

Formes quadratiques

Exercice 1 : Matrice d'une forme bilinéaire

Sur $\mathbb{R}^3$, on considère l'application b définie, pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$, par

$$b(x, y) = x_1 y_1 + 2 x_1 y_2 + x_1 y_3 - x_2 y_1 + 3 x_2 y_2 + x_3 y_1 - 2 x_3 y_3.$$

1. Justifier que b est une forme bilinéaire et écrire sa matrice A dans la base canonique. La forme b est-elle symétrique ?
2. Écrire la forme quadratique $q(x) = b(x, x)$ et sa matrice S dans la base canonique. Vérifier que $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$.
3. On pose $e'_1 = (1, 1, 0)$, $e'_2 = (0, 1, 1)$ et $e'_3 = (1, 0, 1)$. Vérifier que c'est une base, puis calculer la matrice de q dans cette base.

Exercice 2 : Forme polaire et vecteur isotrope

Sur $\mathbb{R}^3$, soit $q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - z^2 + 4xy - 2xz + 6yz$.

1. Écrire la matrice A de q dans la base canonique, puis sa forme polaire b .
2. Calculer $q(1, 1, 1)$, puis $b((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ de deux façons : avec la matrice, puis avec l'identité de polarisation.
3. Montrer que $u = (1, -1, 0)$ est un vecteur isotrope non nul. Est-il dans le noyau de q ?

4. Réduire q par la méthode de Gauss et en déduire sa signature.

Exercice 3 : Matrices congruentes et semblables

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Réduire la forme $q(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$ par la méthode de Gauss. En déduire une matrice inversible P telle que $P^T A P = I_2$.
2. Montrer que I_2 et $\text{diag}(1, -1)$ ne sont pas congruentes.
3. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est congruente à $\text{diag}(1, -1)$ en exhibant une matrice de passage.
4. Montrer que $\text{diag}(1, 4)$ est congruente à I_2 sans lui être semblable.

Exercice 4 : Réductions de Gauss avec carrés

1. Réduire $q_1(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz$. Donner son rang et sa signature.
2. Réduire $q_2(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy + 4yz$. Donner son rang et sa signature.
3. Déterminer une base q_2 -orthogonale de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de q_2 dans cette base.

Exercice 5 : Réduction de Gauss sans carré

1. Réduire $q(x, y, z) = xy + yz + zx$ par la méthode de Gauss. En déduire son rang et sa signature.
2. Vérifier le résultat en calculant les valeurs propres de la matrice de q .
3. Sur $\mathbb{R}^4$, réduire $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_3 x_4$ et donner sa signature.

4. Trouver un plan de $\mathbb{R}^4$ formé de vecteurs isotropes pour Q .

Exercice 6 : Rang et signature selon un paramètre

1. Soit $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ avec $a \neq 0$. Écrire la réduction de Gauss de q et discuter sa signature selon le signe de a et celui de $ac - b^2$.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $q_\alpha(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + \alpha z^2 + 2xy + 2yz$. Réduire q_α par la méthode de Gauss.
3. Donner le rang et la signature de q_α selon α . Pour quelles valeurs q_α est-elle définie positive ?

Exercice 7 : Cône isotrope

1. Déterminer le cône isotrope de $q(x, y) = x^2 - 4xy + 3y^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Est-ce un sous-espace vectoriel ? Préciser le signe de q dans chaque région du plan.
2. Déterminer le noyau de q . Comparer avec le cône isotrope.
3. Soit q une forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire telle que $C(q) = \{0\}$. Montrer que q est positive ou négative. On pourra raisonner par l'absurde avec u, v tels que $q(u) > 0 > q(v)$ et étudier $t \rightarrow q((1-t)u + tv)$.

Exercice 8 : Orthogonal d'un sous-espace

Sur $\mathbb{R}^3$, soit $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, de forme polaire b .

1. Soit $F = \text{Vect}(u)$ avec $u = (1, 0, 1)$. Déterminer $F^\perp$. A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$?
2. Soit $G = \text{Vect}(w)$ avec $w = (0, 0, 1)$. Déterminer $G^\perp$ et montrer que

$$\mathbb{R}^3 = G \oplus G^\perp.$$

- Vérifier sur ces deux exemples que $\dim F^\perp = 3 - \dim F$.
- Soit maintenant $q'(x, y, z) = x^2 - y^2$. Déterminer $\ker q'$, puis l'orthogonal de $H = \text{Vect}((0, 0, 1))$ pour q' . Que devient la formule sur les dimensions ?

Exercice 9 : Classes de congruence

- Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\text{diag}(1, -1)$ sont-elles congruentes ? Même question pour $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\text{diag}(1, -1)$.
- Montrer que $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est congruente à $\text{diag}(1, -1, -1)$.
- Combien y a-t-il de classes de congruence dans l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille 3 ? Et de taille n ?

Exercice 10 : Une forme quadratique sur les polynômes

Sur $E = \mathbb{R}_2[X]$, on pose $q(P) = P(0)P(1)$.

- Montrer que q est une forme quadratique et donner sa forme polaire.
- Écrire la matrice de q dans la base $(1, X, X^2)$.
- Déterminer le rang, la signature et le noyau de q . Interpréter le noyau.
- Décrire le cône isotrope de q .

Exercice 11 : La forme trace sur les matrices

Sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geq 2$, on pose $q(M) = \text{tr}(M^2)$.

1. Montrer que q est une forme quadratique de forme polaire $b(M, N) = \text{tr}(MN)$.
2. Pour S symétrique, montrer que $q(S) = \sum_{i,j} s_{ij}^2$. Pour A antisymétrique, montrer que $q(A) = -\sum_{i,j} a_{ij}^2$.
3. Montrer que les sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont q -orthogonaux.
4. En déduire la signature et le rang de q .
5. Déterminer de même le rang et la signature de $q'(M) = (\text{tr } M)^2$.

Exercice 12 : Réduction en base orthonormée

Sur $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel, soit $q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$.

1. Écrire la matrice A de q et déterminer ses valeurs propres.
2. Déterminer une base orthonormée de vecteurs propres, puis l'expression de q dans cette base.
3. En déduire la signature de q , puis le maximum et le minimum de q sur la sphère unité.
4. Réduire aussi q par la méthode de Gauss et comparer les coefficients obtenus.

Exercice 13 : Nature de six coniques

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Déterminer le genre, puis la nature exacte, de chacune des

coniques suivantes.

1. $x^2 + xy + y^2 = 3$.
2. $x^2 + 4xy + y^2 = 1$.
3. $x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 0$.
4. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$.
5. $x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$.
6. $x^2 + 2y^2 + 1 = 0$.

Exercice 14 : Réduction d'une ellipse

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$.

1. Écrire la matrice de la partie quadratique et la diagonaliser dans une base orthonormée directe.
2. Écrire l'équation réduite de $\mathcal{C}$ et donner sa nature.
3. Donner les longueurs des demi-axes, les sommets et les foyers de $\mathcal{C}$ dans le repère initial.
4. Calculer l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$, sachant que l'ellipse de demi-axes α, β limite une aire $\pi \alpha \beta$.

Exercice 15 : Réduction d'une parabole

Dans un repère orthonormé, soit $\mathcal{P}$ la conique d'équation $x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0$.

1. Déterminer le genre de $\mathcal{P}$.
2. À l'aide de la base orthonormée $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$, écrire l'équation réduite de $\mathcal{P}$.
3. Donner le sommet, l'axe, le paramètre, le foyer et la directrice de $\mathcal{P}$ dans le repère initial.
4. Vérifier directement que tout point de $\mathcal{P}$ est à égale distance du foyer et de la directrice.

Exercice 16 : Une hyperbole équilatère

Dans un repère orthonormé, soit $\mathcal{H}$ la conique d'équation $xy + x - y = 3$.

1. Montrer que l'équation s'écrit $(x - 1)(y + 1) = 2$. En déduire le centre Ω de $\mathcal{H}$ et ses asymptotes.
2. Par une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour de Ω , écrire l'équation réduite de $\mathcal{H}$.
3. Donner les sommets, les foyers et l'excentricité $e = c/a$ de $\mathcal{H}$ dans le repère initial.

Exercice 17 : Une famille de coniques

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe d'équation $x^2 + 2\lambda xy + y^2 = 1$ dans un repère orthonormé.

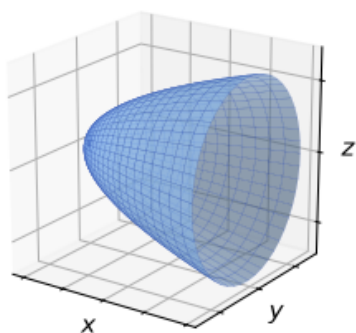
1. Déterminer les valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice de la partie quadratique.
2. Discuter la nature de $\mathcal{C}_\lambda$ selon λ .
3. Pour $|\lambda| < 1$, donner les demi-axes de $\mathcal{C}_\lambda$. Pour quelle valeur est-ce un cercle ?
4. Pour $|\lambda| > 1$, donner les asymptotes de $\mathcal{C}_\lambda$ dans les coordonnées réduites.

Exercice 18 : Reconnaître des quadriques

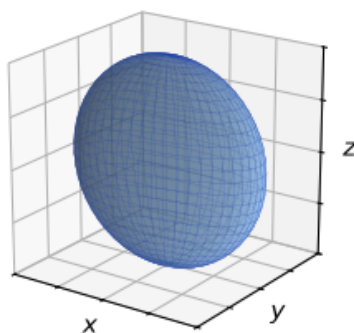
On considère les cinq surfaces de l'espace d'équations

(1) $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$; (2) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$; (3) $y^2 + z^2 = x$; (4)
 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; (5) $x^2 + y^2 = 4$.

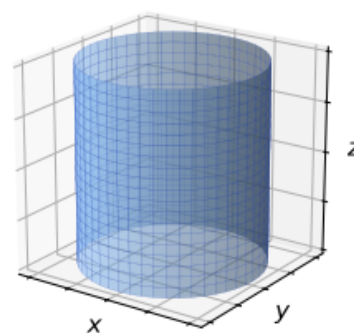
Les surfaces sont dessinées ci-dessous, dans le désordre, sous les lettres A à E.



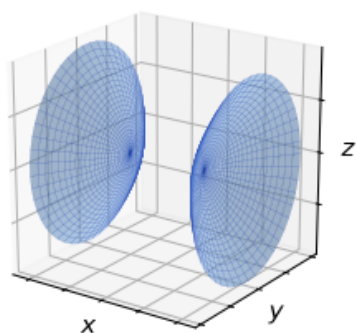
A



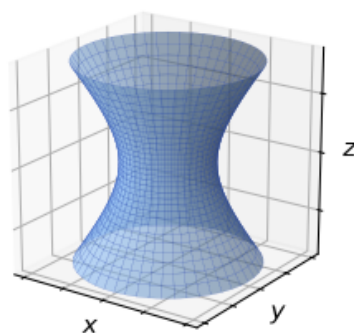
B



C



D



E

1. Donner le nom de chaque surface et l'associer à sa figure.
2. Pour les surfaces (2) et (4), décrire les sections par les plans $x = k$ et $z = k$, selon k .
3. Pour chacune des cinq surfaces, donner la signature de la forme quadratique formée par les termes

de degré 2.

Exercice 19 : Un ellipsoïde de révolution

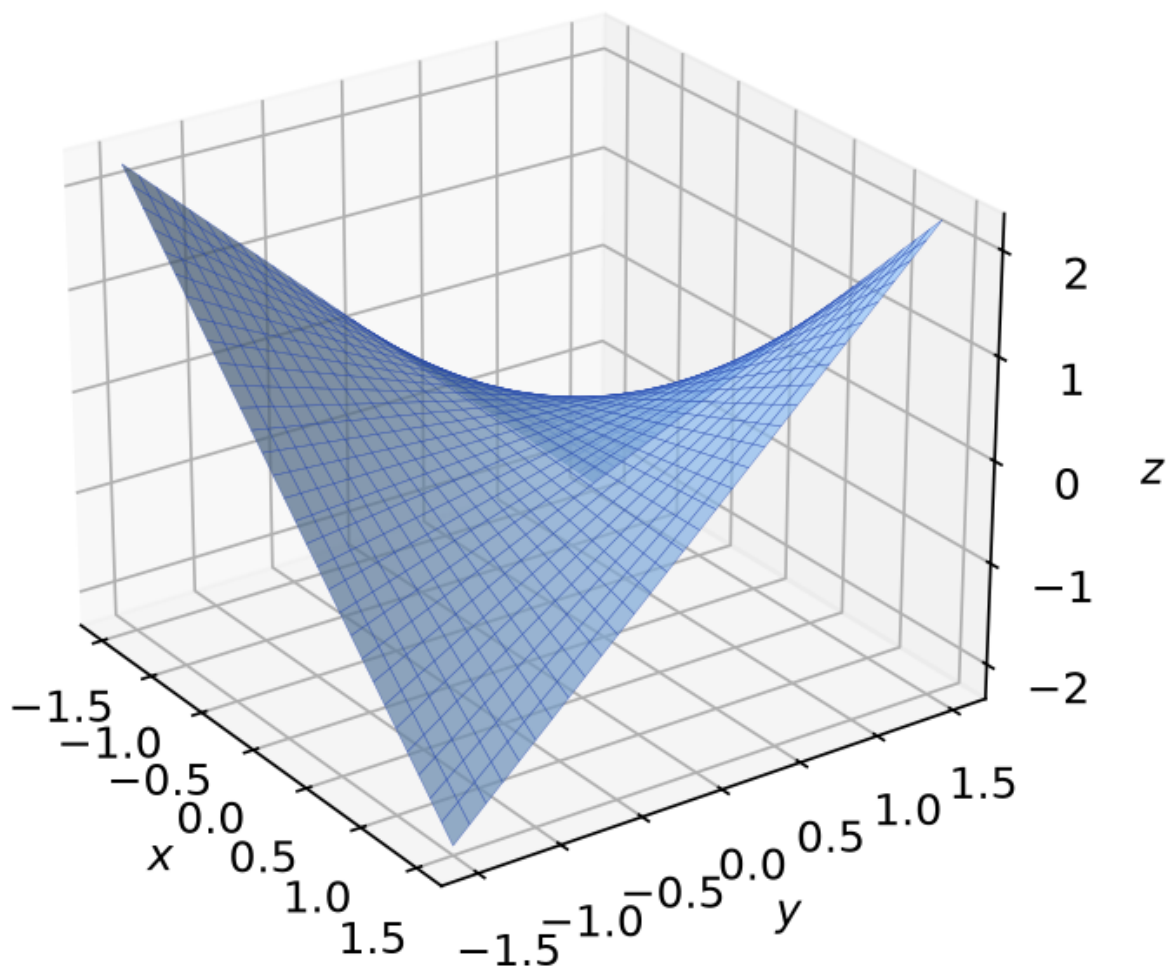
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère la quadrique $\mathcal{Q}$ d'équation

$$7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz = 12.$$

1. Écrire la matrice A de la partie quadratique. Vérifier que $(-1, 1, 2)$ est vecteur propre de A .
2. Déterminer les valeurs propres de A et une base orthonormée directe de vecteurs propres.
3. Écrire l'équation réduite de $\mathcal{Q}$ et donner sa nature. Préciser son axe de révolution.

Exercice 20 : Deux quadriques non centrées

1. Réduire l'équation $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2x + 8y + 2z + 7 = 0$. Donner la nature de la surface et son centre.
2. On considère la surface Σ d'équation $z = xy$, représentée ci-dessous. À l'aide du changement de base orthonormée $u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, $v = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}$, réduire son équation et donner sa nature.
3. Montrer que, pour tout réel a , la droite $\left\{ \begin{matrix} x = a, \\ z = ay \end{matrix} \right\}$ est contenue dans Σ .



Exercice 21 : Critère de positivité

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $q_\alpha(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha(xy + yz + zx)$.

1. Calculer $q_\alpha(1, 1, 1)$ et $q_\alpha(1, -1, 0)$. En déduire que q_α n'est pas définie positive si $\alpha \leq -\frac{1}{2}$ ou $\alpha \geq 1$.
2. On suppose $-\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Réduire q_α par la méthode de Gauss et montrer que q_α est définie positive.
3. Retrouver ce résultat à l'aide des valeurs propres de la matrice de q_α .

Exercice 22 : Problème : une famille de quadriques

On garde les notations de l'exercice précédent et l'on étudie, dans un repère orthonormé de l'espace, la quadrique $\mathcal{Q}_\alpha$ d'équation $q_\alpha(x, y, z) = 1$.

1. Soit A_α la matrice de q_α . Montrer que $A_\alpha = (1 - \alpha) I_3 + \alpha J$, où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1.
2. Déterminer les valeurs propres de J , puis celles de A_α , avec des espaces propres.
3. Construire une base orthonormée directe (u_1, u_2, u_3) de vecteurs propres, avec u_1 colinéaire à $(1, 1, 1)$, et écrire l'équation de $\mathcal{Q}_\alpha$ dans cette base.
4. Discuter la nature de $\mathcal{Q}_\alpha$ selon α . Justifier que toutes ces surfaces admettent la droite $\mathbb{R}(1, 1, 1)$ comme axe de révolution.
5. Pour $-\frac{1}{2} < \alpha < 1$, donner les demi-axes de l'ellipsoïde. Pour quelle valeur de α est-ce une sphère ?
6. Pour $\alpha = 2$, déterminer les points de $\mathcal{Q}_\alpha$ les plus proches de l'origine.

Exercice 23 : Signature et sous-espaces positifs

Soit q une forme quadratique de signature (s, t) sur un espace E de dimension n .

1. Montrer qu'il existe un sous-espace de dimension s sur lequel la restriction de q est définie positive.
2. Montrer que tout sous-espace F sur lequel q est définie positive vérifie $\dim F \leq s$. En déduire que s est la plus grande dimension d'un tel sous-espace.
3. Application : pour $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_3 x_4$ sur $\mathbb{R}^4$, trouver un plan sur lequel Q est définie positive. Montrer qu'aucun sous-espace de dimension 3 ne convient.
4. Montrer que tout sous-espace de dimension $n - s + 1$ contient un vecteur x tel que

$$q(x) > 0.$$

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [formes quadratiques, cours de maths en L2](#)
- À maîtriser avant : [Isométries, endomorphismes symétriques et théorème spectral](#)
- Chapitre précédent : [Séries de Fourier](#)
- Chapitre suivant : [Intégrales multiples et intégrales curvilignes](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)