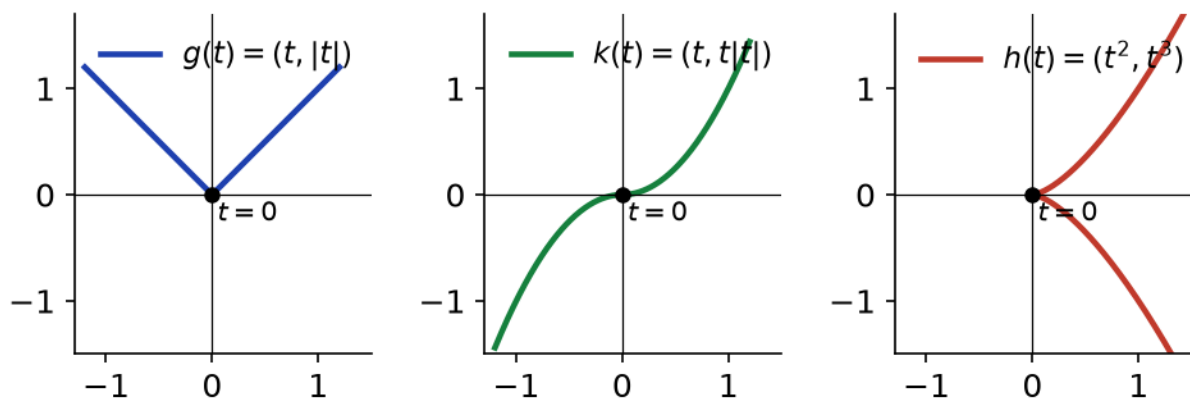


Fonctions vectorielles

Exercice 1 : Dérivabilité par coordonnées

On considère les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par $g(t) = (t, |t|)$, $k(t) = (t, t|t|)$ et $h(t) = (t^2, t^3)$. Leurs trajectoires sont tracées ci-dessous.



1. Rappeler pourquoi une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ est dérivable en un point si et seulement si ses deux coordonnées le sont.
2. Calculer les dérivées à droite et à gauche de g en 0 . La fonction g est-elle dérivable en 0 ?
3. Montrer que k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer k' . La fonction k est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? de classe $\mathcal{C}^2$?
4. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $h'(0)$. Expliquer pourquoi la trajectoire de h présente pourtant une pointe à l'origine.

Exercice 2 : Arche de cycloïde

Soit $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne.

1. Calculer $f'(t)$ et déterminer les valeurs de t pour lesquelles $f'(t) = 0$.
2. Montrer que $|f'(t)| = 2\sin(t/2)$ pour $t \in [0, 2\pi]$.
3. Déterminer la limite de $\frac{f'(t)}{|f'(t)|}$ quand $t \rightarrow 0^+$. Interpréter.
4. Calculer $\ell = \int_0^{2\pi} |f'(t)| dt$, longueur de l'arche. Comparer avec $|f(2\pi) - f(0)|$.

Exercice 3 : Trace, transposée et sous-espaces

Soit $M : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable sur un intervalle I .

1. Montrer que $t \rightarrow \text{tr } M(t)$ et $t \rightarrow M(t)^T$ sont dérivables et calculer leurs dérivées.
2. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée. Justifier que $t \rightarrow P M(t)$ est dérivable, de dérivée $P M'(t)$.
3. On prend $n = 2$, $M(t) = \begin{pmatrix} e^t & t \\ t^2 & \cos t \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $(\text{tr } M)'(t)$, puis vérifier la question 2 par un calcul direct.
4. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace E de dimension finie et $f : I \rightarrow E$ dérivable telle que $f(t) \in F$ pour tout t . Montrer que $f'(t) \in F$ pour tout t . En déduire que si $M(t)$ est symétrique pour tout t , alors $M'(t)$ est symétrique.

Exercice 4 : Fonctions de norme constante

Soit E un espace euclidien et $f : I \rightarrow E$ dérivable sur un intervalle I .

1. Montrer que $t \rightarrow |f(t)|^2$ est dérivable, de dérivée $2\langle f(t), f'(t) \rangle$.
2. En déduire que $|f|$ est constante sur I si et seulement si $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux pour tout t .
3. Soit $f(t) = (\cos^2 t, \sin t \cos t, \sin t)$ dans $\mathbb{R}^3$. Vérifier que $\langle f(t), f'(t) \rangle = 0$ et en déduire que la trajectoire est tracée sur une sphère dont on donnera le rayon.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable telle que $X' = AX$. Montrer que $|X|$ est constante.

Exercice 5 : Dérivée de la norme euclidienne

Soit E un espace euclidien et $f : I \rightarrow E$ dérivable.

1. On suppose que f ne s'annule pas sur I . Montrer que $\varphi = |f|$ est dérivable et que
$$\varphi' = \frac{\langle f, f' \rangle}{|f|}.$$
2. En déduire que $|\varphi'(t)| \leq |f'(t)|$ et préciser le cas d'égalité.
3. Application : $f(t) = (t, t^2)$ sur $]0, +\infty[$. Calculer $\varphi'(t)$ par la formule, puis directement.
4. On suppose que $f(t_0) = 0$ et $f'(t_0) \neq 0$, avec t_0 intérieur à I . Montrer que $|f|$ admet en t_0 une dérivée à droite et une dérivée à gauche, mais n'est pas dérivable en t_0 .

Exercice 6 : Dérivée d'un déterminant

Pour $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$, on note $D_n(t)$ le déterminant de la matrice de taille n dont les coefficients diagonaux valent t et les autres valent 1 .

1. Calculer D_1 et D_2 .
2. En dérivant par rapport aux colonnes, montrer que $D'_n(t) = n D_{n-1}(t)$ pour $n \geq 2$.
3. Calculer $D_n(1)$ pour $n \geq 2$.
4. Montrer par récurrence que $D_n(t) = (t-1)^{n-1}(t+n-1)$. Vérifier le résultat pour $n = 3$ par la règle de Sarrus.

Exercice 7 : Produit mixte d'une courbe de l'espace

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^3$. On pose $\varphi(t) = \det(f(t), f'(t), f''(t))$, déterminant dans la base canonique.

1. Montrer que $\varphi'(t) = \det(f(t), f'(t), f'''(t))$.
2. Calculer φ pour l'hélice $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$ et vérifier la formule de la question 1.
3. On suppose qu'il existe des fonctions continues a, b, c telles que $f''' = a f + b f' + c f''$. Montrer que $\varphi' = c \varphi$ et exprimer φ à l'aide de $\varphi(t_0)$.
4. Application : $f(t) = (1, e^t, e^{-t})$. Vérifier que $f''' = f'$, puis calculer φ de deux façons.

Exercice 8 : Wronskien d'une équation différentielle

Soit a, b continues sur un intervalle I , et y_1, y_2 deux solutions de $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.

On pose $W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$.

1. Calculer W' par la règle de dérivation d'un déterminant et montrer que $W' = -a W$.
2. En déduire, pour $t_0 \in I$, que $W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$. Que peut-on dire si W s'annule en un point ?
3. Sur $]0, +\infty[$, on considère $y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = 0$. Vérifier que $y_1(t) = t$ et $y_2(t) = 1/t$ sont solutions, calculer leur wronskien et comparer avec la question 2.

Exercice 9 : Produit matriciel et inverse d'une matrice

Soit $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable.

1. Montrer que $(A^2)' = A'A + AA'$. Avec $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, comparer $(A^2)'$ et $2AA'$.
2. On suppose $A(t)$ inversible pour tout t . Justifier que $t \rightarrow A(t)^{-1}$ est dérivable et établir $(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$.
3. Application : $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$ sur $I =]-1, 1[$. Calculer $A(t)^{-1}$, puis $(A^{-1})'(t)$ de deux façons.

Exercice 10 : Matrices de rotation

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $R'(t) = R(t)J = JR(t)$.
2. Soit $s \in \mathbb{R}$ fixé et $\Phi(t) = R(s+t)R(-t)$. Montrer que Φ est constante. En déduire

$$R(s+t) = R(s)R(t), \text{ sachant que } R(t)R(-t) = I_2.$$

3. Soit $M : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable, à valeurs orthogonales. Montrer que $M(t)^T M'(t)$ est antisymétrique pour tout t . Vérifier ce résultat pour $M = R$.
4. Interpréter géométriquement les vecteurs $R'(t)e_1$ et $R'(t)e_2$, où (e_1, e_2) est la base canonique.

Exercice 11 : Changement de paramètre

Soit $f(t) = (\cos t, \sin t)$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(s) = s^2$.

1. Calculer $(f \circ \varphi)'(s)$ par la formule de dérivation d'une composée, puis directement.
2. Calculer $|(f \circ \varphi)'(s)|$. En quel point la vitesse s'annule-t-elle ?
3. Soit $\theta : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et strictement croissante. Montrer que $(f \circ \theta)'(s)$ est un multiple positif ou nul de $f'(\theta(s))$, et qu'il est non nul et de même sens si $\theta'(s) > 0$.
4. Calculer la dérivée de $s \rightarrow f(\ln s)$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 12 : Spirale logarithmique et dérivées successives

Soit $f(t) = e^t(\cos t, \sin t)$ dans $\mathbb{R}^2$ euclidien.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(t) = 2^{n/2} e^t (\cos(t + n\pi/4), \sin(t + n\pi/4)).$$
2. Montrer que l'angle entre $f(t)$ et $f'(t)$ vaut $\pi/4$ pour tout t .
3. Énoncer la formule de Leibniz pour $\langle f, g \rangle^{(n)}$.

4. En calculant $(|f|^2)^{(n)}$ de deux façons, établir que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos\left(\frac{(2k-n)\pi}{4}\right) = 2^{n/2}$.

Exercice 13 : Intégrales de fonctions vectorielles

1. Calculer $\int_0^\pi (\cos t, \sin t, t) dt$.
2. Calculer $\int_0^1 M(t) dt$ pour $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 3t^2 & e^t \end{pmatrix}$. Vérifier que $\text{tr} \int_0^1 M = \int_0^1 \text{tr} M$.
3. Pour $u(t) = (\cos t, \sin t)$, comparer $\left\| \int_0^\pi u \right\|$ et $\int_0^\pi |u|$ (norme euclidienne).
4. Pour $x \in [0, 2\pi]$, on pose $U(x) = \int_0^x u(t) dt$. Calculer $U(x)$ et montrer que $|U(x)| = 2|\sin(x/2)|$. Retrouver la majoration $|U(x)| \leq x$.

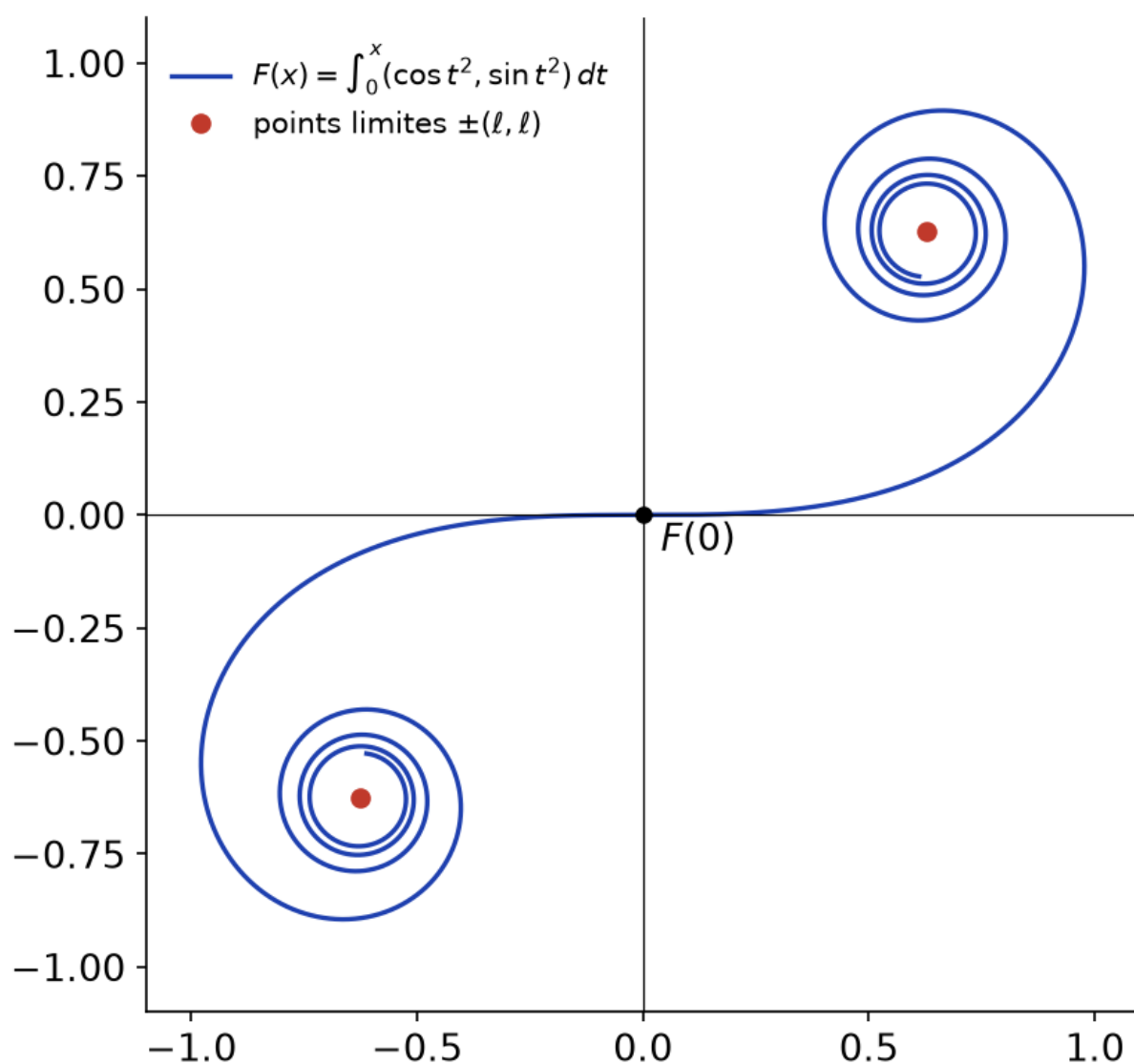
Exercice 14 : Sommes de Riemann et barycentre

Pour $n \geq 1$, on note $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{k\pi}{n}, \sin \frac{k\pi}{n} \right)$, isobarycentre de n points du demi-cercle unité.

1. Reconnaître une somme de Riemann et en déduire la limite de S_n .
2. En identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, montrer que $S_n = \frac{1}{n} \left(-1, \cot \frac{\pi}{2n} \right)$.
3. Retrouver la limite de la question 1 à partir de la question 2.

Exercice 15 : Spirale de Cornu

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x (\cos(t^2), \sin(t^2)) dt$. Sa trajectoire est tracée ci-dessous.



1. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.
2. Montrer que $|F'(x)| = 1$ et en déduire que $|F(x)| \leq |x|$.
3. Montrer que F est impaire.

- Calculer la dérivée de $G : x \rightarrow \int_x^{2x} (\cos(t^2), \sin(t^2)) dt$.
- Déterminer les réels $x \geq 0$ en lesquels la tangente à la trajectoire est verticale.

Exercice 16 : Accroissements finis sur le cercle

On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ et on pose $f(t) = e^{it}$.

- Montrer qu'il n'existe aucun $c \in]0, 2\pi[$ tel que $f(2\pi) - f(0) = 2\pi f'(c)$.
- Par l'inégalité des accroissements finis, montrer que $|e^{ib} - e^{ia}| \leq |b - a|$ pour tous réels a, b .
- Calculer exactement $|e^{ib} - e^{ia}|$ et en déduire que $|\sin u| \leq |u|$ pour tout réel u .
- Soit $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $|g'(t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$. Montrer que g admet une limite en $+\infty$.

Exercice 17 : Unicité par les accroissements finis

Soit E un espace normé de dimension finie, $k > 0$ et $f : [0, 1] \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $|f'(t)| \leq k|f(t)|$ pour tout $t \in [0, 1]$.

- On pose $h = \min\left(1, \frac{1}{2k}\right)$ et $m = \max_{[0, h]} |f|$. Justifier l'existence de m , puis montrer que $m \leq \frac{m}{2}$. Conclure que f est nulle sur $[0, h]$.
- Soit $s = \sup\{\tau \in [0, 1] : f = 0 \text{ sur } [0, \tau]\}$. Montrer que f est nulle sur $[0, s]$, puis que $s = 1$.
- Application : soit $A : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée. Montrer que le problème $X' = A(t)X$, $X(0) = X_0$ admet au plus une solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

Exercice 18 : Déterminant au voisinage de l'identité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi(t) = \det(I_n + tA)$.

1. Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Calculer $\varphi'(0)$ en dérivant par rapport aux colonnes.

2. En déduire que $\det(I_n + tA) = 1 + t \operatorname{tr} A + o(t)$ quand $t \rightarrow 0$.

3. Soit $M : I \rightarrow \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ dérivable. En écrivant

$\det M(t+h) = \det M(t) \det(M(t)^{-1}M(t+h))$, montrer que

$$(\det M)'(t) = \det M(t) \operatorname{tr}(M(t)^{-1}M'(t)).$$

4. Vérifier cette formule pour $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$ sur $] -1, 1[$.

Exercice 19 : Formules de Taylor pour l'exponentielle complexe

On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ et on pose $f(t) = e^{it} = (\cos t, \sin t)$.

1. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 en 0. En déduire $|e^{it} - 1 - it| \leq \frac{t^2}{2}$, puis $|1 - \cos t| \leq \frac{t^2}{2}$ et $|\sin t - t| \leq \frac{t^2}{2}$.

2. Calculer $f^{(k)}$ et appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n en 0. En déduire que

$$e^{it} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!}.$$

3. Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0. En déduire les limites de $\frac{1 - \cos t}{t^2}$ et de $\frac{t - \sin t}{t^2}$ en 0.

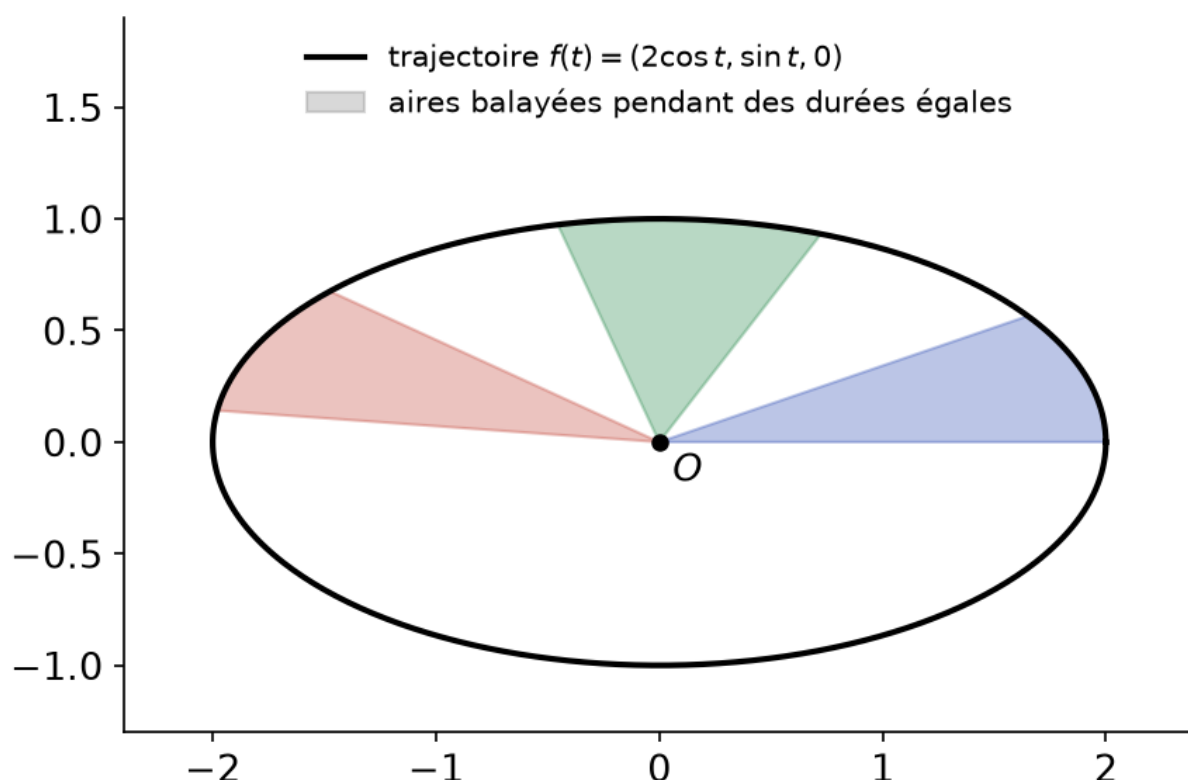
Exercice 20 : Inégalité de Landau-Kolmogorov

Soit E un espace normé de dimension finie et $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose $|f(t)| \leq M_0$ et $|f''(t)| \leq M_2$ pour tout réel t , avec $M_0 > 0$ et $M_2 > 0$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Majorer $|f(x + h) - f(x) - hf'(x)|$ et $|f(x - h) - f(x) + hf'(x)|$.
2. En déduire que $|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ pour tout $h > 0$.
3. Montrer que f' est bornée et que $|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$ pour tout x .
4. Tester cette inégalité sur $f(t) = (\cos \omega t, \sin \omega t)$, avec $\omega > 0$ et la norme euclidienne.

Exercice 21 : Problème : mouvement à accélération centrale

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne orientée usuelle et du produit vectoriel $\wedge$, caractérisé par $\langle u \wedge v, w \rangle = \det(u, v, w)$. On rappelle qu'il est bilinéaire, antisymétrique, et que $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v . Soit $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f''(t) = \lambda(t)f(t)$ pour tout t .



1. On pose $C(t) = f(t) \wedge f'(t)$. Montrer que C est constante. On note C_0 sa valeur.
2. On suppose $C_0 \neq 0$. Montrer que $f(t)$ appartient au plan $C_0^\perp$ pour tout t .
3. Exemple : $a, b > 0$ et $f(t) = (a \cos t, b \sin t, 0)$. Vérifier que $f'' = -f$ et calculer C_0 .
4. On admet que l'aire balayée par le segment $[O, f(u)]$ pour u entre 0 et $t \geq 0$ vaut $\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t |f(u) \wedge f'(u)| du$. Montrer que $\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2} |C_0| t$ (loi des aires). Dans l'exemple, en déduire l'aire de l'ellipse.
5. On suppose λ constante égale à $-\omega^2$ avec $\omega > 0$. Montrer que $\mathcal{E} = |f'|^2 + \omega^2 |f|^2$ est constante et la calculer dans l'exemple.

Exercice 22 : Problème : groupe à un paramètre de matrices

Soit $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable telle que $M(0) = I_n$ et $M(s+t) = M(s)M(t)$ pour

tous réels s, t . On pose $A = M'(0)$ et on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative telle que $|I_n| = 1$.

1. En dérivant par rapport à s , puis par rapport à t , montrer que

$$M'(t) = AM(t) = M(t)A.$$

2. En déduire que M est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $M^{(k)}(t) = A^k M(t)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $K = \max_{|u| \leq |t|} |M(u)|$. Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que

$$\left\| M(t) - \sum_{k=0}^N \frac{t^k}{k!} A^k \right\| \leq \frac{K |A|^{N+1} |t|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

En déduire que $M(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$.

4. On pose $\delta(t) = \det M(t)$. Montrer que $\delta'(0) = \text{tr} A$, puis que $\delta' = (\text{tr} A) \delta$. En déduire $\delta(t) = e^{t \text{tr} A}$ et que $M(t)$ est toujours inversible.

5. Vérifier tous ces résultats pour $M = R$, la fonction de l'exercice 10.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [fonctions vectorielles, cours de maths spé](#)
- À maîtriser avant : [Normes, espaces vectoriels normés et suites](#)
- Chapitre précédent : [Séries entières](#)
- Chapitre suivant : [Intégrales généralisées et fonctions intégrables](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)