

Fonctions vectorielles

Corrigé de l'exercice 1 : Dérivabilité par coordonnées

1. Dans $\mathbb{R}^2$, toutes les normes sont équivalentes. Avec la norme $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$, un vecteur tend vers (ℓ_1, ℓ_2) si et seulement si chaque coordonnée tend vers ℓ_i . Or le taux d'accroissement de $f = (f_1, f_2)$ a pour coordonnées les taux de f_1 et de f_2 . **Donc f est dérivable en a si et seulement si f_1 et f_2 le sont, et $f'(a) = (f'_1(a), f'_2(a))$.**
2. Pour $t > 0$, $\frac{g(t) - g(0)}{t} = \left(1, \frac{|t|}{t}\right) = (1, 1)$. Pour $t < 0$, ce taux vaut $(1, -1)$. Ainsi $g'_d(0) = (1, 1)$ et $g'_g(0) = (1, -1)$; **ces vecteurs diffèrent, donc g n'est pas dérivable en 0 .** La trajectoire présente un point anguleux, comme le montre la figure de l'énoncé.

Questions 3 et 4

3. La première coordonnée t est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Étudions $k_2(t) = t|t|$. Sur $]0, +\infty[$, $k_2(t) = t^2$ et $k'_2(t) = 2t$. Sur $] -\infty, 0[$, $k_2(t) = -t^2$ et $k'_2(t) = -2t$. En 0 , le taux $\frac{t|t|}{t} = |t|$ tend vers 0 . Donc k_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $k'_2(t) = 2|t|$, qui est continue. En revanche, $t \rightarrow 2|t|$ n'est pas dérivable en 0 . **Par conséquent, $k'_2(t) = (1, 2|t|)$: k est de classe $\mathcal{C}^1$ mais pas deux fois dérivable en 0 , donc pas de classe $\mathcal{C}^2$.**
4. Les coordonnées t^2 et t^3 sont polynomiales, donc h est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $h'(t) = (2t, 3t^2)$. **En particulier $h'(0) = (0, 0)$.** La vitesse s'annule en 0 : le mobile s'arrête puis repart dans le sens opposé. En effet, pour $t \neq 0$, la direction $\frac{h'(t)}{|h'(t)|}$ vaut $\frac{(2, 3t)}{\sqrt{4 + 9t^2}} \text{signe}(t)$. Elle tend vers $(1, 0)$ en 0^+ et vers $(-1, 0)$ en 0^- . La trajectoire $y = \pm x^{3/2}$ présente donc une pointe (point de rebroussement). Ainsi, une fonction très

régulière peut avoir une trajectoire non lisse là où sa vitesse s'annule.

Point de méthode : dérivabilité de la fonction et régularité géométrique de la trajectoire sont deux choses distinctes ; la seconde demande aussi $f'(t) \neq 0$.

Corrigé de l'exercice 2 : Arche de cycloïde

1. Les coordonnées sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. On obtient $f'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$. Ce vecteur est nul si et seulement si $\cos t = 1$ et $\sin t = 0$, c'est-à-dire $t \in 2\pi\mathbb{Z}$. **Sur** $[0, 2\pi]$, $f'(t) = 0$ **exactement pour** $t = 0$ **et** $t = 2\pi$.
2. On calcule $|f'(t)|^2 = (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 2 - 2\cos t$. Or $1 - \cos t = 2\sin^2(t/2)$, donc $|f'(t)|^2 = 4\sin^2(t/2)$. Pour $t \in [0, 2\pi]$, on a $t/2 \in [0, \pi]$, donc $\sin(t/2) \geq 0$. **Ainsi** $|f'(t)| = 2\sin(t/2)$.
3. Pour $t \in]0, 2\pi[$, on utilise $1 - \cos t = 2\sin^2(t/2)$ et $\sin t = 2\sin(t/2)\cos(t/2)$. Il vient

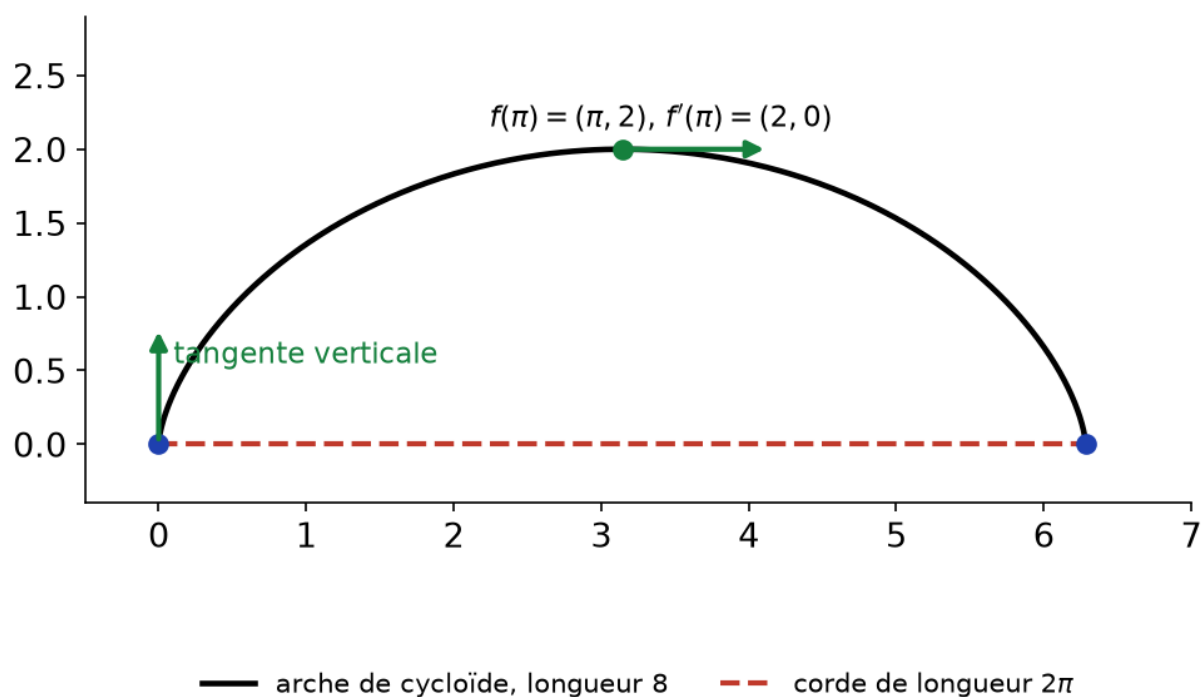
$$\frac{f'(t)}{|f'(t)|} = \frac{(2\sin^2(t/2), 2\sin(t/2)\cos(t/2))}{2\sin(t/2)} = (\sin(t/2), \cos(t/2)).$$

Cette direction tend vers $(0, 1)$ quand $t \rightarrow 0^+$: la trajectoire arrive à l'origine avec une tangente verticale.

4. On a $\ell = \int_0^{2\pi} 2\sin(t/2) dt = [-4\cos(t/2)]_0^{2\pi} = 4 + 4$. **Donc** $\ell = 8$. Par ailleurs,

$$f(2\pi) - f(0) = (2\pi, 0), \text{ de norme } 2\pi \approx 6,28. \text{ On retrouve } |f(2\pi) - f(0)| \leq \int_0^{2\pi} |f'| :$$

la corde est plus courte que l'arc. La figure ci-dessous résume l'étude : sommet $f(\pi) = (\pi, 2)$ où la vitesse $(2, 0)$ est horizontale, et tangentes verticales aux extrémités.



Corrigé de l'exercice 3 : Trace, transposée et sous-espaces

- La trace $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ et la transposition sont linéaires. D'après le cours, $L \circ M$ est dérivable et $(L \circ M)' = L(M')$ pour toute application linéaire L en dimension finie. **Donc** $(\text{tr } M)' = \text{tr}(M')$ **et** $(M^T)' = (M')^T$.
- L'application $X \rightarrow PX$ est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. **Le même résultat donne** $(PM)' = PM'$.
- D'abord, $\text{tr } M(t) = e^t + \cos t$. **Donc** $(\text{tr } M)'(t) = e^t - \sin t$, qui est bien la trace de $M'(t) = \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ 2t & -\sin t \end{pmatrix}$. Ensuite, $PM(t) = \begin{pmatrix} e^t + t^2 & t + \cos t \\ t^2 & \cos t \end{pmatrix}$, donc $(PM)'(t) = \begin{pmatrix} e^t + 2t & 1 - \sin t \\ 2t & -\sin t \end{pmatrix}$. Enfin, $PM'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ 2t & -\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t + 2t & 1 - \sin t \\ 2t & -\sin t \end{pmatrix}$. **Les deux calculs coïncident.**
- Soit G un supplémentaire de F dans E et p la projection sur G parallèlement à F . Elle est linéaire et $\ker p = F$. Par hypothèse, $p \circ f = 0$. En dérivant, $p(f'(t)) = (p \circ f)'(t) = 0$, donc $f'(t) \in \ker p = F$. **Ainsi** $f'(t) \in F$ **pour tout** t . L'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Par conséquent, si $M(t)$ est symétrique pour tout t , alors $M'(t)$ l'est aussi.

Corrigé de l'exercice 4 : Fonctions de norme constante

1. Le produit scalaire est bilinéaire. D'après le cours, $\langle f, f \rangle$ est dérivable et $\langle f, f \rangle' = \langle f', f \rangle + \langle f, f' \rangle$. Par symétrie, $(|f|^2)' = 2\langle f, f' \rangle$.
2. Comme $|f| \geq 0$, la fonction $|f|$ est constante si et seulement si $|f|^2$ l'est. Or, sur l'intervalle I , une fonction réelle dérivable est constante si et seulement si sa dérivée est nulle. **Donc $|f|$ est constante si et seulement si $\langle f(t), f'(t) \rangle = 0$ pour tout $t \in I$.**
3. On a $f'(t) = (-2\cos t \sin t, \cos^2 t - \sin^2 t, \cos t)$. Ensuite,
$$\langle f, f' \rangle = -2\cos^3 t \sin t + \sin t \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t) + \sin t \cos t = \sin t \cos t (1 - \cos^2 t - \sin^2 t) = 0.$$
Donc $|f|$ est constante, égale à $|f(0)| = |(1, 0, 0)| = 1$. La trajectoire est tracée sur la sphère unité (rayon 1). On le vérifie directement :
$$\cos^4 t + \sin^2 t \cos^2 t + \sin^2 t = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$
4. D'après la question 1, $(|X|^2)' = 2\langle X, AX \rangle = 2X^T A X$. Ce réel est égal à sa transposée $X^T A^T X = -X^T A X$. Il est donc nul. **Par la question 2, $|X|$ est constante.**

Corrigé de l'exercice 5 : Dérivée de la norme euclidienne

1. La fonction $|f|^2$ est dérivable et strictement positive sur I . De plus, la racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$. Par composition, $\varphi = \sqrt{|f|^2}$ est dérivable et

$$\varphi' = \frac{(|f|^2)'}{2\sqrt{|f|^2}} = \frac{2\langle f, f' \rangle}{2|f|}.$$

Ainsi $\varphi' = \frac{\langle f, f' \rangle}{|f|}.$

2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $|\langle f, f' \rangle| \leq |f| |f'|$. En divisant par $|f| > 0$, on

obtient $|\varphi'(t)| \leq |f'(t)|$, avec égalité si et seulement si $f(t)$ et $f'(t)$ sont colinéaires.

3. Pour $t > 0$, $f(t) \neq 0$, $f'(t) = (1, 2t)$, $\langle f, f' \rangle = t + 2t^3$ et $|f(t)| = t\sqrt{1+t^2}$. La formule donne $\varphi'(t) = \frac{t(1+2t^2)}{t\sqrt{1+t^2}}$. Directement, $\varphi(t) = t\sqrt{1+t^2}$ et $\varphi'(t) = \sqrt{1+t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}$. **Dans les deux cas, $\varphi'(t) = \frac{1+2t^2}{\sqrt{1+t^2}}$.**
4. Comme $f(t_0) = 0$, on a $\frac{|f(t)| - |f(t_0)|}{t - t_0} = \frac{|t - t_0|}{t - t_0} \left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right\|$. La norme tend vers $|f'(t_0)|$ par continuité de la norme. Le premier facteur vaut 1 à droite et -1 à gauche. **Ainsi la dérivée à droite vaut $|f'(t_0)|$ et la dérivée à gauche $-|f'(t_0)|$; elles diffèrent car $f'(t_0) \neq 0$, donc $|f|$ n'est pas dérivable en t_0 .** L'exemple $f(t) = (t, 0)$ en 0 redonne la valeur absolue.

Corrigé de l'exercice 6 : Dérivée d'un déterminant

1. $D_1(t) = t$ et $D_2(t) = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1$.
2. La colonne j s'écrit $C_j(t) = U + (t-1)e_j$, où U est la colonne dont tous les coefficients valent 1. Donc $C'_j(t) = e_j$. Le déterminant est multilinéaire par rapport aux colonnes, donc

$$D'_n(t) = \sum_{j=1}^n \det(C_1, \dots, C_{j-1}, e_j, C_{j+1}, \dots, C_n).$$

Développons le j -ième terme selon la colonne j . Celle-ci ne contient qu'un 1, en ligne j , de signe $(-1)^{j+j} = 1$. Le mineur obtenu en supprimant la ligne j et la colonne j est de taille $n-1$, avec des t sur la diagonale et des 1 ailleurs. Il vaut donc $D_{n-1}(t)$. **Ainsi $D'_n(t) = n D_{n-1}(t)$.**

Questions 3 et 4

3. Pour $t = 1$, la matrice a toutes ses colonnes égales. **Donc** $D_n(1) = 0$ **pour** $n \geq 2$.

4. Posons $P_n(t) = (t-1)^{n-1}(t+n-1)$. On a $P_1 = D_1$ et $P_2 = D_2$. Supposons $D_{n-1} = P_{n-1}$ pour un $n \geq 2$. On calcule

$$P'_n(t) = (t-1)^{n-2}[(n-1)(t+n-1) + (t-1)] = (t-1)^{n-2}[nt + n^2 - 2n] = n P_{n-1}(t).$$

Ainsi D_n et P_n ont la même dérivée nP_{n-1} sur $\mathbb{R}$ et la même valeur 0 en 1. Elles sont donc égales. **Par récurrence**, $D_n(t) = (t-1)^{n-1}(t+n-1)$. Pour $n = 3$, Sarrus donne $D_3(t) = t^3 + 1 + 1 - t - t - t = t^3 - 3t + 2$. Or

$$(t-1)^2(t+2) = (t^2 - 2t + 1)(t+2) = t^3 - 3t + 2. \text{ Le résultat est confirmé.}$$

Point de méthode : quand les colonnes dérivées sont des vecteurs de base, chaque terme de D' se réduit à un mineur, ce qui donne une relation de récurrence.

Corrigé de l'exercice 7 : Produit mixte d'une courbe de l'espace

1. Le déterminant est trilineaire et f, f', f'' sont dérivables. La règle de dérivation multilinéaire donne

$$\varphi' = \det(f', f', f'') + \det(f, f'', f'') + \det(f, f', f''').$$

Les deux premiers déterminants ont deux colonnes égales, donc sont nuls. **Il reste**

$$\varphi' = \det(f, f', f''').$$

Questions 2 à 4

2. On a $f' = (-\sin t, \cos t, 1)$, $f'' = (-\cos t, -\sin t, 0)$ et $f''' = (\sin t, -\cos t, 0)$. En développant selon la troisième ligne,

$$\varphi(t) = \begin{vmatrix} \cos t & -\sin t & -\cos t \\ \sin t & \cos t & -\sin t \\ t & 1 & 0 \end{vmatrix} = t(\sin^2 t + \cos^2 t) - 1 \cdot (-\cos t \sin t + \sin t \cos t) = t.$$

Donc $\varphi'(t) = 1$. De même,

$$\det(f, f', f''') = t(\sin t \cos t - \sin t \cos t) - (-\cos^2 t - \sin^2 t) = 1. \text{ On obtient } \varphi(t) = t \text{ et la formule est vérifiée.}$$

3. Par linéarité par rapport à la troisième colonne,

$\det(f, f', af + bf' + cf'') = c \det(f, f', f'')$, car les deux autres termes ont deux colonnes colinéaires. Donc $\varphi' = c\varphi$. C'est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 à

coefficient continu. **Ainsi** $\varphi(t) = \varphi(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t c(s) ds\right)$; **en particulier, φ est**

identiquement nulle dès qu'elle s'annule en un point.

4. On a $f' = (0, e^t, -e^{-t})$, $f'' = (0, e^t, e^{-t})$ et $f''' = (0, e^t, -e^{-t}) = f'$. Ici $a = 0$, $b = 1$ et $c = 0$, donc φ est constante. En $t = 0$,

$\varphi(0) = \det((1, 1, 1), (0, 1, -1), (0, 1, 1)) = 1 \times (1 + 1) = 2$. Directement, en développant selon la première ligne, $\varphi(t) = 1 \times (e^t e^{-t} + e^{-t} e^t) = 2$. **Les deux méthodes donnent $\varphi = 2$.**

Corrigé de l'exercice 8 : Wronskien d'une équation différentielle

1. Les solutions sont de classe $\mathcal{C}^2$. On dérive le déterminant colonne par colonne :

$$W' = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1[\backslash \text{p m e m e ?}]' & y_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2' \\ y_1[\backslash \text{p m e m e ?}] & y_2'' \end{vmatrix} = y_1 y_2'' - y_2 y_1''.$$

En effet, les termes $y_1' y_2'$ se compensent. Ensuite, on remplace $y_i'' = -a y_i' - b y_i$:

$$W' = y_1(-a y_2' - b y_2) - y_2(-a y_1' - b y_1) = -a(y_1 y_2' - y_2 y_1').$$

Donc $W' = -aW$.

2. C'est une équation linéaire d'ordre 1. Sa solution valant $W(t_0)$ en t_0 est unique. **Ainsi**

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right). \text{ Comme l'exponentielle ne s'annule pas, } W \text{ est soit}$$

identiquement nul, soit jamais nul.

3. Pour $y_1 = t$: $0 + \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2} = 0$. Pour $y_2 = 1/t$: $y_2' = -1/t^2$ et $y_2'' = 2/t^3$, donc $\frac{2}{t^3} - \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^3} = 0$. Ce sont bien des solutions. Leur wronskien vaut

$$W(t) = t \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) - \frac{1}{t} \cdot 1 = -\frac{2}{t}. \text{ Avec } a(t) = 1/t \text{ et } t_0 = 1, \text{ la question 2 donne}$$

$$W(t) = W(1)e^{-\ln t} = -2 \cdot \frac{1}{t}. \text{ On retrouve } W(t) = -2/t.$$

Corrigé de l'exercice 9 : Produit matriciel et inverse d'une matrice

- Le produit matriciel $(X, Y) \rightarrow XY$ est bilinéaire. Donc $(AA')' = A'A + AA'$. Pour l'exemple, $A'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $A^2 = tI_2$, donc $(A^2)' = I_2$. En revanche, $2AA' = 2\begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ainsi $(A^2)' = I_2 \neq 2AA'$.
- D'après la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{com}(A)^T$, chaque coefficient de A^{-1} est un quotient de polynômes en les coefficients de A , de dénominateur $\det A$ qui ne s'annule pas. Ces coefficients sont donc dérivables. Ensuite, on dérive $AA^{-1} = I_n$:
 $A'A^{-1} + A(A^{-1})' = 0$. **En multipliant à gauche par A^{-1} ,**
 $(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$.
- On a $\det A(t) = 1 - t^2 \neq 0$ sur $] -1, 1[$ et $A(t)^{-1} = \frac{1}{1-t^2} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$.
 Première méthode : on dérive les coefficients. On trouve $\left(\frac{1}{1-t^2}\right)' = \frac{2t}{(1-t^2)^2}$ et
 $\left(\frac{-t}{1-t^2}\right)' = -\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}$. Seconde méthode : avec $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
 $A^{-1}A'A^{-1} = \frac{1}{(1-t^2)^2} \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ -t & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1-t^2)^2} \begin{pmatrix} -2t & 1+t^2 \\ 1+t^2 & -2t \end{pmatrix}$.
Les deux méthodes donnent $(A^{-1})'(t) = \frac{1}{(1-t^2)^2} \begin{pmatrix} 2t & -(1+t^2) \\ -(1+t^2) & 2t \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 10 : Matrices de rotation

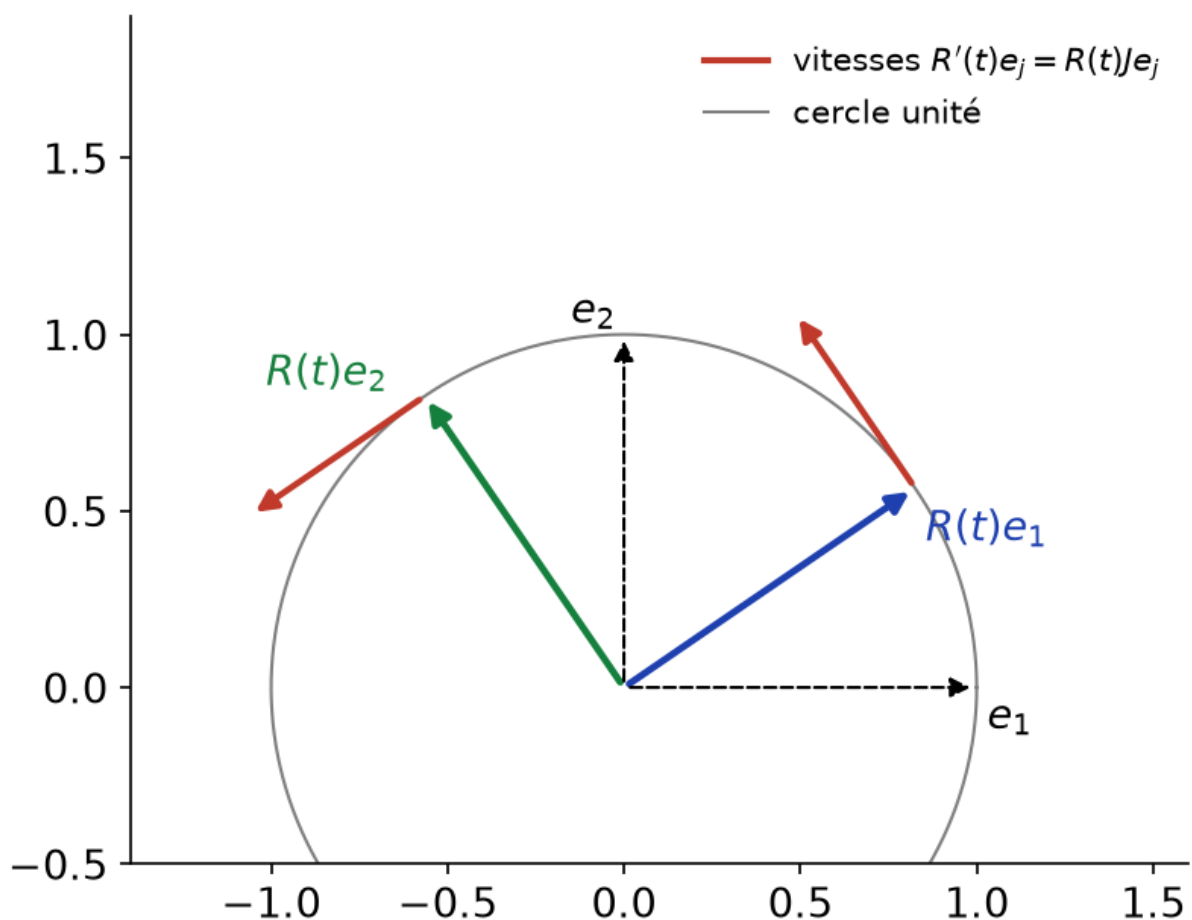
- En dérivant coefficient par coefficient, $R'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}$. Par ailleurs, $R(t)J$ et $JR(t)$ valent tous deux $\begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}$ après calcul. **Donc**
 $R'(t) = R(t)J = JR(t)$.
- Par composition, $t \rightarrow R(-t)$ a pour dérivée $-R'(-t) = -JR(-t)$. La règle du produit

donne

$$\Phi'(t) = R(s+t)J R(-t) - R(s+t)JR(-t) = 0.$$

Sur $\mathbb{R}$, Φ est donc constante, égale à $\Phi(0) = R(s)$. Ainsi $R(s+t)R(-t) = R(s)$. Il suffit alors de multiplier à droite par $R(t)$, en utilisant $R(-t)R(t) = I_2$. **On obtient** $R(s+t) = R(s)R(t)$.

- Dérivons $M^T M = I_n$ avec la règle du produit et la linéarité de la transposition : $(M')^T M + M^T M' = 0$. Or $(M^T M')^T = (M')^T M$. **Donc $M^T M'$ est antisymétrique.** Pour $M = R$, on a $R^T R' = R^T R J = J$, qui est bien antisymétrique.
- On a $R'(t)e_1 = R(t)J e_1 = R(t)e_2$ et $R'(t)e_2 = R(t)J e_2 = -R(t)e_1$. **Le point $R(t)e_j$ décrit le cercle unité à vitesse de norme 1, et sa vitesse est obtenue en tournant $R(t)e_j$ d'un quart de tour direct.** La figure ci-dessous représente la base tournée et ces deux vitesses.



Corrigé de l'exercice 11 : Changement de paramètre

1. Par la règle de composition, $(f \circ \varphi)'(s) = \varphi'(s)f'(\varphi(s)) = 2s(-\sin s^2, \cos s^2)$.
Directement, $(f \circ \varphi)(s) = (\cos s^2, \sin s^2)$, dont la dérivée est $(-2s \sin s^2, 2s \cos s^2)$.
Les deux calculs donnent $(f \circ \varphi)'(s) = 2s(-\sin s^2, \cos s^2)$.
2. Comme $|(-\sin s^2, \cos s^2)| = 1$, $|(f \circ \varphi)'(s)| = 2|s|$, **qui s'annule seulement en**
 $s = 0$. Le point y rebrousse chemin sur le cercle.
3. La règle de composition donne $(f \circ \theta)'(s) = \theta'(s)f'(\theta(s))$. Comme θ est croissante, ses
taux d'accroissement sont positifs, donc $\theta'(s) \geq 0$. **Ainsi $(f \circ \theta)'(s)$ est un multiple positif**
ou nul de $f'(\theta(s))$; si $\theta'(s) > 0$, il est non nul et de même sens. Un reparamétrage
croissant conserve donc la tangente et le sens de parcours.
4. Avec $\theta = \ln$, dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $1/s$,
 $(f(\ln s))' = \frac{1}{s}(-\sin(\ln s), \cos(\ln s))$.

Corrigé de l'exercice 12 : Spirale logarithmique et dérivées successives

1. Les coordonnées sont produits de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Raisonnons par
récurrence. La formule est vraie pour $n = 0$. Supposons $f^{(n)}(t) = 2^{n/2}e^t(\cos\theta, \sin\theta)$
avec $\theta = t + n\pi/4$. En dérivant,
$$f^{(n+1)}(t) = 2^{n/2}e^t(\cos\theta - \sin\theta, \sin\theta + \cos\theta).$$

Or $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\cos(\theta + \pi/4)$ et $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + \pi/4)$. **Donc**
 $f^{(n+1)}(t) = 2^{(n+1)/2}e^t(\cos(t + (n+1)\pi/4), \sin(t + (n+1)\pi/4))$, **ce qui achève la**
récurrence.
2. On a $|f(t)| = e^t$, $|f'(t)| = \sqrt{2}e^t$ et $\langle f, f' \rangle = \sqrt{2}e^{2t}\cos(\pi/4) = e^{2t}$. Le cosinus de
l'angle vaut donc $\frac{e^{2t}}{\sqrt{2}e^{2t}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **L'angle entre $f(t)$ et $f'(t)$ vaut $\pi/4$ pour tout t .**
3. Le produit scalaire est bilinéaire. **Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$, alors**

$$\langle f, g \rangle^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle f^{(k)}, g^{(n-k)} \rangle.$$

4. D'une part, $|f|^2 = e^{2t}$, donc $(|f|^2)^{(n)} = 2^n e^{2t}$. D'autre part, $f^{(k)}$ et $f^{(n-k)}$ ont pour angles polaires $t + k\pi/4$ et $t + (n-k)\pi/4$. Leur produit scalaire vaut donc $2^{k/2} 2^{(n-k)/2} e^{2t} \cos\left(\frac{(2k-n)\pi}{4}\right)$. La formule de Leibniz donne

$$2^n e^{2t} = 2^{n/2} e^{2t} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos\left(\frac{(2k-n)\pi}{4}\right).$$

En simplifiant par $2^{n/2} e^{2t}$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos\left(\frac{(2k-n)\pi}{4}\right) = 2^{n/2}$. Pour $n = 2$, on vérifie $0 + 2 + 0 = 2$.

Corrigé de l'exercice 13 : Intégrales de fonctions vectorielles

1. On intègre coordonnée par coordonnée : $\int_0^\pi \cos t \, dt = 0$, $\int_0^\pi \sin t \, dt = 2$ et

$$\int_0^\pi t \, dt = \frac{\pi^2}{2}. \text{ Donc } \int_0^\pi (\cos t, \sin t, t) \, dt = \left(0, 2, \frac{\pi^2}{2}\right).$$

2. De même, $\int_0^1 1 \, dt = 1$, $\int_0^1 2t \, dt = 1$, $\int_0^1 3t^2 \, dt = 1$ et $\int_0^1 e^t \, dt = e - 1$. Ainsi

$$\int_0^1 M \, dt = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e-1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ de trace } e. \text{ Par ailleurs, } \int_0^1 (1 + e^t) \, dt = 1 + e - 1 = e.$$

L'égalité est vérifiée, conformément à $L\left(\int f\right) = \int L(f)$.

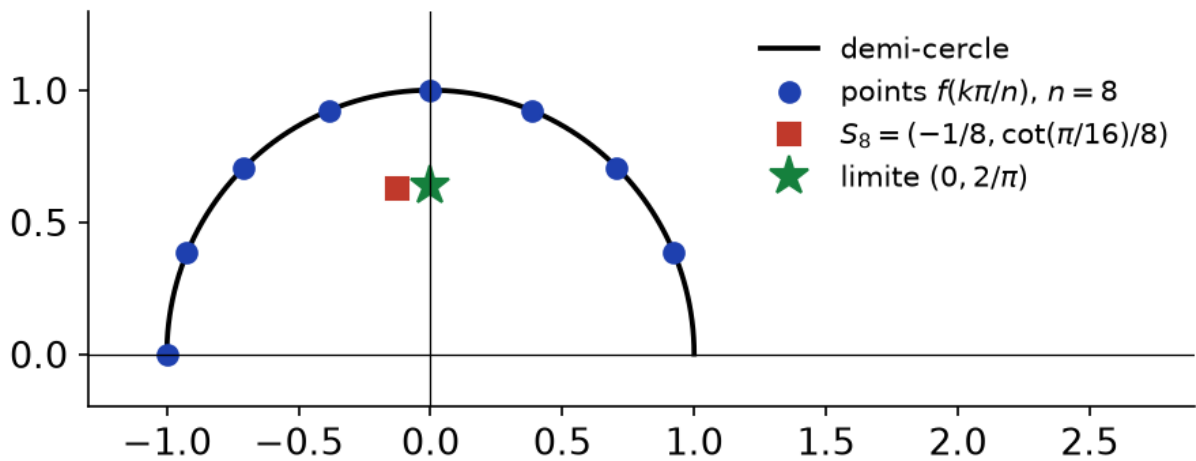
3. On a $\int_0^\pi u \, dt = (0, 2)$, de norme 2. De plus, $|u(t)| = 1$, donc $\int_0^\pi |u| \, dt = \pi$. On obtient $2 \leq \pi$, en accord avec l'inégalité triangulaire.

4. On calcule $U(x) = (\sin x, 1 - \cos x)$. Ensuite, $|U(x)|^2 = \sin^2 x + (1 - \cos x)^2 = 2 - 2\cos x = 4\sin^2(x/2)$. Donc

$|U(x)| = 2|\sin(x/2)|$. L'inégalité triangulaire donne $|U(x)| \leq \int_0^x |u| = x$, soit $|\sin(x/2)| \leq x/2$.

Corrigé de l'exercice 14 : Sommes de Riemann et barycentre

- Posons $f(t) = (\cos t, \sin t)$, continue sur $[0, \pi]$. On écrit $S_n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. On reconnaît $\frac{1}{\pi}$ fois une somme de Riemann de f sur $[0, \pi]$. Par le théorème des sommes de Riemann, $S_n \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f = \frac{1}{\pi}(0, 2)$. **Donc** $S_n \rightarrow (0, \frac{2}{\pi})$.
- On identifie S_n à $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \omega^k$ avec $\omega = e^{i\pi/n} \neq 1$. La somme géométrique vaut $\omega \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \frac{2\omega}{1-\omega}$, car $\omega^n = -1$. Or $1-\omega = -2i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) e^{i\pi/(2n)}$. Il vient
$$\sum_{k=1}^n \omega^k = \frac{2e^{i\pi/n}}{-2i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) e^{i\pi/(2n)}} = \frac{i e^{i\pi/(2n)}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = -1 + i \cot \frac{\pi}{2n}.$$
Donc $S_n = \frac{1}{n}(-1, \cot \frac{\pi}{2n})$. Pour $n = 2$, on trouve $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ce qui correspond bien à la moyenne de i et de -1 .
- D'abord, $-1/n \rightarrow 0$. Ensuite, $\cot x \sim 1/x$ en 0 , donc $\frac{1}{n} \cot \frac{\pi}{2n} \sim \frac{1}{n} \cdot \frac{2n}{\pi} = \frac{2}{\pi}$. **On retrouve** $S_n \rightarrow (0, 2/\pi)$. La figure ci-dessous montre, pour $n = 8$, les points du demi-cercle, leur isobarycentre S_8 et la limite.



Point de méthode : une moyenne $\frac{1}{n} \sum f(k/n)$ de vecteurs se traite exactement comme une somme de Riemann réelle ; il suffit de repérer le pas et l'intervalle.

Corrigé de l'exercice 15 : Spirale de Cornu

- La fonction $g : t \rightarrow (\cos t^2, \sin t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental, F est de classe $\mathcal{C}^1$ et $F' = g$. Or g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc F l'est aussi. **Ainsi** $F'(x) = (\cos x^2, \sin x^2)$.
- $|F'(x)|^2 = \cos^2 x^2 + \sin^2 x^2 = 1$. Par l'inégalité des accroissements finis entre 0 et x , $|F(x) - F(0)| \leq |x|$. **Comme** $F(0) = 0$, **on a** $|F(x)| \leq |x|$.
- Dans $F(-x) = \int_0^{-x} g(t) dt$, on pose $t = -u$. Alors

$$F(-x) = -\int_0^x g(-u) du = -\int_0^x g(u) du, \text{ car } g \text{ est paire. Donc } F(-x) = -F(x) : \text{ la trajectoire est symétrique par rapport à l'origine.}$$
- On a $G(x) = F(2x) - F(x)$. Par composition,

$$G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2(\cos 4x^2, \sin 4x^2) - (\cos x^2, \sin x^2).$$
- La vitesse $F'(x)$ n'est jamais nulle. La tangente est verticale si et seulement si sa première coordonnée est nulle, c'est-à-dire $\cos x^2 = 0$. **Les réels cherchés sont** $x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$, **avec** $k \in \mathbb{N}$. La vitesse tourne d'un angle x^2 de plus en plus vite, ce qui explique

l'enroulement visible sur la figure de l'énoncé.

Corrigé de l'exercice 16 : Accroissements finis sur le cercle

- On a $f(2\pi) - f(0) = 1 - 1 = 0$. En revanche, $f'(c) = ie^{ic}$ est de module 1, donc $2\pi f'(c) \neq 0$. **Aucun c ne convient : l'égalité des accroissements finis est fausse pour les fonctions vectorielles.**
- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $|f'(t)| = 1$ pour tout t . L'inégalité des accroissements finis sur le segment d'extrémités a et b donne $|e^{ib} - e^{ia}| \leq |b - a|$.
- Posons $u = b - a$. On factorise par l'angle moitié :

$$e^{ib} - e^{ia} = e^{ia}e^{iu/2}(e^{iu/2} - e^{-iu/2}) = e^{ia}e^{iu/2} \cdot 2i\sin(u/2).$$
Donc
 $|e^{ib} - e^{ia}| = 2|\sin(u/2)|$. La question 2 donne $2|\sin(u/2)| \leq |u|$ pour tout réel u . En remplaçant u par $2u$, **on obtient** $|\sin u| \leq |u|$.
- Soit $g = (g_1, g_2)$. Pour $i \in \{1, 2\}$, on a $|g'_i(t)| \leq |g'(t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$ (norme euclidienne). Or $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Par comparaison, g'_i est intégrable, donc $\int_0^x g'_i$ a une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$. Enfin, $g(x) = g(0) + \int_0^x g'$ par le théorème fondamental. **Donc g admet une limite en $+\infty$, égale à $g(0) + \int_0^{+\infty} g'$.** En outre, l'inégalité triangulaire donne $|g(y) - g(x)| \leq \arctan y - \arctan x$ pour $x \leq y$.

Corrigé de l'exercice 17 : Unicité par les accroissements finis

- La fonction $|f|$ est continue sur le segment $[0, h]$, donc elle y atteint son maximum m . Soit $t \in [0, h]$. Pour $u \in [0, t]$, on a $|f'(u)| \leq k|f(u)| \leq km$. L'inégalité des accroissements finis sur $[0, t]$ donne alors

$$|f(t)| = |f(t) - f(0)| \leq km t \leq km h \leq \frac{m}{2}.$$

En prenant le maximum sur t , on obtient $m \leq m/2$, donc $m \leq 0$. **Ainsi $m = 0$ et f est nulle sur $[0, h]$.**

2. L'ensemble considéré contient h , donc $s \geq h > 0$. Pour tout $\tau < s$, il existe $\tau' \in]\tau, s]$ avec f nulle sur $[0, \tau']$. Donc f est nulle sur $[0, s[$, puis en s par continuité. Supposons $s < 1$. La fonction $\tilde{f}: u \rightarrow f(s+u)$ sur $[0, 1-s]$ vérifie $\tilde{f}(0) = 0$ et $|\tilde{f}'| \leq k|\tilde{f}|$. La question 1, appliquée avec $\tilde{h} = \min(1-s, \frac{1}{2k})$, montre que f est nulle sur $[s, s+\tilde{h}]$. Cela contredit la définition de s . **Donc $s = 1$ et f est nulle sur $[0, 1]$.**

3. Soit X et Y deux solutions et $Z = X - Y$. Alors Z est de classe $\mathcal{C}^1$, $Z(0) = 0$ et $Z' = A(t)Z$. La fonction $t \rightarrow |A(t)|$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc bornée. Posons $k = 1 + \max|A| > 0$. Par définition de la norme subordonnée, $|Z'(t)| \leq |A(t)| |Z(t)| \leq k|Z(t)|$. D'après la question 2, $Z = 0$. **Le problème admet donc au plus une solution.**

Point de méthode : l'inégalité des accroissements finis sur un petit intervalle fournit une contraction $m \leq m/2$; un argument de borne supérieure propage ensuite le résultat.

Corrigé de l'exercice 18 : Déterminant au voisinage de l'identité

1. Le déterminant est un polynôme en les coefficients, qui sont affines en t . Donc φ est polynomiale, de classe $\mathcal{C}^\infty$. La colonne j de $I_n + tA$ vaut $e_j + tA_j$, où A_j est la colonne j de A , et sa dérivée vaut A_j . La règle de dérivation d'un déterminant donne, en $t = 0$,

$$\varphi'(0) = \sum_{j=1}^n \det(e_1, \dots, e_{j-1}, A_j, e_{j+1}, \dots, e_n).$$

En développant selon les colonnes e_i , le j -ième terme vaut a_{jj} . **Donc $\varphi'(0) = \text{tr} A$.**

2. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi(0) = 1$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 1 donne $\det(I_n + tA) = 1 + t \text{tr} A + o(t)$.

3. Fixons t et posons $N(h) = M(t)^{-1}M(t+h)$. L'application $X \rightarrow M(t)^{-1}X$ est linéaire. Donc N est dérivable en 0 , avec $N(0) = I_n$ et $N'(0) = M(t)^{-1}M'(t)$. Posons $\psi(h) = \det N(h)$. La règle multilinéaire en $h = 0$ donne, comme à la question 1,

$\psi'(0) = \text{tr} N'(0)$. Or $\det M(t+h) = \det M(t) \psi(h)$ par multiplicativité du déterminant. En dérivant en $h = 0$, $(\det M)'(t) = \det M(t) \text{tr}(M(t)^{-1} M'(t))$.

4. On a $\det M(t) = 1 - t^2$, de dérivée $-2t$. D'après l'exercice 9,
 $M^{-1}M' = \frac{1}{1-t^2} \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix}$, de trace $\frac{-2t}{1-t^2}$. Le produit par $1 - t^2$ vaut $-2t$. Ainsi, la formule est vérifiée.

Corrigé de l'exercice 19 : Formules de Taylor pour l'exponentielle complexe

1. Ici, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec $f'(u) = ie^{iu}$ et $f''(u) = -e^{iu}$. La formule avec reste intégral à l'ordre 1 en 0 s'écrit

$$e^{it} = 1 + it + \int_0^t (t-u)(-e^{iu}) du.$$

L'inégalité triangulaire donne $|e^{it} - 1 - it| \leq \left| \int_0^t |t-u| du \right| = \frac{t^2}{2}$. Donc

$|e^{it} - 1 - it| \leq t^2/2$. Les parties réelle et imaginaire de $e^{it} - 1 - it$ sont $\cos t - 1$ et $\sin t - t$, de modules inférieurs au module total. Ainsi $|1 - \cos t| \leq t^2/2$ et $|\sin t - t| \leq t^2/2$.

2. Par récurrence, $f^{(k)}(t) = i^k e^{it}$, de module 1, et $f^{(k)}(0) = i^k$. L'inégalité de Taylor-Lagrange avec $M_{n+1} = 1$ donne

$$\left| e^{it} - \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pour t fixé, $\frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ par croissances comparées. Donc $e^{it} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!}$.

3. Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 donne $e^{it} = 1 + it - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$. Un $o(t^2)$ vectoriel a des coordonnées en $o(t^2)$. Ainsi $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ et $\sin t = t + o(t^2)$. Par conséquent, $\frac{1 - \cos t}{t^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ et $\frac{t - \sin t}{t^2} \rightarrow 0$.

Corrigé de l'exercice 20 : Inégalité de Landau-Kolmogorov

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $|f''| \leq M_2$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, entre x et $x+h$ puis entre x et $x-h$, donne

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x) - hf'(x)| &\leq \frac{M_2 h^2}{2} \text{ et} \\ |f(x-h) - f(x) + hf'(x)| &\leq \frac{M_2 h^2}{2}. \end{aligned}$$

2. Notons R_+ et R_- les deux vecteurs précédents. En soustrayant,

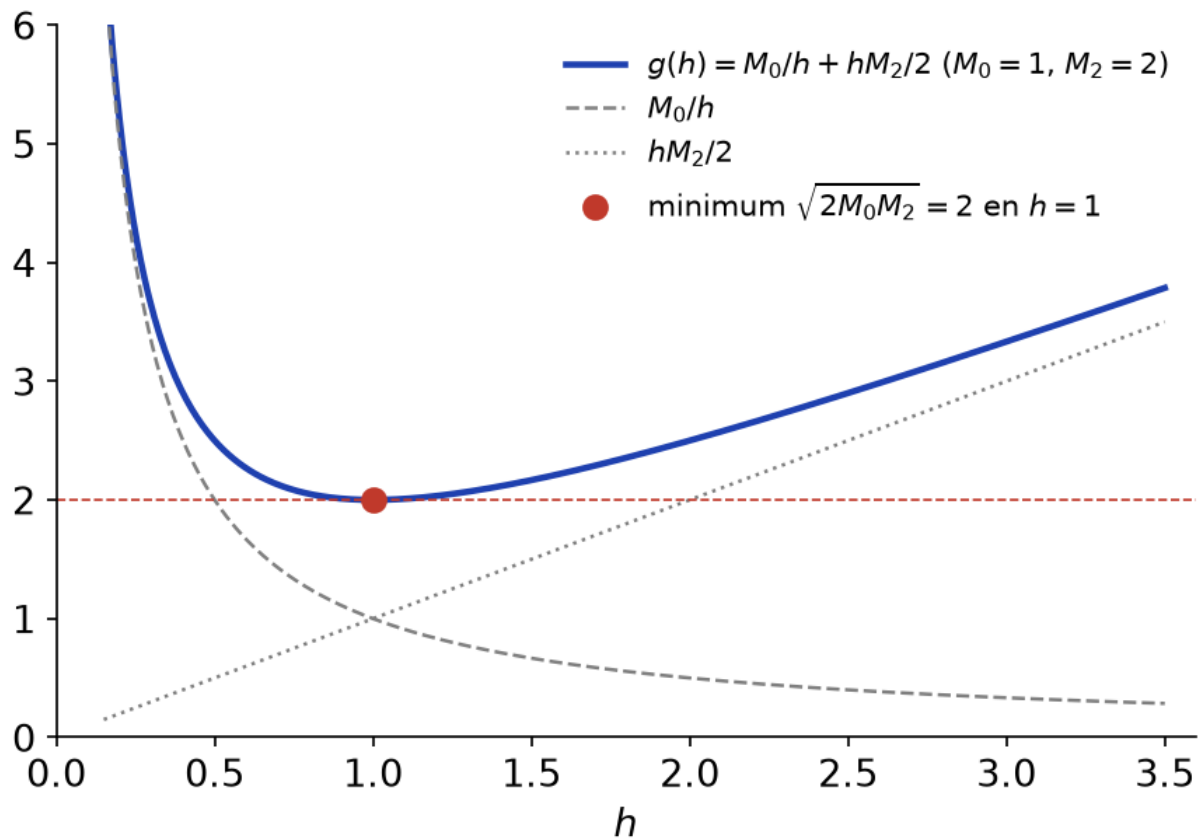
$$\begin{aligned} 2hf'(x) &= f(x+h) - f(x-h) - R_+ + R_- . \text{ L'inégalité triangulaire donne} \\ 2h|f'(x)| &\leq 2M_0 + M_2 h^2 . \text{ En divisant par } 2h > 0, \quad |f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2} . \end{aligned}$$

3. Posons $g(h) = \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée $g'(h) = -\frac{M_0}{h^2} + \frac{M_2}{2}$ s'annule en $h_0 = \sqrt{2M_0/M_2}$. Elle est négative avant et positive après. Le minimum vaut

$$g(h_0) = M_0 \sqrt{\frac{M_2}{2M_0}} + \frac{M_2}{2} \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}} = 2\sqrt{\frac{M_0 M_2}{2}} = \sqrt{2M_0 M_2}.$$

En prenant $h = h_0$, $|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0 M_2}$ pour tout x : f' est bornée. La figure ci-dessous montre ce compromis entre les deux termes pour $M_0 = 1$ et $M_2 = 2$.

4. On a $|f| = 1$, donc $M_0 = 1$. Ensuite, $f'' = -\omega^2 f$, donc $M_2 = \omega^2$. L'inégalité annonce $|f'| \leq \sqrt{2} \omega$. Or $f'(t) = \omega(-\sin \omega t, \cos \omega t)$, de norme ω . **L'inégalité est bien vérifiée, puisque $\omega \leq \sqrt{2} \omega$.**



Corrigé de l'exercice 21 : Problème : mouvement à accélération centrale

- Le produit vectoriel est bilinéaire. D'après le cours, C est dérivable et $C' = f' \wedge f' + f \wedge f''$. Par antisymétrie, $f' \wedge f' = 0$. De plus, $f \wedge f'' = \lambda f \wedge f = 0$. Ainsi $C' = 0$ sur l'intervalle I . **Donc C est constante.**
- Pour tout t , $\langle f(t), C_0 \rangle = \langle f(t) \wedge f'(t), f(t) \rangle = \det(f(t), f'(t), f(t)) = 0$, car deux colonnes sont égales. **Donc $f(t) \in C_0^\perp$, plan vectoriel puisque $C_0 \neq 0$: le mouvement est plan.**
- On a $f'(t) = (-a \sin t, b \cos t, 0)$ et $f''(t) = (-a \cos t, -b \sin t, 0) = -f(t)$. Ici $\lambda = -1$. Ensuite, $f \wedge f' = (0, 0, ab \cos^2 t + ab \sin^2 t)$. **Donc $C_0 = (0, 0, ab)$.**
- Comme $|f(u) \wedge f'(u)| = |C_0|$ pour tout u , on obtient $\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t |C_0| du$. **Ainsi**
 $\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2} |C_0| t$: **des durées égales balaient des aires égales.** Dans l'exemple, l'ellipse est

parcourue une fois quand t décrit $[0, 2\pi]$. **Son aire vaut** $\mathcal{A}(2\pi) = \frac{1}{2}ab \cdot 2\pi = \pi ab$.

5. Par la règle bilinéaire,

$\mathcal{E}' = 2\langle f', f'' \rangle + 2\omega^2 \langle f, f' \rangle = 2\langle f', -\omega^2 f \rangle + 2\omega^2 \langle f, f' \rangle = 0$. **Donc $\mathcal{E}$ est constante.** Dans l'exemple, $\omega = 1$ et

$$\mathcal{E} = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t = a^2 + b^2.$$

On trouve $\mathcal{E} = a^2 + b^2$.

Corrigé de l'exercice 22 : Problème : groupe à un paramètre de matrices

1. Fixons t . La fonction $s \rightarrow M(s+t)$ a pour dérivée $M'(s+t)$. Par ailleurs, $X \rightarrow XM(t)$ est linéaire, donc $s \rightarrow M(s)M(t)$ a pour dérivée $M'(s)M(t)$. En $s = 0$, $M'(t) = AM(t)$. De même, en dérivant par rapport à t en $t = 0$, à s fixé, $M'(s) = M(s)A$. **Donc** $M'(t) = AM(t) = M(t)A$ **pour tout** t .

Questions 2 à 5

2. Comme M est dérivable et $X \rightarrow AX$ linéaire, $M' = AM$ est dérivable, de dérivée $AM' = A^2M$. Supposons $M^{(k)} = A^k M$. Alors $M^{(k)}$ est dérivable et $M^{(k+1)} = A^k M' = A^{k+1} M$. **Par récurrence, M est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et** $M^{(k)} = A^k M$. En particulier, $M^{(k)}(0) = A^k$.
3. La fonction $u \rightarrow |M(u)|$ est continue sur le segment $[-|t|, |t|]$, donc K existe. Pour u entre 0 et t , la sous-multiplicativité donne $|M^{(N+1)}(u)| \leq |A|^{N+1} K$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre N en 0 s'écrit alors

$$\left\| M(t) - \sum_{k=0}^N \frac{t^k}{k!} A^k \right\| \leq \frac{K |A|^{N+1} |t|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Le majorant tend vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$, par croissances comparées. **Donc**

$$M(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k : M \text{ est entièrement déterminée par } A.$$

4. La fonction $\delta = \det \circ M$ est dérivable par la règle multilinéaire. En 0 , les colonnes de $M(0) = I_n$ sont les e_j et celles de $M'(0)$ sont les A_j . Comme dans l'exercice 18, $\delta'(0) = \sum_j \det(e_1, \dots, A_j, \dots, e_n) = \operatorname{tr} A$. Ensuite, $\delta(s+t) = \delta(s)\delta(t)$ par multiplicativité du déterminant. En dérivant par rapport à s en $s=0$, $\delta'(t) = \delta'(0)\delta(t) = (\operatorname{tr} A)\delta(t)$. Avec $\delta(0) = 1$, on obtient $\delta(t) = e^{t \operatorname{tr} A}$. **Ce réel est non nul, donc $M(t)$ est toujours inversible.**

5. D'après l'exercice 10, $R(0) = I_2$, $R(s+t) = R(s)R(t)$ et $A = R'(0) = J$. Comme $J^2 = -I_2$, on a $J^{2p} = (-1)^p I_2$ et $J^{2p+1} = (-1)^p J$. La série se sépare donc en

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} J^k = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p t^{2p}}{(2p)!} \right) I_2 + \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p t^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) J = \cos t I_2 + \sin t J.$$

Cette matrice est exactement $R(t)$. Enfin, $\operatorname{tr} J = 0$ et $\det R(t) = 1 = e^0$. **Tous les résultats du problème sont vérifiés sur les rotations.**

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [fonctions vectorielles, cours de maths spé](#)
- Les énoncés : [exercices de maths spé sur fonctions vectorielles](#)
- À maîtriser avant : [Normes, espaces vectoriels normés et suites](#)
- Chapitre précédent : [Séries entières](#)
- Chapitre suivant : [Intégrales généralisées et fonctions intégrables](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)

