ vaut $4 - 20 = -16$. Ses racines sont donc $1 \pm 2i$, et il est irréductible sur $\mathbb{R}$. La figure ci-dessous place les quatre racines de P , par paires conjuguées. **Dans $\mathbb{R}[X]$, $P = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 5)$. Dans $\mathbb{C}[X]$, $P = (X - i)(X + i)(X - 1 - 2i)(X - 1 + 2i)$.**



Corrigé de l'exercice 10 : Polynômes réels positifs

- Notons $d = \deg P$ et a_d son coefficient dominant. Quand $x \rightarrow +\infty$, $P(x)$ a le signe de a_d , car $P(x) = a_d x^d (1 + o(1))$. Comme $P \geq 0$ et $a_d \neq 0$, on obtient $a_d > 0$. Soit ensuite a une racine réelle de multiplicité m . On écrit $P = (X - a)^m R$ avec $R(a) \neq 0$. Par continuité, R garde un signe constant au voisinage de a . Si m était impair, $(x - a)^m$ changerait de signe en a , donc P aussi : c'est absurde. **Ainsi, $a_d > 0$ et toute racine réelle est de multiplicité paire.**

2. Les racines non réelles vont par paires conjuguées de même multiplicité. On note $z_1, \dots, z_s$ celles de partie imaginaire strictement positive, de multiplicités $n_1, \dots, n_s$. Les racines réelles a_k ont des multiplicités $2\mu_k$. On pose alors $c = a_d$, $S = \prod_k (X - a_k)^{\mu_k}$ et $T = \prod_j (X - z_j)^{n_j}$. Dans ce cas, $\bar{T} = \prod_j (X - \bar{z}_j)^{n_j}$. **La factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ s'écrit alors $P = c S^2 T \bar{T}$, avec $c > 0$ et S réel.**
3. Écrivons $T = A + iB$, où A et B sont les polynômes réels formés des parties réelles et imaginaires des coefficients. Alors $\bar{T} = A - iB$, donc $T\bar{T} = A^2 + B^2$. Par conséquent, $P = c S^2 (A^2 + B^2)$. **Ainsi, $P = (\sqrt{c} SA)^2 + (\sqrt{c} SB)^2$ est une somme de deux carrés de polynômes réels.**
4. Pour $X^4 + 1$, on a $c = 1$, $S = 1$ et $T = (X - e^{i\pi/4})(X - e^{3i\pi/4})$. La somme de ces racines vaut $i\sqrt{2}$, et leur produit $e^{i\pi} = -1$. Donc $T = X^2 - i\sqrt{2}X - 1$, puis $A = X^2 - 1$ et $B = -\sqrt{2}X$. Vérifions : $(X^2 - 1)^2 + 2X^2 = X^4 + 1$. **Ainsi, $X^4 + 1 = (X^2 - 1)^2 + (\sqrt{2}X)^2$.**

Corrigé de l'exercice 11 : Forme irréductible, degré et partie entière

1. D'abord, $X^3 - 3X + 2 = (X - 1)^2(X + 2)$, car 1 est racine double (exercice 3). Ensuite, $X^3 - X^2 - X + 1 = X^2(X - 1) - (X - 1) = (X - 1)^2(X + 1)$. On simplifie par $(X - 1)^2$: $F = \frac{X+2}{X+1}$, avec $X + 2$ et $X + 1$ premiers entre eux. Le degré vaut $1 - 1 = 0$. De plus, $F = 1 + \frac{1}{X+1}$, donc la partie entière est 1. **Ainsi, $F = \frac{X+2}{X+1}$, de degré 0 et de partie entière 1, avec un zéro simple -2 et un pôle simple -1. Le réel 1 n'est ni zéro ni pôle.**
2. On effectue la division de $2X^4 + X^3 + 1$ par $X^2 + 1$. Le quotient est $2X^2 + X - 2$ et le reste $-X + 3$. En effet, $(2X^2 + X - 2)(X^2 + 1) = 2X^4 + X^3 + X - 2$, et on ajoute $3 - X$. **Donc $G = 2X^2 + X - 2 + \frac{3-X}{X^2+1}$, de partie entière $E = 2X^2 + X - 2$.**
3. Les racines de $X^2 + 1$ sont $\pm i$. Or $3 - i \neq 0$ et $3 + i \neq 0$, donc le numérateur ne s'annule pas en $\pm i$, et la forme est irréductible. Enfin, $G(x) - E(x) = \frac{3-x}{x^2+1}$ est de degré -1. **Les pôles de G sont i et $-i$, simples, et $G(x) - E(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.**

Corrigé de l'exercice 12 : Éléments simples, pôles simples

1. Le degré de F est -1 , donc sa partie entière est nulle. Les pôles 0 , 1 et -2 sont simples. On multiplie par chaque facteur, puis on évalue. En 0 : $\frac{0+1}{(0-1)(0+2)} = -\frac{1}{2}$. En 1 : $\frac{2}{1 \cdot 3} = \frac{2}{3}$. En -2 : $\frac{5}{(-2)(-3)} = \frac{5}{6}$. Contrôle en $X = -1$: $F(-1) = 1$, et $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = 1$. **Donc** $F = -\frac{1}{2X} + \frac{2}{3(X-1)} + \frac{5}{6(X+2)}$.
2. Ici $\deg G = 1$. La division de X^3 par $X^2 - 3X + 2$ donne le quotient $X + 3$ et le reste $7X - 6$. Pour les pôles simples : en 1 , $\frac{1^3}{1-2} = -1$; en 2 , $\frac{2^3}{2-1} = 8$. Vérifions : $-\frac{1}{X-1} + \frac{8}{X-2} = \frac{7X-6}{(X-1)(X-2)}$. **Donc** $G = X + 3 - \frac{1}{X-1} + \frac{8}{X-2}$.
3. Les pôles ± 2 sont simples. En 2 , le coefficient vaut $\frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$, et en -2 , il vaut $\frac{1}{-2-2} = -\frac{1}{4}$. Donc $H = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{X-2} - \frac{1}{X+2} \right)$. Sur $]2, +\infty[$, les deux quantités $x-2$ et $x+2$ sont positives. **Une primitive est** $x \rightarrow \frac{1}{4} \ln \frac{x-2}{x+2}$.

Corrigé de l'exercice 13 : Éléments simples, pôles multiples

1. La décomposition a la forme $\frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta}{X-1} + \frac{\gamma}{(X-1)^2}$, sans partie entière. Pour le pôle simple -1 : $\alpha = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$. On multiplie ensuite par $(X-1)^2$ et on évalue en 1 : $\gamma = \frac{1}{2}$. Enfin, $x F(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$, donc $\alpha + \beta = 0$ et $\beta = -\frac{1}{4}$. Contrôle en 0 : $F(0) = 1$ et $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$. **Donc** $F = \frac{1}{4(X+1)} - \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{2(X-1)^2}$.
2. Avec $Y = X - 1$, on a $X^2 = (Y+1)^2 = Y^2 + 2Y + 1$. Donc $G = \frac{Y^2 + 2Y + 1}{Y^3} = \frac{1}{Y} + \frac{2}{Y^2} + \frac{1}{Y^3}$. **Ainsi**, $G = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X-1)^3}$.
3. On cherche $H = \frac{a}{X^2} + \frac{b}{X} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{X-1}$. D'abord, en multipliant par X^2 et en évaluant en 0 : $a = \frac{1}{1} = 1$. De même, en 1 : $c = \frac{2}{1} = 2$. Ensuite, $x H(x) \rightarrow 0$ donne $b + d = 0$. Enfin, $H(-1) = 0$ donne $a - b + \frac{c}{4} - \frac{d}{2} = 0$. Avec $d = -b$, on

obtient $\frac{3}{2} - \frac{b}{2} = 0$, donc $b = 3$ et $d = -3$. Contrôle en 2 : $H(2) = \frac{3}{4}$, et $\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 2 - 3 = \frac{3}{4}$. **Donc** $H = \frac{1}{X^2} + \frac{3}{X} + \frac{2}{(X-1)^2} - \frac{3}{X-1}$.

Point de méthode : après une décomposition, un contrôle en un point non utilisé coûte quelques secondes et détecte presque toutes les erreurs de calcul.

Corrigé de l'exercice 14 : Décomposition sur C puis sur R

1. Les pôles $1, j, j^2$ sont simples, et la partie entière est nulle. Le coefficient en ω vaut

$$\frac{1}{3\omega^2} = \frac{\omega}{3}, \text{ car } \omega^3 = 1. \text{ **Donc** } \frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X-1} + \frac{j}{X-j} + \frac{j^2}{X-j^2} \right).$$

2. On a $j^2 = \bar{j}$, $j + \bar{j} = -1$ et $|j|^2 = 1$. Donc

$$\frac{j}{X-j} + \frac{\bar{j}}{X-\bar{j}} = \frac{(j + \bar{j})X - 2j\bar{j}}{X^2 + X + 1} = \frac{-X - 2}{X^2 + X + 1}.$$

Contrôle : $(X^2 + X + 1) - (X + 2)(X - 1) = 3$. **Donc**

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{3(X-1)} - \frac{X+2}{3(X^2+X+1)}.$$

3. Les pôles de $\frac{X}{X^4-1}$ sont $1, -1, i, -i$, simples. Le coefficient en α vaut $\frac{\alpha}{4\alpha^3} = \frac{1}{4\alpha^2}$. Il vaut donc $\frac{1}{4}$ en ± 1 et $-\frac{1}{4}$ en $\pm i$. Dans $\mathbb{C}(X)$:

$$\frac{X}{X^4-1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i} \right).$$

Ensuite, $\frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i} = \frac{2X}{X^2+1}$. **Donc, dans** $\mathbb{R}(X)$,

$$\frac{X}{X^4-1} = \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{4(X+1)} - \frac{X}{2(X^2+1)}.$$

Corrigé de l'exercice 15 : Facteur irréductible au carré

1. Le degré de F vaut -5 , donc la partie entière est nulle. De plus, X et $X^2 + 1$ sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, avec des multiplicités 1 et 2. **La décomposition a donc la forme**
 $\frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+1} + \frac{dX+e}{(X^2+1)^2}$, **avec des coefficients réels.**

2. Le pôle 0 est simple, donc $a = \frac{1}{(0+1)^2} = 1$. Ensuite,

$$F - \frac{1}{X} = \frac{1 - (X^2 + 1)^2}{X(X^2 + 1)^2} = \frac{-X^4 - 2X^2}{X(X^2 + 1)^2} = -\frac{X(X^2 + 2)}{(X^2 + 1)^2}.$$

Or $X^2 + 2 = (X^2 + 1) + 1$, donc $F - \frac{1}{X} = -\frac{X}{X^2+1} - \frac{X}{(X^2+1)^2}$. **Ainsi,**

$$F = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1} - \frac{X}{(X^2+1)^2}.$$

3. Sur $]0, +\infty[$, $\frac{1}{x}$ a pour primitive $\ln x$. Ensuite, $\frac{x}{x^2+1}$ a pour primitive $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$. Enfin, la dérivée de $\frac{1}{x^2+1}$ vaut $\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$. Par conséquent, $-\frac{x}{(x^2+1)^2}$ a pour primitive $\frac{1}{2(x^2+1)}$. **Une primitive est** $x \rightarrow \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)}$.

Corrigé de l'exercice 16 : Calcul d'une intégrale

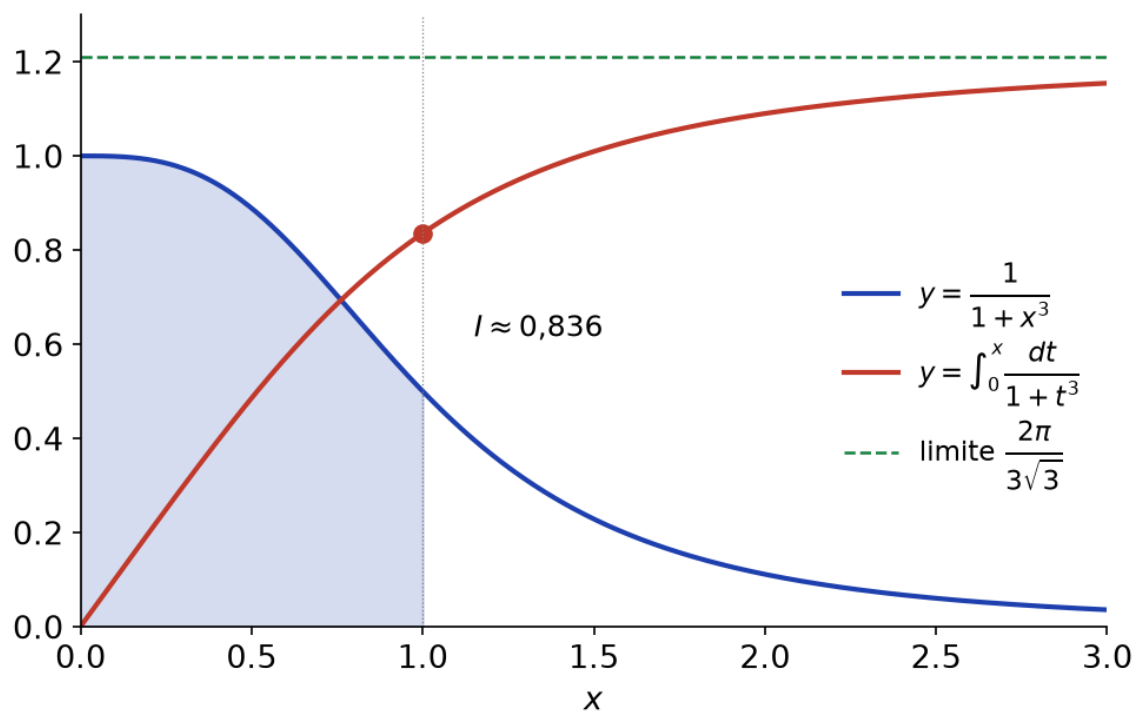
1. On a $X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$, et le trinôme a pour discriminant -3 . La décomposition s'écrit donc $\frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta X + \gamma}{X^2 - X + 1}$. En -1 : $\alpha = \frac{1}{3}$, puisque $Q'(-1) = 3$. Ensuite, $xF(x) \rightarrow 0$ donne $\alpha + \beta = 0$, donc $\beta = -\frac{1}{3}$. En $X = 0$: $1 = \alpha + \gamma$, donc $\gamma = \frac{2}{3}$. Contrôle : $(X^2 - X + 1) + (X + 1)(2 - X) = 3$. **Donc**
 $\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{3(X+1)} + \frac{-X+2}{3(X^2-X+1)}.$

2. On écrit $-x + 2 = -\frac{1}{2}(2x - 1) + \frac{3}{2}$. De plus, $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Ainsi,
 $\int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. En regroupant, avec le facteur $\frac{1}{3}$: **une primitive sur**
 $] -1, +\infty[$ **est** $\Phi(x) = \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

3. On a $\Phi(1) = \frac{\ln 2}{3} - 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6}$ et $\Phi(0) = 0 - 0 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6}$. Par différence, on obtient la valeur.

La figure ci-dessous représente l'aire obtenue et la fonction $x \rightarrow \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$. **Donc**

$$I = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0,836.$$



4. D'abord, $\frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}$. Cette quantité tend vers $\frac{1}{6}\ln 1 = 0$. Ensuite, le terme en arctangente tend vers $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. Ainsi,
- $$\int_0^x \frac{dt}{1+t^3} = \Phi(x) - \Phi(0) \text{ tend vers } \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}. \text{ La limite vaut } \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \approx 1,209.$$

Corrigé de l'exercice 17 : Dérivées k-ièmes

- On a $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$, les coefficients valant $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. Par récurrence immédiate, $\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{(x-a)^{k+1}}$. **Donc**

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{2} \left(\frac{1}{(x-1)^{k+1}} - \frac{1}{(x+1)^{k+1}} \right).$$
- En $x = 0$, on trouve $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^k k!}{2} \left((-1)^{k+1} - 1 \right) = \frac{k!}{2} \left(-1 - (-1)^k \right)$. Si k est pair, cela vaut $-k!$, et si k est impair, cela vaut 0 . Contrôle : $f(0) = -1$. Ensuite, $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$, donc $f'(0) = 0$. Enfin, $f''(0)$ est la dérivée en 0 de f' , soit

$\lim \frac{-2}{(x^2-1)^2} = -2$. Ainsi, $f^{(k)}(0) = -k!$ si k est pair, et 0 sinon.

3. On a $\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} = \frac{2i}{x^2+1}$, donc $g(x) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right)$. En dérivant k fois :

$$g^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{2i} \left(\frac{1}{(x-i)^{k+1}} - \frac{1}{(x+i)^{k+1}} \right).$$

Pour x réel, les deux termes sont conjugués, et $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$. Donc

$$g^{(k)}(x) = (-1)^k k! \operatorname{Im} \frac{1}{(x-i)^{k+1}}. \text{ En } 0, \text{ comme } \frac{1}{-i} = i, \text{ on a}$$

$$\frac{1}{(-i)^{k+1}} = i^{k+1} = e^{i(k+1)\pi/2}. \text{ Donc } g^{(k)}(0) = (-1)^k k! \sin \frac{(k+1)\pi}{2}.$$

4. On a $(1-x^2+x^4)(1+x^2) = 1+x^6$. Donc $1-x^2+x^4 = g(x) + x^6 g(x)$, ce qui donne l'égalité voulue. Par la formule de Leibniz,

$$(x^6 g)^{(k)}(0) = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (x^6)^{(p)}(0) g^{(k-p)}(0). \text{ Or, pour } p \leq 5, (x^6)^{(p)} \text{ s'annule en}$$

0 . Ainsi, pour $k \leq 4$, $g^{(k)}(0)$ est la dérivée k -ième en 0 de $1-x^2+x^4$. On obtient $1, 0, -2, 0, 24$. La formule de la question 3 donne $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, puis $-\sin \pi = 0$,

$2\sin \frac{3\pi}{2} = -2$, $-6\sin 2\pi = 0$ et $24\sin \frac{5\pi}{2} = 24$. **Les deux méthodes concordent pour $k \leq 4$.**

Corrigé de l'exercice 18 : Sommes sur les racines avec P'/P

1. On a $P' = 3X^2 + 1$, de racines $\pm \frac{i}{\sqrt{3}}$. Or $\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^3 = -\frac{i}{3\sqrt{3}}$. Donc

$$P\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right) = 1 + i\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right), \text{ de partie réelle } 1, \text{ donc non nul. Par conjugaison, } P\left(-\frac{i}{\sqrt{3}}\right) \neq 0$$

. Ainsi, P et P' n'ont aucune racine commune. **Les trois racines de P sont donc simples.**

2. D'après le cours, pour un polynôme scindé à racines simples : $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{X - x_k}$.

3. On évalue en 0 , qui n'est pas racine : $\sum_k \frac{1}{0 - x_k} = \frac{P'(0)}{P(0)} = 1$. Donc $\sum_k \frac{1}{x_k} = -1$. Avec

les relations coefficients-racines, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$ et $\sigma_3 = -1$. Or

$$\sum_k \frac{1}{x_k} = \frac{x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2}{x_1 x_2 x_3} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = -1. \text{ Les deux méthodes donnent}$$

$$\sum_k \frac{1}{x_k} = -1.$$

4. En $X = 1$, on a $P(1) = 3$ et $P'(1) = 4$. Donc $\sum_k \frac{1}{1-x_k} = \frac{4}{3}$. Ensuite, on dérive la décomposition : $\left(\frac{P'}{P}\right)' = -\sum_k \frac{1}{(X-x_k)^2}$. Or $\left(\frac{P'}{P}\right)' = \frac{P''P - P'^2}{P^2}$, et $P''(1) = 6$. On en déduit $\sum_k \frac{1}{(1-x_k)^2} = \frac{16-3 \times 6}{9}$. **Donc** $\sum_k \frac{1}{1-x_k} = \frac{4}{3}$ **et** $\sum_k \frac{1}{(1-x_k)^2} = -\frac{2}{9}$. Ce nombre négatif n'a rien d'étonnant : deux des racines ne sont pas réelles.

Corrigé de l'exercice 19 : Sommes sur les racines de l'unité

- Soit $P = X^n - 1$, scindé à racines simples $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$. Alors $\frac{P'}{P} = \sum_k \frac{1}{X - \omega_k}$. On évalue en 2, qui n'est pas racine. **Donc** $S = \frac{P'(2)}{P(2)} = \frac{n 2^{n-1}}{2^n - 1}$. Pour $n = 2$, on retrouve $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.
- On a $X^n - 1 = (X - 1)Q$. Les racines de Q sont donc les racines de $X^n - 1$ autres que 1, soit $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$. Elles sont simples, et Q est unitaire de degré $n - 1$. Ainsi, $\frac{Q'}{Q} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{X - \omega_k}$. En 1, on a $Q(1) = n$ et $Q'(1) = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. **Donc** $T = \frac{n-1}{2}$.
- On factorise par l'angle moitié : $1 - e^{i\theta} = e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}) = -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$. Comme $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$. Donc
$$\frac{1}{1 - e^{i\theta}} = \frac{i e^{-i\theta/2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{i \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}}.$$
 Ainsi, $\frac{1}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \cot \frac{\theta}{2}$.
- Avec $\theta = \frac{2k\pi}{n}$, pour $1 \leq k \leq n-1$, on obtient $T = \frac{n-1}{2} + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \cot \frac{k\pi}{n}$. Or

$T = \frac{n-1}{2}$ est réel. On identifie les parties imaginaires. **Donc** $\sum_{k=1}^{n-1} \cot \frac{k\pi}{n} = 0$. Les parties réelles concordent aussi. Ce résultat se voit d'ailleurs directement, car $\cot \frac{(n-k)\pi}{n} = -\cot \frac{k\pi}{n}$.

Corrigé de l'exercice 20 : La fonction logarithme n'est pas rationnelle

1. Écrivons $F = \frac{P}{Q}$ sous forme irréductible, avec $Q(a) \neq 0$. Alors $F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$. Le dénominateur de la forme irréductible de F' divise Q^2 , qui ne s'annule pas en a . **Donc a n'est pas pôle de F' .**

2. Écrivons $F = \frac{P}{(X-a)^m Q_1}$ avec $P(a) \neq 0$ et $Q_1(a) \neq 0$. On pose $G = \frac{P}{Q_1}$: a n'est pas pôle de G , et $G(a) \neq 0$. Alors

$$F' = \frac{G'}{(X-a)^m} - \frac{mG}{(X-a)^{m+1}} = \frac{H}{(X-a)^{m+1}}, \quad H = (X-a)G' - mG.$$

D'après la question 1, a n'est pas pôle de G' . Donc a n'est pas pôle de H , et $H(a) = -mG(a) \neq 0$. **Par conséquent, a est un pôle d'ordre exactement $m+1$ de F' .**

3. Supposons $F' = \frac{1}{X}$. Alors 0 est un pôle simple de F' . Si 0 n'est pas pôle de F , la question 1 contredit ce fait. Si 0 est un pôle d'ordre $m \geq 1$ de F , la question 2 donne un pôle d'ordre $m+1 \geq 2$ pour F' , ce qui est aussi absurde. **Aucune fraction rationnelle n'a donc pour dérivée $\frac{1}{X}$.**

4. Supposons que $\ln x = \frac{P(x)}{Q(x)}$ pour tout $x \in]\alpha, \beta[$, où Q ne s'annule pas. En dérivant, $\frac{1}{x} = F'(x)$ sur cet intervalle, avec $F = \frac{P}{Q}$. Écrivons alors $F' - \frac{1}{X} = \frac{N}{D}$. Le polynôme N s'annule sur tout l'intervalle, donc en une infinité de points : il est nul. Ainsi, $F' = \frac{1}{X}$, ce qui contredit la question 3. **La fonction $\ln$ ne coïncide donc avec aucune fonction rationnelle sur un intervalle.**

Point de méthode : dériver augmente de 1 l'ordre de chaque pôle ; ainsi, une dérivée de fraction rationnelle n'a jamais de pôle simple.

Corrigé de l'exercice 21 : Problème, une famille de fractions et des sommes télescopiques

1. Le dénominateur est scindé à racines simples $0, -1, \dots, -n$, et le numérateur vaut 1. Le degré de F_n vaut $-(n+1) < 0$. **Les pôles sont $0, -1, \dots, -n$, tous simples, et la partie entière est nulle.**

2. Le coefficient en $-k$ vaut $\frac{1}{\prod_{j \neq k} (j - k)}$, obtenu en multipliant par $X + k$ puis en évaluant en

$-k$. D'une part, $\prod_{j=0}^{k-1} (j - k) = (-k)(-k+1) \dots (-1) = (-1)^k k!$. D'autre part,

$\prod_{j=k+1}^n (j - k) = (n - k)!$. Le coefficient vaut donc $\frac{(-1)^k}{k!(n - k)!} = \frac{(-1)^k}{n!} \binom{n}{k}$. **Ainsi,**

$$F_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{X + k}.$$

3. Pour $n \geq 1$, $\deg F_n \leq -2$, donc $x F_n(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. D'autre part, $\frac{x}{x+k} \rightarrow 1$. En multipliant la décomposition par x et en passant à la limite, on obtient $0 = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$. **Donc** $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

4. D'un côté, $F_n(1) = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} = \frac{1}{(n+1)!}$. De l'autre, la décomposition donne $F_n(1) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k}$. **Donc** $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$.

5. On réduit au même dénominateur $X(X+1) \dots (X+n+1)$:

$$F_n(X) - F_n(X+1) = \frac{(X+n+1) - X}{X(X+1) \dots (X+n+1)}.$$

Donc $F_n(X) - F_n(X+1) = (n+1)F_{n+1}(X)$.

6. Soit $m \geq 1$. La question 5, appliquée avec $n = m-1$, donne

$F_m(p) = \frac{1}{m} (F_{m-1}(p) - F_{m-1}(p+1))$. La somme télescopique :

$$\sum_{p=1}^N F_m(p) = \frac{1}{m} (F_{m-1}(1) - F_{m-1}(N+1)).$$

Or $F_{m-1}(1) = \frac{1}{m!}$, et $F_{m-1}(N+1) \rightarrow 0$ car $\deg F_{m-1} < 0$. **La suite converge**

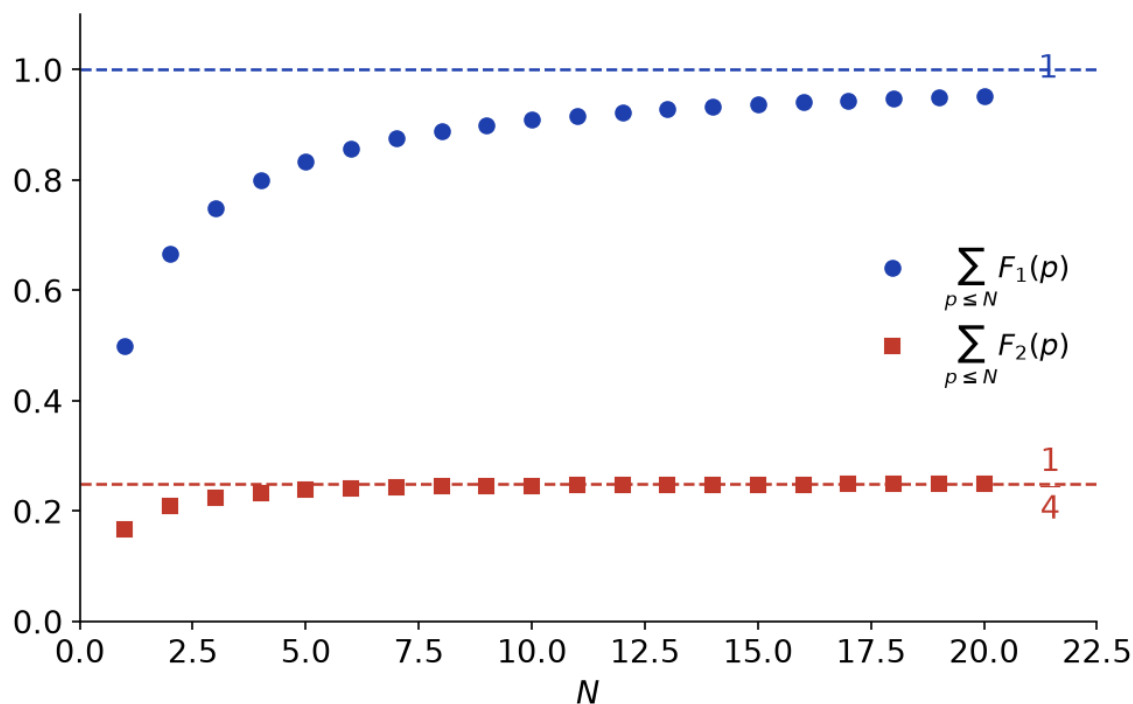
donc, et sa limite vaut $\frac{1}{m \cdot m!}$.

7. Pour $n = 2$, la question 2 donne $F_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X} - \frac{2}{X+1} + \frac{1}{X+2} \right)$. Par la question 6,

$$\sum_{p=1}^N F_2(p) = \frac{1}{2} (F_1(1) - F_1(N+1)), \text{ avec } F_1(1) = \frac{1}{2}. \text{ Contrôle pour } N = 1 :$$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. La figure ci-dessous montre la convergence des sommes partielles vers

1 et $\frac{1}{4}$. **Donc** $\sum_{p=1}^N \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)}$, **de limite** $\frac{1}{4}$.



[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [fractions rationnelles, cours de maths sup](#)

- Les énoncés : [exercices de maths sup sur fractions rationnelles](#)
- À maîtriser avant : [Polynômes : division euclidienne, racines, interpolation](#), [Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs](#)
- Chapitre précédent : [Polynômes : division euclidienne, racines, interpolation](#)
- Chapitre suivant : [Relations de comparaison : domination, équivalents](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)