

Formes quadratiques

Corrigé de l'exercice 1 : Matrice d'une forme bilinéaire

1. Chaque terme $x_i y_j$ est linéaire en x à y fixé, et linéaire en y à x fixé. Une somme de tels termes est donc bilinéaire. Le coefficient de $x_i y_j$ se place en ligne i , colonne j :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Or $a_{12} = 2$ et $a_{21} = -1$. Ainsi, A **n'est pas symétrique**, donc b **n'est pas symétrique**. Par exemple, $b(e_1, e_2) = 2 \neq -1 = b(e_2, e_1)$.

2. On pose $y = x$: les termes $2x_1x_2$ et $-x_2x_1$ donnent x_1x_2 , et les termes x_1x_3 et x_3x_1 donnent $2x_1x_3$. Donc $q(x) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2$. En partageant les termes croisés en deux, on obtient

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(A + A^T).$$

En effet, $\frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}) = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}(a_{13} + a_{31}) = 1$ et $\frac{1}{2}(a_{23} + a_{32}) = 0$. **La matrice de q est la partie symétrique de A .**

3. La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En développant selon la première ligne,

$\det P = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \neq 0$, donc c'est une base. Les coefficients diagonaux de la nouvelle matrice sont $q(e'_1) = q(1, 1, 0) = 1 + 1 + 3 = 5$, $q(e'_2) = q(0, 1, 1) = 3 - 2 = 1$ et

$q(e'_3) = q(1, 0, 1) = 1 + 2 - 2 = 1$. Le calcul de $P^T S P$ donne ensuite

$$P^T S P = \begin{pmatrix} 5 & \frac{9}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, $b_S(e'_1, e'_2) = (1, 1, 0) S (0, 1, 1)^T = (1, 1, 0) \cdot \left(\frac{3}{2}, 3, -2\right) = \frac{9}{2}$. **La matrice de q dans la nouvelle base est $P^T S P$ ci-dessus.**

Point de méthode : une forme quadratique ne « voit » que la partie symétrique d'une matrice, car $X^T A X = X^T A^T X$.

Corrigé de l'exercice 2 : Forme polaire et vecteur isotrope

1. On place les carrés sur la diagonale et l'on partage les termes croisés :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 3 & - \\ - & -1 \end{pmatrix}.$$

Par dédoublement,

$$b(u, u') = x x' + 3 y y' - z z' + 2(x y' + y x') - (x z' + z x') + 3(y z' + z y').$$

2. D'abord, $q(1, 1, 1) = 1 + 3 - 1 + 4 - 2 + 6 = 11$. Ensuite, avec la matrice, $b(e_1, e_2) = a_{12} = 2$. Avec la polarisation, $q(1, 1, 0) = 1 + 3 + 4 = 8$, $q(e_1) = 1$ et $q(e_2) = 3$. Donc $b(e_1, e_2) = \frac{1}{2}(8 - 1 - 3) = 2$. **On trouve $q(1, 1, 1) = 11$ et $b(e_1, e_2) = 2$ par les deux méthodes.**

3. On a $q(1, -1, 0) = 1 + 3 + 4 \times (-1) = 0$, et $u \neq 0$: u est isotrope. Cependant, $A u = (1 - 2, 2 - 3, -1 - 3) = (-1, -1, -4) \neq 0$. **Donc u est isotrope mais n'appartient pas au noyau.**

4. Les termes en x sont $x^2 + 2x(2y - z) = (x + 2y - z)^2 - (2y - z)^2$. Il reste $3y^2 - z^2 + 6yz - (4y^2 - 4yz + z^2) = -y^2 + 10yz - 2z^2$. Ensuite, $-y^2 + 10yz = -(y - 5z)^2 + 25z^2$. Finalement,

$$q = (x + 2y - z)^2 - (y - 5z)^2 + 23z^2.$$

Les trois formes linéaires sont échelonnées, donc indépendantes. **La signature est $(2, 1)$ et le rang vaut 3**. Ce résultat est cohérent avec $\det A = -23 < 0$, qui impose un nombre impair de signes négatifs.

Corrigé de l'exercice 3 : Matrices congruentes et semblables

1. La réduction donne $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 2\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}y^2$. On pose $x' = \sqrt{2}\left(x + \frac{y}{2}\right)$ et $y' = \frac{\sqrt{6}}{2}y$, de sorte que $q = x'^2 + y'^2$. Autrement dit, $X' = L X$ avec $L = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $X = L^{-1} X'$, et la matrice $P = L^{-1}$ convient. Pour une matrice triangulaire $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, l'inverse est $\begin{pmatrix} 1/\alpha & -\beta/(\alpha\delta) \\ 0 & 1/\delta \end{pmatrix}$. Ici $\alpha\delta = \sqrt{3}$, d'où

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^T A P = I_2.$$

Cette matrice P réalise la congruence entre A et I_2 .

2. Si $\text{diag}(1, -1) = P^T I_2 P$, alors $-1 = \det(P)^2 \geq 0$, ce qui est absurde. **Les deux matrices ne sont pas congruentes.** On peut aussi invoquer la loi d'inertie : les signatures $(2, 0)$ et $(1, 1)$ diffèrent.
3. La matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ représente $2xy = \frac{1}{2}(x + y)^2 - \frac{1}{2}(x - y)^2$. Prenons $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Alors $JP = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, puis $P^T J P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. **Donc $P^T J P = \text{diag}(1, -1)$.**
4. Avec $P = \text{diag}(1, 2)$, on a $P^T I_2 P = \text{diag}(1, 4)$: les matrices sont congruentes. En revanche, pour toute Q inversible, $Q^{-1} I_2 Q = I_2 \neq \text{diag}(1, 4)$. **Elles sont congruentes sans être semblables.**

Corrigé de l'exercice 4 : Réductions de Gauss avec carrés

1. Les termes en x donnent $x^2 + 2x(y+z) = (x+y+z)^2 - (y+z)^2$. Il reste $2y^2 + 3z^2 - y^2 - 2yz - z^2 = y^2 - 2yz + 2z^2 = (y-z)^2 + z^2$. Donc

$$q_1 = (x+y+z)^2 + (y-z)^2 + z^2.$$

Le rang vaut 3 et la signature $(3, 0)$: q_1 est définie positive.

2. D'abord, $x^2 + 2xy = (x+y)^2 - y^2$. Il reste $y^2 + 4yz - z^2 = (y+2z)^2 - 4z^2 - z^2$. Ainsi,

$$q_2 = (x+y)^2 + (y+2z)^2 - 5z^2.$$

Le rang vaut 3 et la signature $(2, 1)$.

3. La matrice des formes linéaires est $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On résout $LX = X'$ en remontant : $z = z'$, $y = y' - 2z'$, puis $x = x' - y' + 2z'$. Donc

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ses colonnes $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (-1, 1, 0)$ et $f_3 = (2, -2, 1)$ forment une base q_2 -orthogonale. Vérifions un coefficient : $q_2(f_3) = 4 + 8 - 1 - 8 - 8 = -5$. **Dans la base (f_1, f_2, f_3) , la matrice de q_2 est $\text{diag}(1, 1, -5)$.**

Corrigé de l'exercice 5 : Réduction de Gauss sans carré

1. Il n'y a aucun carré. On isole le produit xy : $xy + z(x+y) = (x+z)(y+z) - z^2$.

Ensuite, $(x+z)(y+z) = \frac{1}{4}(x+y+2z)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2$. Donc

$$q = \frac{1}{4}(x+y+2z)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 - z^2.$$

Les formes $x+y+2z$, $x-y$ et z sont indépendantes, car leur déterminant vaut $-2 \neq 0$. **Le rang vaut 3 et la signature (1, 2).**

2. La matrice de q est $\frac{1}{2}J$, avec J la matrice de l'exercice 9. Or $J(1,1,1)^T = 2(1,1,1)^T$, et $Jv = -v$ pour tout v du plan $x+y+z=0$. Les valeurs propres de q sont donc 1 , $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. **On retrouve une valeur propre positive et deux négatives.**

3. De même, $x_1x_2 = \frac{1}{4}(x_1+x_2)^2 - \frac{1}{4}(x_1-x_2)^2$, et de même pour x_3x_4 . Ainsi,

$$Q = \frac{1}{4}(x_1+x_2)^2 - \frac{1}{4}(x_1-x_2)^2 + \frac{1}{4}(x_3+x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_3-x_4)^2.$$

La signature est (2, 2).

4. Pour $x = (a, 0, b, 0)$, on a $Q(x) = a \times 0 + b \times 0 = 0$. **Le plan $\text{Vect}(e_1, e_3)$ est formé de vecteurs isotropes.**

Corrigé de l'exercice 6 : Rang et signature selon un paramètre

1. Comme $a \neq 0$, on factorise : $ax^2 + 2bxy = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 - \frac{b^2}{a}y^2$. Donc

$$q = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2.$$

Si $ac - b^2 > 0$, les deux coefficients ont le signe de a : signature $(2, 0)$ si $a > 0$, $(0, 2)$ si $a < 0$. Si $ac - b^2 < 0$, les coefficients sont de signes opposés : signature $(1, 1)$. Enfin, si $ac - b^2 = 0$, **le rang vaut 1 et la signature est $(1, 0)$ ou $(0, 1)$ selon le signe de a .**

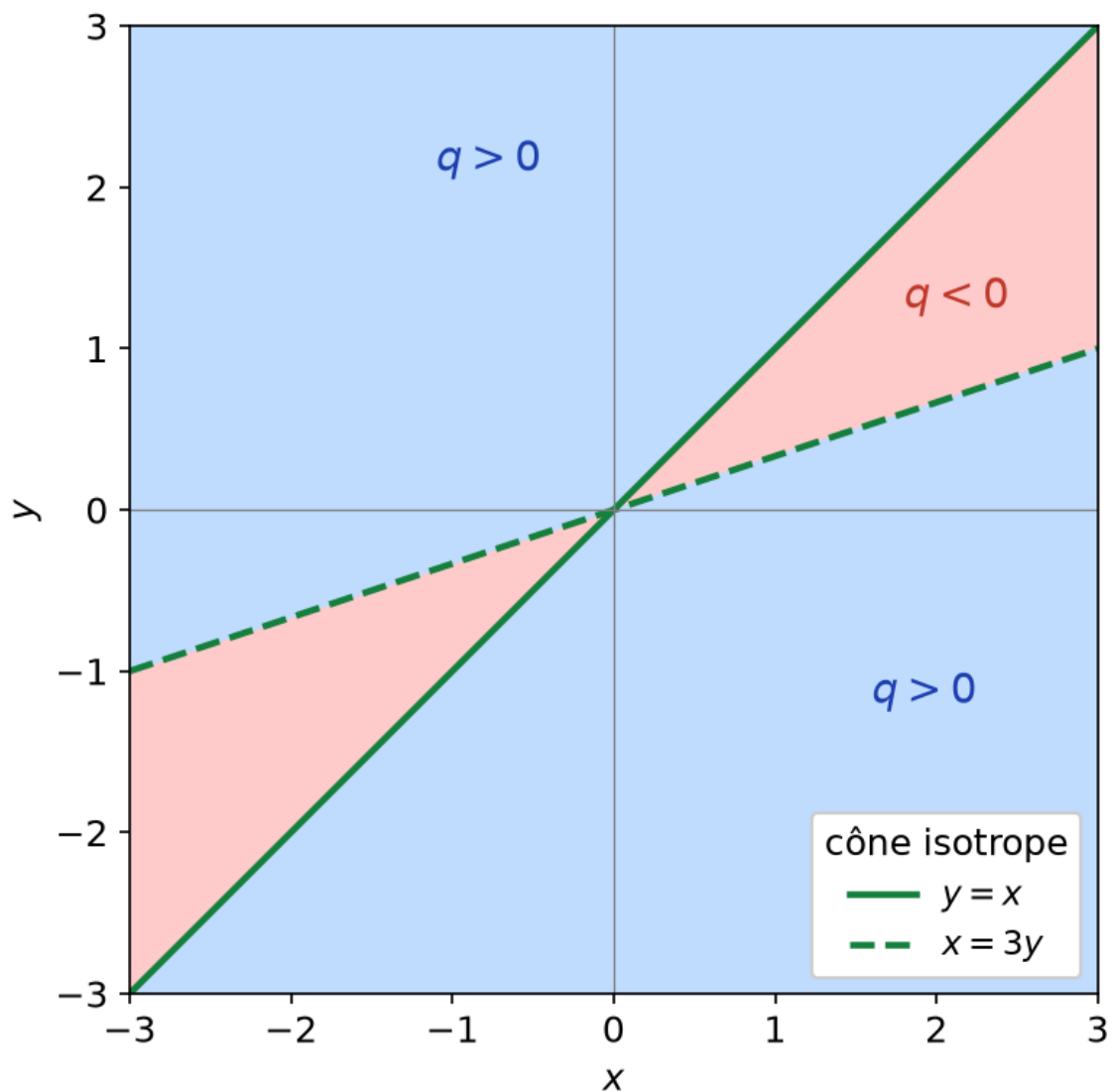
2. D'abord, $x^2 + 2xy = (x+y)^2 - y^2$. Il reste $y^2 + 2yz + \alpha z^2 = (y+z)^2 + (\alpha-1)z^2$. Donc

$$q_\alpha = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (\alpha-1)z^2.$$

3. Les formes $x + y$, $y + z$ et z sont indépendantes. Par conséquent, si $\alpha > 1$, la signature vaut $(3, 0)$ et le rang 3. Si $\alpha = 1$, la signature vaut $(2, 0)$ et le rang 2. Si $\alpha < 1$, la signature vaut $(2, 1)$ et le rang 3. **La forme q_α est définie positive si et seulement si $\alpha > 1$.**

Corrigé de l'exercice 7 : Cône isotrope

1. On factorise : $x^2 - 4xy + 3y^2 = (x - y)(x - 3y)$. Donc $q(x, y) = 0$ si et seulement si $y = x$ ou $x = 3y$. Le cône isotrope est la réunion de deux droites. Ce n'est pas un sous-espace : $(1, 1)$ et $(3, 1)$ sont isotropes, mais $q(4, 2) = 16 - 32 + 12 = -4 \neq 0$. Par ailleurs, $q(2, 1) = -1 < 0$ et $q(0, 1) = 3 > 0$. Comme le montre la figure ci-dessous, **q est négative dans les deux secteurs compris entre les droites $y = x$ et $x = 3y$ qui contiennent $(2, 1)$ et $(-2, -1)$, et positive ailleurs.**



2. La matrice de q est $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, de déterminant $3 - 4 = -1 \neq 0$. Donc $\ker q = \{0\}$. **Le noyau est nul, alors que le cône isotrope contient deux droites.**
3. Supposons $q(u) > 0 > q(v)$. Si $v = \mu u$, alors $q(v) = \mu^2 q(u) \geq 0$, ce qui est exclu. Donc u et v sont libres. La fonction $\varphi(t) = q((1-t)u + tv)$ est polynomiale, donc continue. De plus, $\varphi(0) > 0$ et $\varphi(1) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $\varphi(t_0) = 0$. Or $w = (1-t_0)u + t_0v$ est non nul, car u, v sont libres et $1-t_0 \neq 0$. Ainsi, w est un vecteur isotrope non nul, ce qui contredit $C(q) = \{0\}$. **Une forme définie est donc positive ou négative.**

Corrigé de l'exercice 8 : Orthogonal d'un sous-espace

1. La forme polaire est $b(v, v') = x x' + y y' - z z'$. Donc $v \in F^\perp$ si et seulement si $b(u, v) = x - z = 0$. Ainsi, $F^\perp$ est le plan d'équation $x = z$. Or $u = (1, 0, 1)$ vérifie $x = z$: $F \subset F^\perp$. Par conséquent, $F + F^\perp = F^\perp \neq \mathbb{R}^3$. **On n'a pas $\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$, car u est isotrope.**
2. On a $b(w, v) = -z$. Donc $G^\perp$ est le plan $z = 0$. Comme $w \notin G^\perp$, l'intersection $G \cap G^\perp$ est nulle. Les dimensions $1 + 2 = 3$ donnent alors $\mathbb{R}^3 = G \oplus G^\perp$.
3. Dans les deux cas, $\dim F^\perp = \dim G^\perp = 2 = 3 - 1$. **C'est conforme au cours, car q est non dégénérée** : sa matrice $\text{diag}(1, 1, -1)$ est inversible.
4. La matrice de q' est $\text{diag}(1, -1, 0)$, dont le noyau est $\text{Vect}(e_3)$. Ainsi, $\ker q' = \text{Vect}(e_3)$. Ensuite, pour $H = \text{Vect}(e_3)$, on a $b'(e_3, v) = 0$ pour tout v . Donc $H^\perp = \mathbb{R}^3$. **Ici $\dim H^\perp = 3 > 3 - 1$: seule l'inégalité $\dim H^\perp \geq n - \dim H$ subsiste.**

Corrigé de l'exercice 9 : Classes de congruence

1. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a pour déterminant $-3 < 0$. D'après l'exercice 6, sa signature vaut $(1, 1)$, comme celle de $\text{diag}(1, -1)$. **Elles sont donc congruentes.** En revanche, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ vérifie $a = 2 > 0$ et $a^2 - b^2 = 3 > 0$: sa signature est $(2, 0)$. **Elle n'est pas congruente à $\text{diag}(1, -1)$.**
2. La matrice J est celle de $2(xy + yz + zx)$. D'après l'exercice 5, cette forme a pour signature $(1, 2)$. De plus, $\text{diag}(1, -1, -1)$ a la même signature. **Par le corollaire de la loi d'inertie, J est congruente à $\text{diag}(1, -1, -1)$.**
3. Les classes sont en bijection avec les signatures (s, t) telles que $s + t \leq n$. Pour $n = 3$, on compte $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ couples. En général, pour chaque rang $r \in \{0, \dots, n\}$, il y a $r + 1$ valeurs de s . **Il y a donc 10 classes en taille 3, et $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ en taille n .**

Corrigé de l'exercice 10 : Une forme quadratique sur les polynômes

1. L'application $b(P, Q) = \frac{1}{2}(P(0)Q(1) + P(1)Q(0))$ est bilinéaire, car l'évaluation en un point est linéaire. Elle est aussi symétrique, et $b(P, P) = P(0)P(1)$. **Donc q est une forme quadratique de forme polaire b .**
2. Pour $P = a + bX + cX^2$, on a $P(0) = a$ et $P(1) = a + b + c$. Ainsi, $q(P) = a^2 + ab + ac$. Par conséquent,

$$\text{Mat}(q) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. La réduction de Gauss donne $a^2 + a(b + c) = \left(a + \frac{b+c}{2}\right)^2 - \frac{(b+c)^2}{4}$. Le rang vaut 2 et la signature $(1, 1)$. Pour le noyau, on résout $a + \frac{b+c}{2} = 0$ et $\frac{a}{2} = 0$. On obtient $a = 0$ et $c = -b$. **Donc $\ker q = \text{Vect}(X - X^2)$: ce sont les polynômes qui s'annulent en 0 et en 1.**
4. On a $q(P) = 0$ si et seulement si $P(0) = 0$ ou $P(1) = 0$. **Le cône isotrope est la réunion des deux plans $\{P(0) = 0\}$ et $\{P(1) = 0\}$.** Leur intersection est précisément le noyau.

Corrigé de l'exercice 11 : La forme trace sur les matrices

1. L'application $b(M, N) = \text{tr}(MN)$ est bilinéaire, par linéarité de la trace et bilinéarité du produit. Elle est symétrique, car $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$. Enfin, $b(M, M) = \text{tr}(M^2)$. **Donc q est une forme quadratique de forme polaire $\text{tr}(MN)$.**
2. Pour toute matrice, $\text{tr}(M^2) = \sum_{i,j} m_{ij} m_{ji}$. Si S est symétrique, $s_{ji} = s_{ij}$, d'où

$$q(S) = \sum_{i,j} s_{ij}^2. \text{ Si } A \text{ est antisymétrique, } a_{ji} = -a_{ij}, \text{ d'où } q(A) = -\sum_{i,j} a_{ij}^2.$$

3. Soient S symétrique et A antisymétrique. Par invariance de la trace par transposition, $\text{tr}(SA) = \text{tr}((SA)^T) = \text{tr}(A^T S^T) = -\text{tr}(AS) = -\text{tr}(SA)$. Donc $\text{tr}(SA) = 0$: **les deux sous-espaces sont q -orthogonaux.**
4. On a $E = S_n \oplus A_n$. Prenons une base q -orthogonale de S_n formée de vecteurs positifs, par exemple les matrices E_{ii} et $\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij} + E_{ji})$ pour $i < j$. De même, les $\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij} - E_{ji})$ forment une base q -orthogonale de A_n , de vecteurs négatifs. Grâce à la question 3, leur réunion est une base q -orthogonale de E . **La signature est $\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$ et le rang vaut n^2 .**
5. La forme q' est le carré de la forme linéaire non nulle tr . Par conséquent, **q' est de rang 1 et de signature $(1, 0)$** . Son noyau est l'hyperplan des matrices de trace nulle.

Corrigé de l'exercice 12 : Réduction en base orthonormée

1. La matrice est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = I_3 + J$. Or J a pour valeurs propres 3 (vecteur $(1, 1, 1)$) et 0 (plan $x + y + z = 0$). **Donc A a pour valeurs propres 4, simple, et 1, double.**
2. On norme $(1, 1, 1)$ et l'on choisit une base orthonormée du plan $x + y + z = 0$:
- $$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2).$$
- On vérifie que $u_2 \cdot u_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(1 - 1 + 0) = 0$. **Dans la base (u_1, u_2, u_3) , $q = 4X^2 + Y^2 + Z^2$.**
3. Les trois valeurs propres sont positives : **la signature est $(3, 0)$** . Sur la sphère unité, $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, donc $q = 1 + 3X^2$. Ainsi, **le maximum vaut 4, atteint en $\pm u_1$, et le minimum vaut 1, atteint sur le cercle unité du plan $x + y + z = 0$.**
4. Les termes en x donnent $2x^2 + 2x(y + z) = 2\left(x + \frac{y+z}{2}\right)^2 - \frac{(y+z)^2}{2}$. Il reste $\frac{3}{2}y^2 + yz + \frac{3}{2}z^2 = \frac{3}{2}\left(y + \frac{z}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}z^2$. Donc

$$q = 2\left(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y + \frac{z}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}z^2.$$

Les coefficients $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ diffèrent des valeurs propres $4, 1, 1$, mais les signes coïncident.

On remarque que leur produit vaut $4 = \det A$, car la matrice de passage est unitriangulaire.

Corrigé de l'exercice 13 : Nature de six coniques

On note $\delta = ac - b^2$ pour l'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + \dots = 0$. Pour les rotations, on utilise $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ et $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$, soit $x = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ et $y = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$. Alors $x^2 + y^2 = X^2 + Y^2$ et $xy = \frac{X^2 - Y^2}{2}$.

- Ici $b = \frac{1}{2}$, donc $\delta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$: genre ellipse. La rotation donne $X^2 + Y^2 + \frac{X^2 - Y^2}{2} = 3$, soit $\frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 = 3$. **C'est l'ellipse** $\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{6} = 1$.
- Ici $\delta = 1 - 4 = -3 < 0$: genre hyperbole. On obtient $X^2 + Y^2 + 2(X^2 - Y^2) = 1$, soit **l'hyperbole** $3X^2 - Y^2 = 1$.
- Ici $\delta = 1 - 1 = 0$: genre parabole. On a $x - y = -\sqrt{2}Y$ et $x + y = \sqrt{2}X$. L'équation devient $2Y^2 + \sqrt{2}X = 0$, soit $Y^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}X$. Le terme linéaire en X subsiste : **c'est une parabole**, de sommet l'origine.
- Ici $\delta = 1 > 0$. En complétant les carrés, $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1 + 4 - 5 = 0$. **La conique est réduite au point** $(-1, 2)$.
- Ici $\delta = -1 < 0$. On a $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, donc l'équation s'écrit $(x+1-y)(x+1+y) = 0$. **C'est la réunion des deux droites sécantes** $y = x+1$ et $y = -x-1$.
- Ici $\delta = 2 > 0$. Or $x^2 + 2y^2 + 1 \geq 1 > 0$ pour tout point. **La conique est vide**.

Point de méthode : le signe de δ donne seulement le genre ; il faut réduire l'équation pour écarter les cas dégénérés.

Corrigé de l'exercice 14 : Réduction d'une ellipse

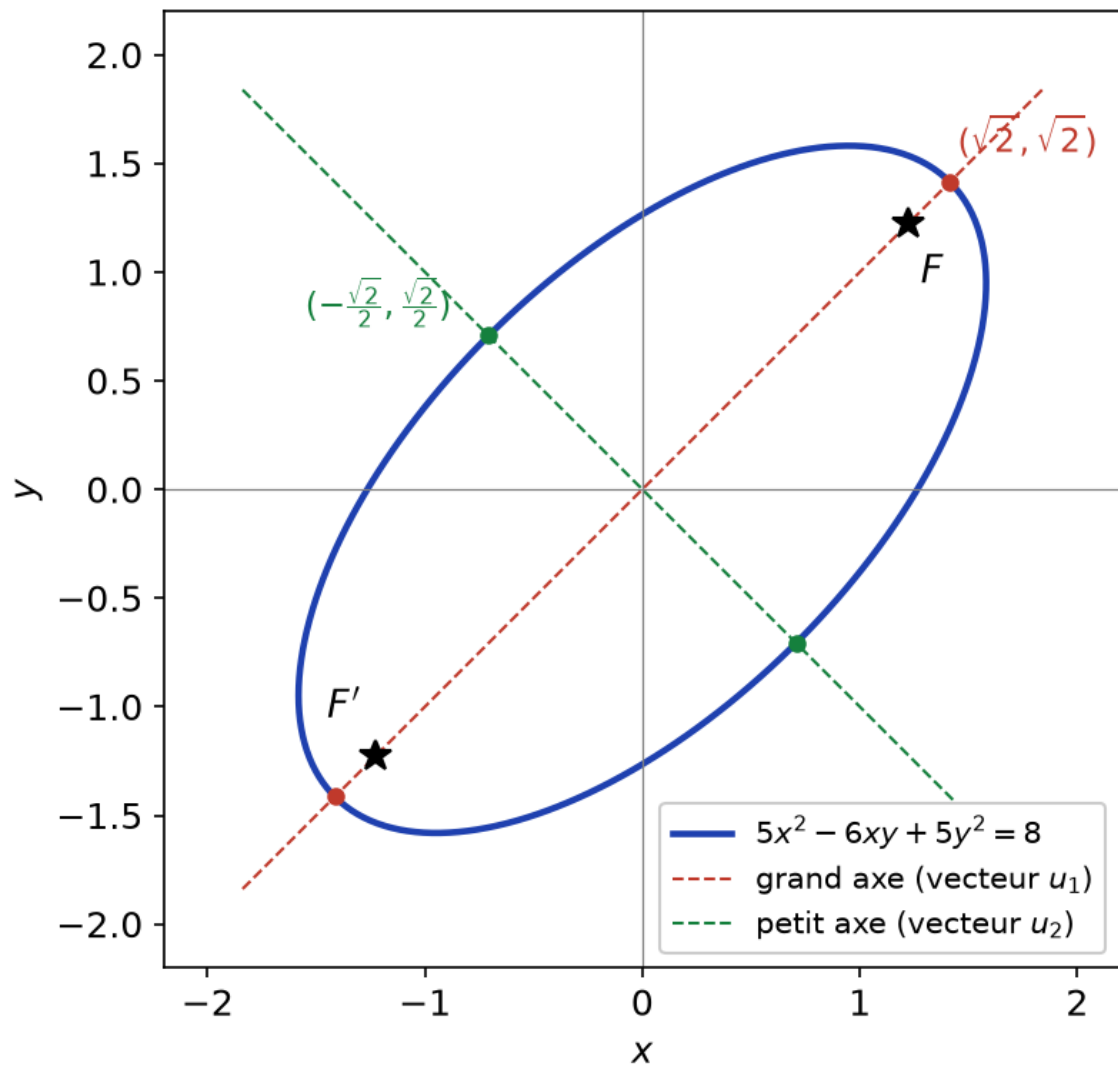
1. La matrice est $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. On a $A(1,1)^T = (2,2)^T$ et $A(-1,1)^T = (-8,8)^T$. **Les valeurs propres sont 2 et 8, de vecteurs unitaires** $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ **et** $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$, et (u_1, u_2) est directe.

2. Dans cette base, l'équation devient $2X^2 + 8Y^2 = 8$, soit

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1.$$

La courbe $\mathcal{C}$ est une ellipse de centre O .

3. Les demi-axes sont $\alpha = 2$, dans la direction u_1 , et $\beta = 1$, dans la direction u_2 . Les sommets sont $\pm 2u_1 = \pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $\pm u_2 = \pm\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ensuite, $c^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 3$, donc les foyers sont $\pm \sqrt{3} u_1$. **Les foyers sont** $F\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ **et** $F'\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$. La figure ci-dessous montre l'ellipse, ses axes et ses foyers.



4. Une rotation conserve les aires. **L'aire du domaine vaut donc** $\pi \times 2 \times 1 = 2\pi$.

Corrigé de l'exercice 15 : Réduction d'une parabole

1. La partie quadratique $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, de déterminant nul. **La conique est du genre parabole.**

2. Avec $X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ et $Y = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}$, on a $(x - y)^2 = 2Y^2$ et $x + y = \sqrt{2} X$.
L'équation devient $2Y^2 - 8\sqrt{2} X = 0$, soit

$$Y^2 = 4\sqrt{2} X.$$

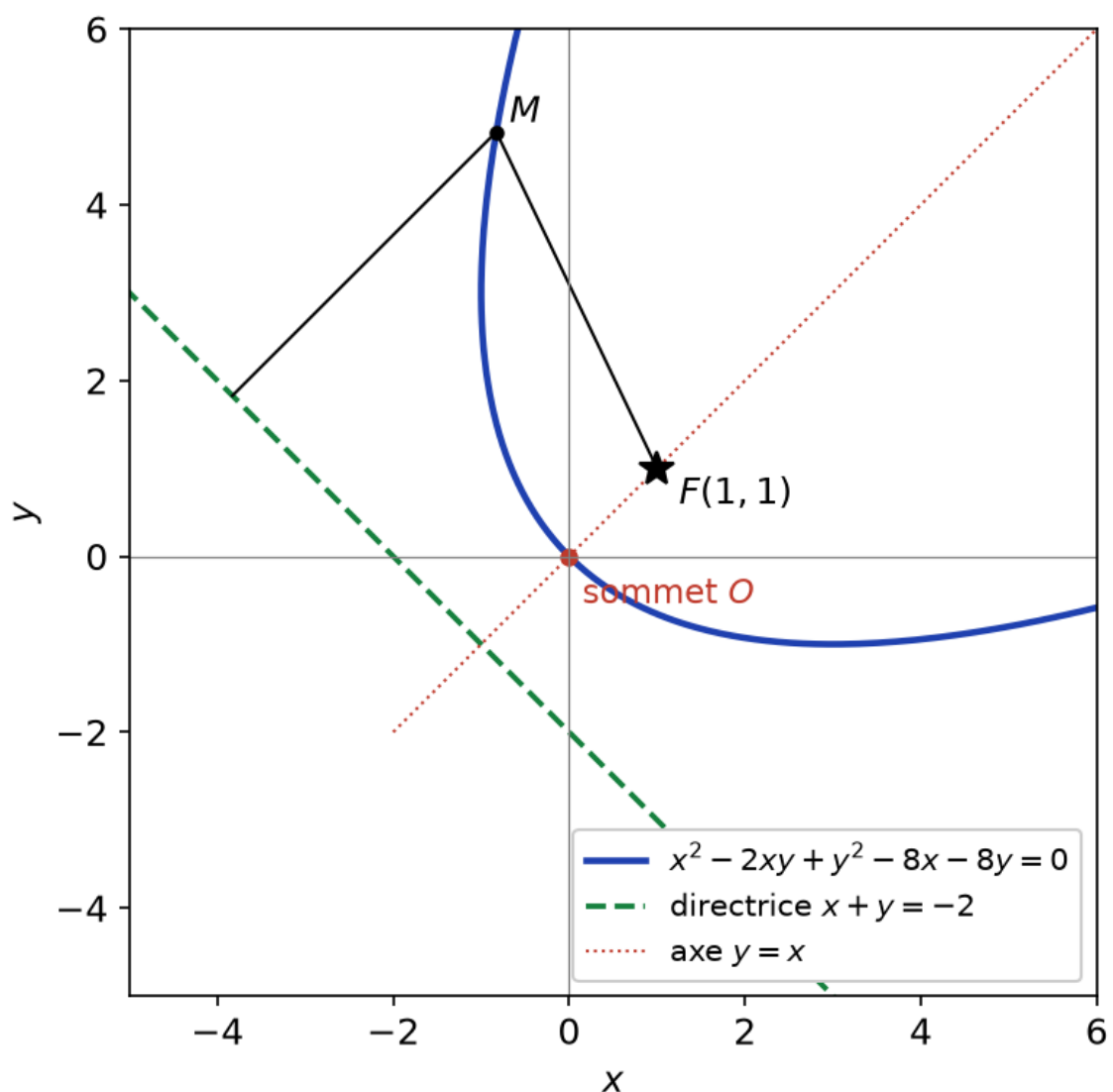
C'est une parabole, d'équation réduite $Y^2 = 2pX$ avec $p = 2\sqrt{2}$.

3. Le sommet est l'origine O . L'axe est la droite $Y = 0$, c'est-à-dire $y = x$. Le foyer a pour coordonnées réduites $\left(\frac{p}{2}, 0\right) = (\sqrt{2}, 0)$, soit $\sqrt{2} u_1 = (1, 1)$. La directrice est $X = -\sqrt{2}$, c'est-à-dire $x + y = -2$. **Foyer $F(1, 1)$, directrice $x + y + 2 = 0$, paramètre $2\sqrt{2}$.**

4. Pour $M(x, y)$, on a $MF^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$ et $d(M, \mathcal{D})^2 = \frac{(x + y + 2)^2}{2}$.

L'égalité $2 MF^2 = (x + y + 2)^2$ s'écrit

$2x^2 + 2y^2 - 4x - 4y + 4 = x^2 + y^2 + 2xy + 4x + 4y + 4$. Après simplification, on obtient $x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0$. **C'est exactement l'équation de $\mathcal{P}$.** La figure illustre cette égalité des distances pour un point M .



Corrigé de l'exercice 16 : Une hyperbole équilatère

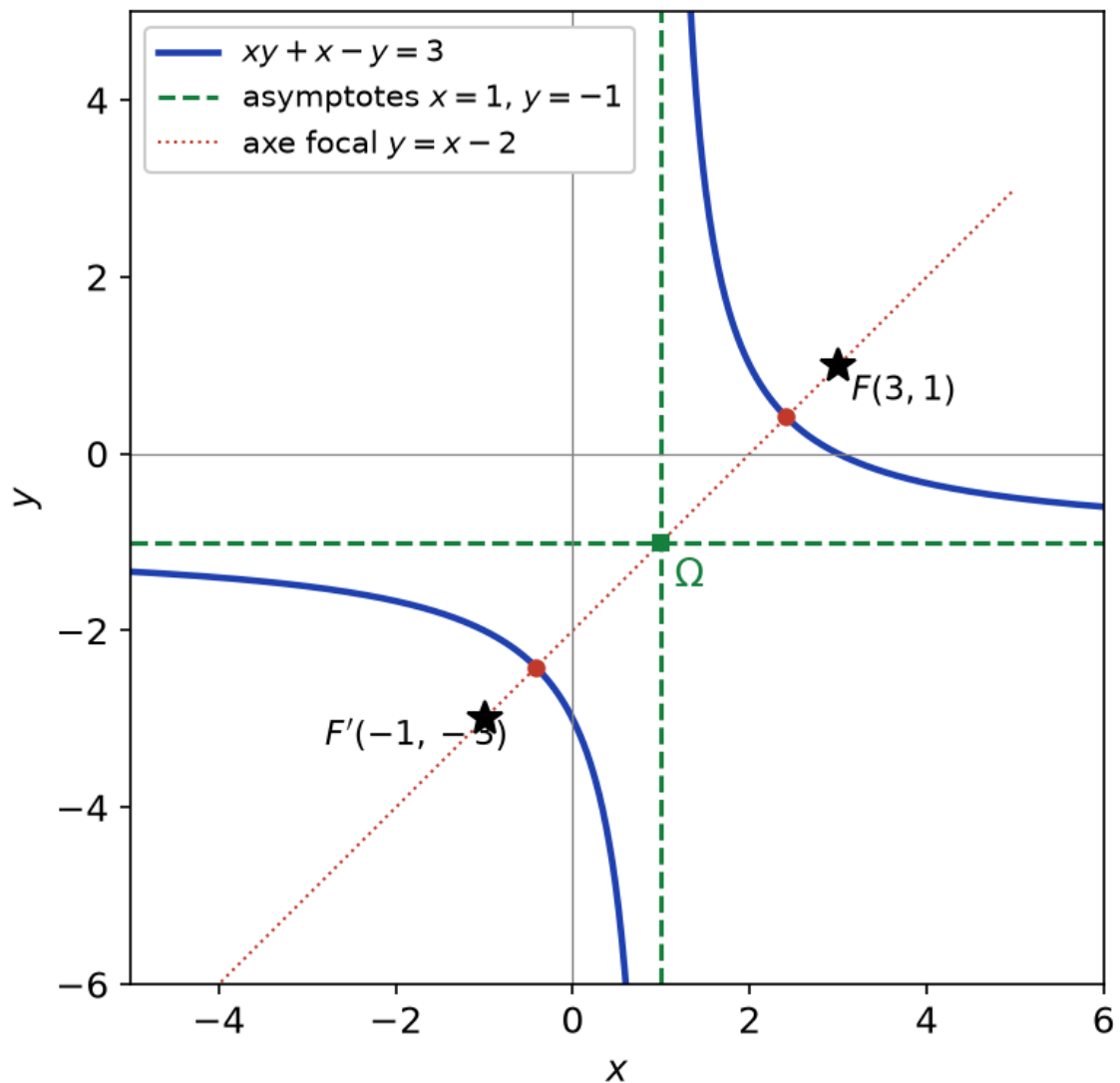
1. On développe : $(x-1)(y+1) = xy + x - y - 1$. Donc $xy + x - y = 3$ équivaut à $(x-1)(y+1) = 2$. Avec $x' = x-1$ et $y' = y+1$, l'équation devient $x'y' = 2$. **Le centre est $O(1, -1)$, et les asymptotes sont les droites $x = 1$ et $y = -1$.**

2. On pose $x' = \frac{U-V}{\sqrt{2}}$ et $y' = \frac{U+V}{\sqrt{2}}$. Alors $x'y' = \frac{U^2 - V^2}{2}$, d'où

$$\frac{U^2}{4} - \frac{V^2}{4} = 1.$$

C'est une hyperbole équilatère, avec $a = b = 2$.

3. Les sommets sont en $U = \pm 2$, $V = 0$, soit $x' = y' = \pm \sqrt{2}$. Ensuite, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{2}$, donc les foyers vérifient $x' = y' = \pm 2$. **Les sommets sont $(1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$ et $(1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2})$, les foyers $F(3, 1)$ et $F'(-1, -3)$, et l'excentricité vaut $\sqrt{2}$.** Pour contrôler, le sommet $S(1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$ vérifie bien $(x-1)(y+1) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$. La figure suivante récapitule ces éléments.



Corrigé de l'exercice 17 : Une famille de coniques

- La matrice est $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$. On a $A(1, 1)^T = (1 + \lambda)(1, 1)^T$ et $A(-1, 1)^T = (1 - \lambda)(-1, 1)^T$. **Les valeurs propres sont $1 + \lambda$ et $1 - \lambda$, de vecteurs propres $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ et $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$.**
- L'équation réduite est $(1 + \lambda)X^2 + (1 - \lambda)Y^2 = 1$. Si $|\lambda| < 1$, les deux coefficients sont positifs : c'est une ellipse. Si $\lambda = 1$, on obtient $2X^2 = 1$, soit les deux droites parallèles $x + y = \pm 1$. Si $\lambda = -1$, on obtient $2Y^2 = 1$, soit les droites $y - x = \pm 1$. Enfin, si $|\lambda| > 1$, les coefficients sont de signes opposés. **Ellipse pour $|\lambda| < 1$, deux droites parallèles pour $|\lambda| = 1$, hyperbole pour $|\lambda| > 1$.**

3. Pour $|\lambda| < 1$, les demi-axes valent $\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}$, selon u_1 , et $\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}$, selon u_2 . Ils sont égaux si et seulement si $\lambda = 0$. **Le cercle unité correspond à $\lambda = 0$.**
4. Les asymptotes sont les droites du cône isotrope $(1+\lambda)X^2 + (1-\lambda)Y^2 = 0$. **Elles ont pour équations $Y = \pm \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} X$ dans les coordonnées réduites.** Cette formule vaut aussi pour $\lambda < -1$, car le quotient reste positif.

Corrigé de l'exercice 18 : Reconnaître des quadriques

1. L'équation (1) s'écrit $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$: ellipsoïde de demi-axes 2, 1, 2, figure B. L'équation (2) est un hyperboloïde à deux nappes d'axe Ox , figure D. L'équation (3) est un parabolôïde elliptique d'axe Ox , figure A. L'équation (4) est un hyperboloïde à une nappe d'axe Oz , figure E. Enfin, (5) est un cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon 2, figure C. **Association : (1)-B, (2)-D, (3)-A, (4)-E, (5)-C.**
2. Pour (2), la section $x = k$ a pour équation $y^2 + z^2 = k^2 - 1$. C'est le vide si $|k| < 1$, un point si $|k| = 1$, et un cercle de rayon $\sqrt{k^2 - 1}$ si $|k| > 1$. La section $z = k$ est l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1 + k^2$. Pour (4), la section $z = k$ est un cercle de rayon $\sqrt{1 + k^2}$. La section $x = k$ est $y^2 - z^2 = 1 - k^2$: une hyperbole si $|k| \neq 1$, et **deux droites $z = \pm y$ si $|k| = 1$.**
3. Les formes de degré 2 sont $x^2 + 4y^2 + z^2$, $x^2 - y^2 - z^2$, $y^2 + z^2$, $x^2 + y^2 - z^2$ et $x^2 + y^2$. **Leurs signatures sont (3, 0), (1, 2), (2, 0), (2, 1) et (2, 0).**

Corrigé de l'exercice 19 : Un ellipsoïde de révolution

1. La matrice est $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$. On calcule $A(-1, 1, 2)^T = \begin{pmatrix} -7 - 1 - 4, \\ 1 + 7 + 4, \\ 2 + 2 + 20 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -12, 12, 24 \end{pmatrix}^T$. **Donc $(-1, 1, 2)$ est vecteur propre, pour la valeur propre 12.**

2. La trace vaut 24. Par ailleurs, $A - 6I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est de rang 1, car ses lignes sont proportionnelles. Donc 6 est valeur propre de multiplicité au moins 2. La trace impose alors que la dernière valeur propre vaut $24 - 12 = 12$. **Les valeurs propres sont 6 (double) et 12 (simple).** L'espace propre de 6 est le plan $x - y - 2z = 0$, orthogonal à $(-1, 1, 2)$. On prend $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ et $u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$, qui sont orthogonaux et dans ce plan. Puis $u_3 = u_1 \wedge u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2)$, colinéaire à $(-1, 1, 2)$. **La base (u_1, u_2, u_3) est orthonormée directe.**

3. L'équation devient $6X^2 + 6Y^2 + 12Z^2 = 12$, soit

$$\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} + Z^2 = 1.$$

C'est un ellipsoïde de révolution, aplati, d'axe la droite $\mathbb{R}(1, -1, -2)$. Ses demi-axes valent $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ et 1.

Corrigé de l'exercice 20 : Deux quadriques non centrées

1. On complète les carrés : $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$, $2y^2 + 8y = 2(y + 2)^2 - 8$ et $-z^2 + 2z = -(z - 1)^2 + 1$. L'équation devient $(x - 1)^2 + 2(y + 2)^2 - (z - 1)^2 - 1 - 8 + 1 + 7 = 0$, soit

$$(x - 1)^2 + 2(y + 2)^2 - (z - 1)^2 = 1.$$

C'est un hyperboloïde à une nappe de centre $(1, -2, 1)$.

2. Le changement proposé est une rotation, d'inverse $x = \frac{u-v}{\sqrt{2}}$ et $y = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$. Alors $xy = \frac{u^2 - v^2}{2}$, et Σ a pour équation $z = \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2}$. **C'est un parabolôïde hyperbolique.**

3. Si $x = a$ et $z = ay$, alors $z = xy$. **La droite est bien contenue dans Σ** : le parabolôïde hyperbolique est une surface réglée.

Corrigé de l'exercice 21 : Critère de positivité

1. On a $q_a(1, 1, 1) = 3 + 6a = 3(1 + 2a)$ et $q_a(1, -1, 0) = 2 - 2a$. Si $a \leq -\frac{1}{2}$, alors $q_a(1, 1, 1) \leq 0$. Si $a \geq 1$, alors $q_a(1, -1, 0) \leq 0$. **Dans les deux cas, q_a n'est pas définie positive.**

2. On suppose $-\frac{1}{2} < a < 1$, donc $1 + a > 0$. D'abord,
 $x^2 + 2ax(y + z) = (x + a(y + z))^2 - a^2(y + z)^2$. Il reste
 $(1 - a^2)y^2 + 2a(1 - a)yz + (1 - a^2)z^2$. Comme $1 - a^2 > 0$, on factorise, et l'on complète le carré. On obtient

$$q_a = (x + ay + az)^2 + (1 - a^2)\left(y + \frac{a}{1+a}z\right)^2 + \frac{(1-a)(1+2a)}{1+a}z^2.$$

Les trois coefficients sont strictement positifs, et les trois formes linéaires sont échelonnées. **Donc q_a est définie positive si et seulement si $-\frac{1}{2} < a < 1$.**

3. La matrice est $A_a = (1 - a)I_3 + aJ$, de valeurs propres $1 + 2a$ et $1 - a$ (double). Elles sont toutes strictement positives si et seulement si $a > -\frac{1}{2}$ et $a < 1$. **On retrouve la même condition.**

Corrigé de l'exercice 22 : Problème : une famille de quadriques

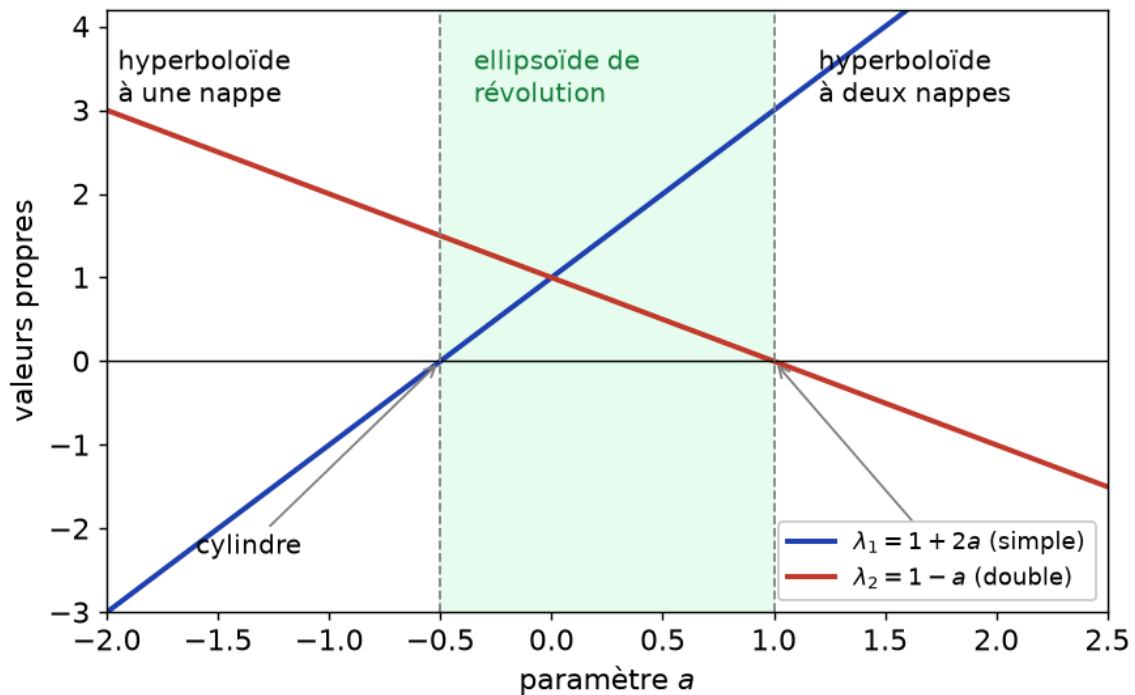
1. Les coefficients diagonaux de A_a valent 1 et les autres valent a . Or $(1 - a)I_3 + aJ$ a exactement ces coefficients. **Donc $A_a = (1 - a)I_3 + aJ$.**

2. La matrice J est de rang 1, donc 0 est valeur propre double, d'espace propre le plan $P_0: x + y + z = 0$. De plus, $J(1, 1, 1)^T = 3(1, 1, 1)^T$. Par conséquent, A_a a pour valeurs propres $\lambda_1 = 1 + 2a$, **d'espace propre $\mathbb{R}(1, 1, 1)$, et $\lambda_2 = 1 - a$, d'espace propre P_0** (pour $a \neq 0$).

3. On prend $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ et $u_3 = u_1 \wedge u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$. En effet, $(1, 1, 1) \wedge (1, -1, 0) = (0 + 1, 1 - 0, -1 - 1) = (1, 1, -2)$. **L'équation de Q_a devient**

$$(1 + 2a)X^2 + (1 - a)(Y^2 + Z^2) = 1.$$

4. On discute selon les signes des coefficients, comme le résume la figure ci-dessous.



Si $a < -\frac{1}{2}$: un coefficient négatif et deux positifs, donc hyperboloïde à une nappe. Si $a = -\frac{1}{2}$: $\frac{3}{2}(Y^2 + Z^2) = 1$, cylindre de révolution de rayon $\sqrt{2/3}$. Si $-\frac{1}{2} < a < 1$: ellipsoïde. Si $a = 1$: $3X^2 = 1$, soit les deux plans parallèles $x + y + z = \pm 1$. Enfin, si $a > 1$: un coefficient positif et deux négatifs, donc hyperboloïde à deux nappes. Dans tous les cas, l'équation ne dépend de (Y, Z) que par $Y^2 + Z^2$. Elle est donc invariante par les rotations d'axe $\mathbb{R}u_1$. **Toutes ces surfaces sont de révolution autour de la droite $\mathbb{R}(1, 1, 1)$.**

5. Pour $-\frac{1}{2} < a < 1$, les demi-axes valent $\frac{1}{\sqrt{1+2a}}$ selon u_1 , et $\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ dans le plan P_0 . Ils sont égaux si et seulement si $1 + 2a = 1 - a$, soit $a = 0$. **La sphère unité correspond à $a = 0$.**

6. Pour $a = 2$, l'équation est $5X^2 - (Y^2 + Z^2) = 1$. La base étant orthonormée, la distance à l'origine vérifie $d^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = 6X^2 - 1$. Or $5X^2 = 1 + Y^2 + Z^2 \geq 1$, donc $X^2 \geq \frac{1}{5}$ et $d^2 \geq \frac{1}{5}$. L'égalité a lieu pour $Y = Z = 0$ et $X = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$. **Les points les plus proches sont $\pm \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 1, 1)$, à la distance $\frac{1}{\sqrt{5}}$.** On vérifie : $q_2(t, t, t) = 3t^2 + 12t^2 = 15t^2 = 1$ pour $t = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

Corrigé de l'exercice 23 : Signature et sous-espaces positifs

1. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base q -orthogonale, ordonnée de sorte que $q(e_i) > 0$ pour $i \leq s$.

Soit $F_+ = \text{Vect}(e_1, \dots, e_s)$. Pour $x = \sum_{i \leq s} x_i e_i$ non nul,

$$q(x) = \sum_{i \leq s} q(e_i) x_i^2 > 0. \text{ Donc } q \text{ est définie positive sur } F_+, \text{ de dimension } s.$$

2. Soit $G = \text{Vect}(e_{s+1}, \dots, e_n)$, de dimension $n - s$. Pour tout $x \in G$,

$$q(x) = \sum_{i > s} q(e_i) x_i^2 \leq 0. \text{ Si } q \text{ est définie positive sur } F, \text{ alors } F \cap G = \{0\}. \text{ Par la}$$

formule de Grassmann, $\dim F + (n - s) \leq n$. Donc $\dim F \leq s$, et s est la dimension maximale cherchée.

3. Pour $x = (a, a, b, b)$, on a $Q(x) = a^2 + b^2$. Donc Q est définie positive sur le plan $\text{Vect}((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$. D'après l'exercice 5, la signature de Q est $(2, 2)$. Par la question 2, aucun sous-espace de dimension 3 ne convient.

4. Soit H de dimension $n - s + 1$. Alors $\dim(H \cap F_+) \geq (n - s + 1) + s - n = 1$. Il existe donc $x \neq 0$ dans $H \cap F_+$. Par la question 1, ce vecteur vérifie $q(x) > 0$.

Point de méthode : pour majorer une dimension, on exhibe un sous-espace complémentaire sur lequel la propriété échoue, puis on applique la formule de Grassmann.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [formes quadratiques, cours de maths en L2](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L2 sur formes quadratiques](#)

- À maîtriser avant : [Isométries, endomorphismes symétriques et théorème spectral](#)
- Chapitre précédent : [Séries de Fourier](#)
- Chapitre suivant : [Intégrales multiples et intégrales curvilignes](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)