

Fonctions usuelles

Exercice 1 : Ensembles de définition, parité et périodicité

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez l'ensemble de définition, puis étudiez la parité ou la périodicité demandée.

1. $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$: ensemble de définition et parité.

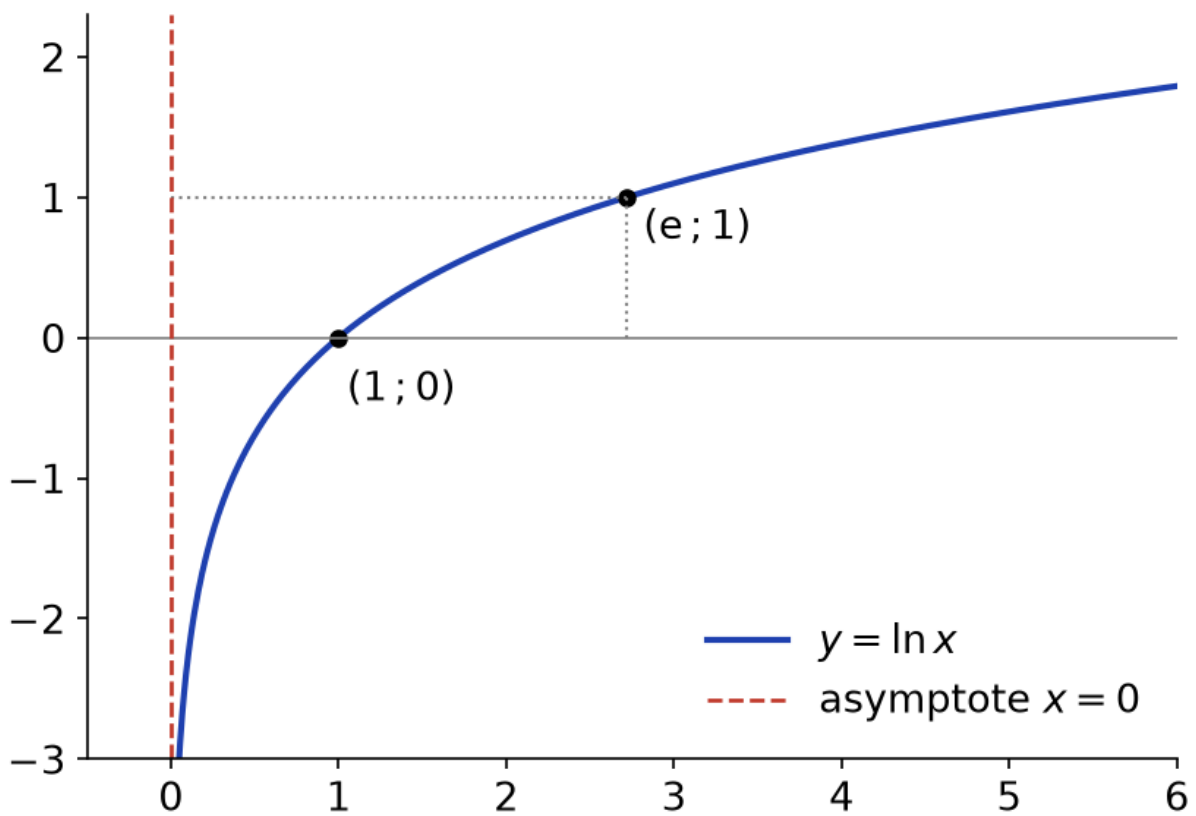
2. $g(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-1}$: ensemble de définition et parité.

3. $h(x) = \cos(3x) + \sin(2x)$: montrez que h est 2π -périodique, mais que π n'est pas une période de h .

4. $k(x) = \frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2}$: ensemble de définition, puis montrez que k est paire.

Exercice 2 : Transformations du graphe du logarithme

La figure ci-dessous représente la courbe de la fonction $\ln$.



Sans étude de variations, déterminez l'ensemble de définition de chaque fonction, décrivez la transformation géométrique qui permet d'obtenir sa courbe à partir de celle de $\ln$, puis tracez-la.

1. $f_1(x) = \ln(x - 2) + 1$.
2. $f_2(x) = \ln(-x)$.
3. $f_3(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.
4. $f_4(x) = |\ln x|$.
5. $f_5(x) = \ln|x|$.
6. $f_6(x) = \ln(2x)$: proposez deux transformations différentes qui conviennent.

Exercice 3 : Fonctions monotones et fonctions bornées

1. Montrez que $f : x \rightarrow \frac{x}{1+x^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Déterminez son maximum et son minimum, ainsi que les points où ils sont atteints.
2. Montrez que $g : x \rightarrow x + \sin x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Est-elle majorée ?
3. Soient u et v deux fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$. Montrez que uv n'est pas nécessairement croissante. Montrez ensuite que uv est croissante si u et v sont de plus positives.
4. Montrez que la composée de deux fonctions décroissantes est croissante.

Exercice 4 : Calculs de dérivées

Justifiez la dérivabilité de chaque fonction sur l'ensemble indiqué, puis calculez sa dérivée sous forme simplifiée.

1. $f_1(x) = x^2 e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $f_2(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ sur $\mathbb{R}$.
3. $f_3(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $f_4(x) = \cos^3(2x)$ sur $\mathbb{R}$.
5. $f_5(x) = x^x$ sur $]0, +\infty[$.
6. $f_6(x) = e^{\sin x} \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : Dérivée d'une fonction réciproque

On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x$.

1. Montrez que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note $g = f^{-1}$.
2. Justifiez que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimez $g'(y)$ en fonction de $g(y)$.
3. Calculez $g(1)$, $g'(1)$, puis donnez l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1. Calculez de même $g(1 + e)$ et $g'(1 + e)$.
4. Montrez que, pour tout réel y , $g'(y) = \frac{1}{1 + y - g(y)}$.
5. En déduisant que g est deux fois dérivable, calculez $g''(1)$.

Exercice 6 : Équations avec exponentielles, logarithmes et puissances

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en précisant à chaque fois les conditions d'existence.

1. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.
2. $\ln x + \ln(x - 1) = \ln 6$.
3. $2^x = 3^{x-1}$.
4. $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$.
5. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$, pour $x > 0$.

Exercice 7 : Limites par croissances comparées

Déterminez les limites suivantes en justifiant chaque étape.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{\sqrt{x}}.$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x.$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}.$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^5}.$
5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2.$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^3}{e^x + \ln x}.$

Exercice 8 : Les inégalités fondamentales et la somme harmonique

1. Démontrez que $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x , puis que $\ln(1 + x) \leq x$ pour tout $x > -1$.
2. En déduire que $\ln(1 + x) \geq \frac{x}{1+x}$ pour tout $x > -1$.
3. Montrez que $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ pour tout $x < 1$.
4. Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrez que $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$.
5. En déduire la limite de H_n et celle de $\frac{H_n}{\ln n}$.

Exercice 9 : Inégalités par étude de fonction

1. Montrez que, pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$.

2. En déduire un encadrement de $\ln(1,1)$ d'amplitude 0,005.
3. Montrez que $\sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$, puis que $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ pour tout réel x .
4. On pose $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. Étudiez les variations de φ , puis démontrez l'inégalité de Jordan : $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 10 : Comparer e puissance π et π puissance e

On pose $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ pour $x > 0$.

1. Étudiez les variations de h et ses limites en 0^+ et en $+\infty$.
2. En déduire, sans calculatrice, lequel des deux nombres e^π et π^e est le plus grand.
3. Vérifiez que $2^4 = 4^2$. Soient $0 < a < b$ tels que $a^b = b^a$. Montrez que $h(a) = h(b)$, puis que $a < e < b$.
4. Montrez que $a = 2$ est le seul entier naturel $a \geq 1$ pour lequel il existe un entier $b > a$ avec $a^b = b^a$, et que $b = 4$.

Exercice 11 : Valeurs et simplifications avec Arcsin, Arccos, Arctan

1. Calculez $\text{Arcsin}\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right)$, $\text{Arccos}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ et $\text{Arctan}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$.
2. Calculez $\text{Arcsin}(\sin 3)$ et $\text{Arccos}(\cos 4)$.
3. Simplifiez, pour x dans l'ensemble indiqué : $\cos(\text{Arcsin } x)$ sur $[-1, 1]$, $\tan(\text{Arcsin } x)$ sur $] -1, 1[$, $\cos(\text{Arctan } x)$ sur $\mathbb{R}$.

4. Montrez que $\sin(2 \operatorname{Arctan} x) = \frac{2x}{1+x^2}$ pour tout réel x .

Exercice 12 : Relations entre fonctions circulaires réciproques

1. En appliquant le théorème de la dérivée réciproque, retrouvez les dérivées de Arccos sur $] -1, 1[$ et de Arctan sur $\mathbb{R}$.
2. Montrez que $\operatorname{Arccos}(-x) = \pi - \operatorname{Arccos} x$ pour tout $x \in [-1, 1]$.
3. Démontrez par dérivation que $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}$ sur $[-1, 1]$.
4. Soit $\psi(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. Calculez ψ' , puis donnez $\psi(x)$ selon le signe de x . Pourquoi ψ n'est-elle pas constante sur $\mathbb{R}^*$?

Exercice 13 : Équations avec Arctan

1. Montrez que $\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.
2. Montrez que $\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3 = \frac{3\pi}{4}$.
3. On pose $S(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(2x)$. Montrez que l'équation $S(x) = \frac{\pi}{4}$ admet une unique solution réelle, puis déterminez-la.

Exercice 14 : Étude de $\operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$

On considère $f(x) = \operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$.

1. Montrez que f est définie sur $[-1, 1]$ et qu'elle est impaire.
2. Pour $x \in [-1, 1]$, on pose $\theta = \text{Arcsin } x$. Exprimez $2x\sqrt{1-x^2}$ en fonction de θ .
3. En déduire une expression simple de $f(x)$ sur chacun des intervalles $\left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$.
4. Calculez directement $f'(x)$ sur $] -1, 1[$ privé de $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ et vérifiez la cohérence avec la question précédente.
5. Tracez la courbe de f . La fonction f est-elle dérivable en $\frac{\sqrt{2}}{2}$?

Exercice 15 : Formulaire hyperbolique

1. Démontrez que $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$ pour tout réel x .
2. Démontrez que $\text{ch}(a+b) = \text{ch } a \text{ ch } b + \text{sh } a \text{ sh } b$ et $\text{sh}(a+b) = \text{sh } a \text{ ch } b + \text{ch } a \text{ sh } b$.
3. En déduire $\text{sh}(2x)$ et $\text{ch}(2x)$, puis montrez que $\text{ch}(2x) = 2 \text{ch}^2 x - 1$.
4. Montrez que $\text{th}(a+b) = \frac{\text{th } a + \text{th } b}{1 + \text{th } a \text{ th } b}$.
5. Calculez $\text{ch}(\ln 3)$, $\text{sh}(\ln 3)$ et $\text{th}(\ln 2)$.
6. Montrez que $(\text{ch } x + \text{sh } x)^n = \text{ch}(nx) + \text{sh}(nx)$ pour tout entier naturel n .

Exercice 16 : Équations hyperboliques et fonction argument sinus hyperbolique

1. Résolvez $\text{sh } x = \frac{3}{4}$, puis $\text{ch } x = \frac{5}{4}$.

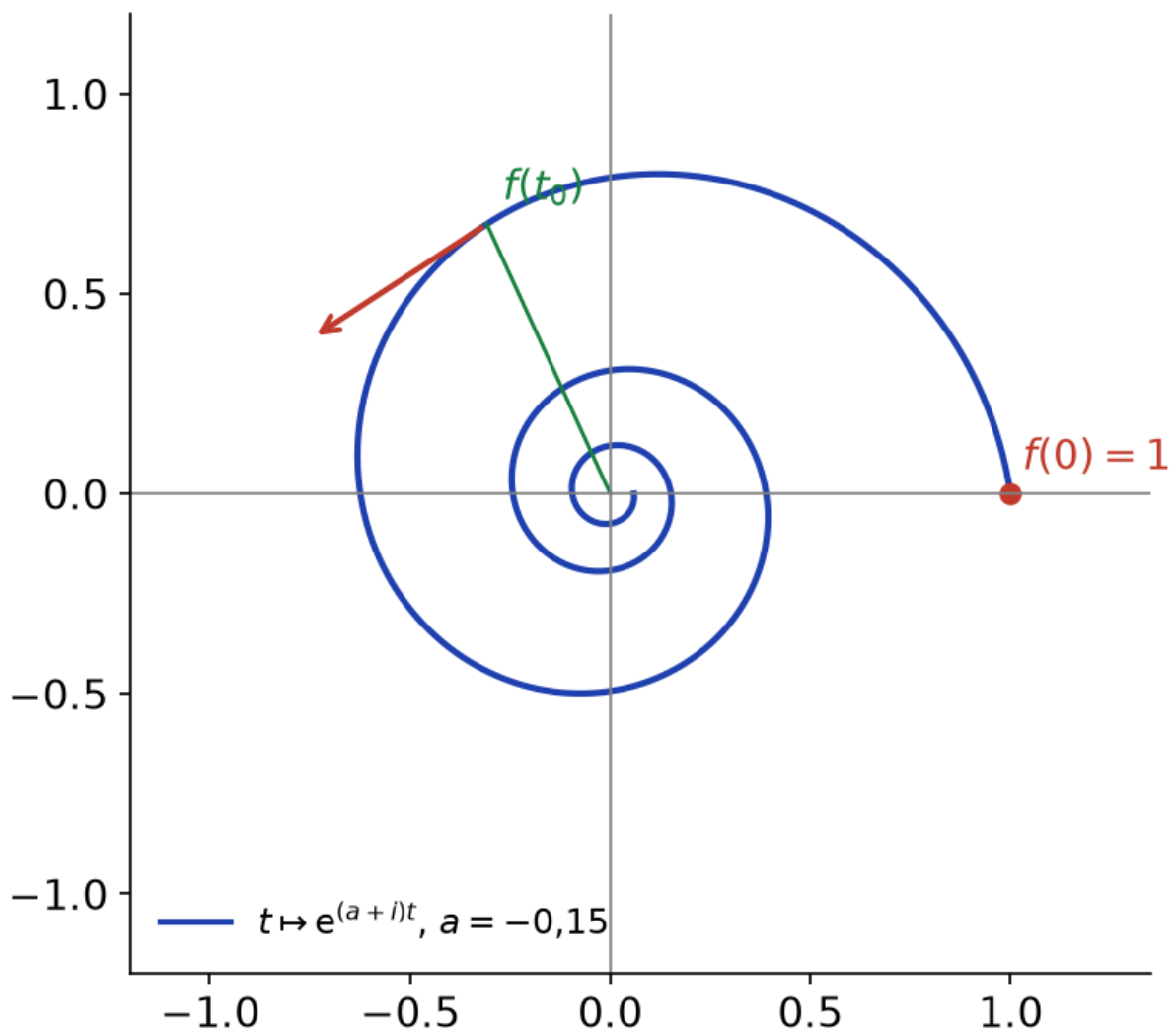
2. Résolvez $3 \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = 3$.
3. Montrez que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Pour y réel, résolvez $\operatorname{sh} x = y$ et en déduire l'expression de la réciproque $\operatorname{Argsh} y$ à l'aide d'un logarithme.
4. Calculez la dérivée de Argsh de deux façons : à partir de son expression, puis par le théorème de la dérivée réciproque.

Exercice 17 : Tangente hyperbolique et sa réciproque

1. Montrez que th est impaire, que $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$ et que th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Calculez ses limites en $\pm\infty$.
2. Montrez que $\operatorname{th} x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
3. Montrez que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$ et exprimez sa réciproque Argth à l'aide d'un logarithme.
4. Calculez $\operatorname{Argth}'(y)$ pour $y \in] -1, 1[$. Quel lien y a-t-il avec la fonction f de la question 1 de l'exercice 1 ?

Exercice 18 : Dérivation d'une fonction à valeurs complexes

Soit α un réel. On pose $f(t) = e^{(\alpha+i)t}$ pour $t \in \mathbb{R}$. La figure ci-dessous représente, dans le plan complexe, la courbe décrite par $f(t)$ pour $t \geq 0$ lorsque $\alpha = -0,15$.



1. Calculez $f'(t)$ de deux façons : avec la formule $(e^\varphi)' = \varphi' e^\varphi$, puis en dérivant parties réelle et imaginaire.
2. En déduire une primitive de $t \rightarrow e^{at} \cos t$ et une primitive de $t \rightarrow e^{at} \sin t$.
3. Calculez $|f(t)|$ et interprétez la forme de la courbe. Montrez que $\frac{f'(t)}{f(t)}$ est constant et interprétez géométriquement.
4. On pose $g(t) = e^{it}$. Existe-t-il $c \in]0, 2\pi[$ tel que $g(2\pi) - g(0) = 2\pi g'(c)$? Commentez.
5. Calculez la dérivée de $t \rightarrow e^t + it^2$.

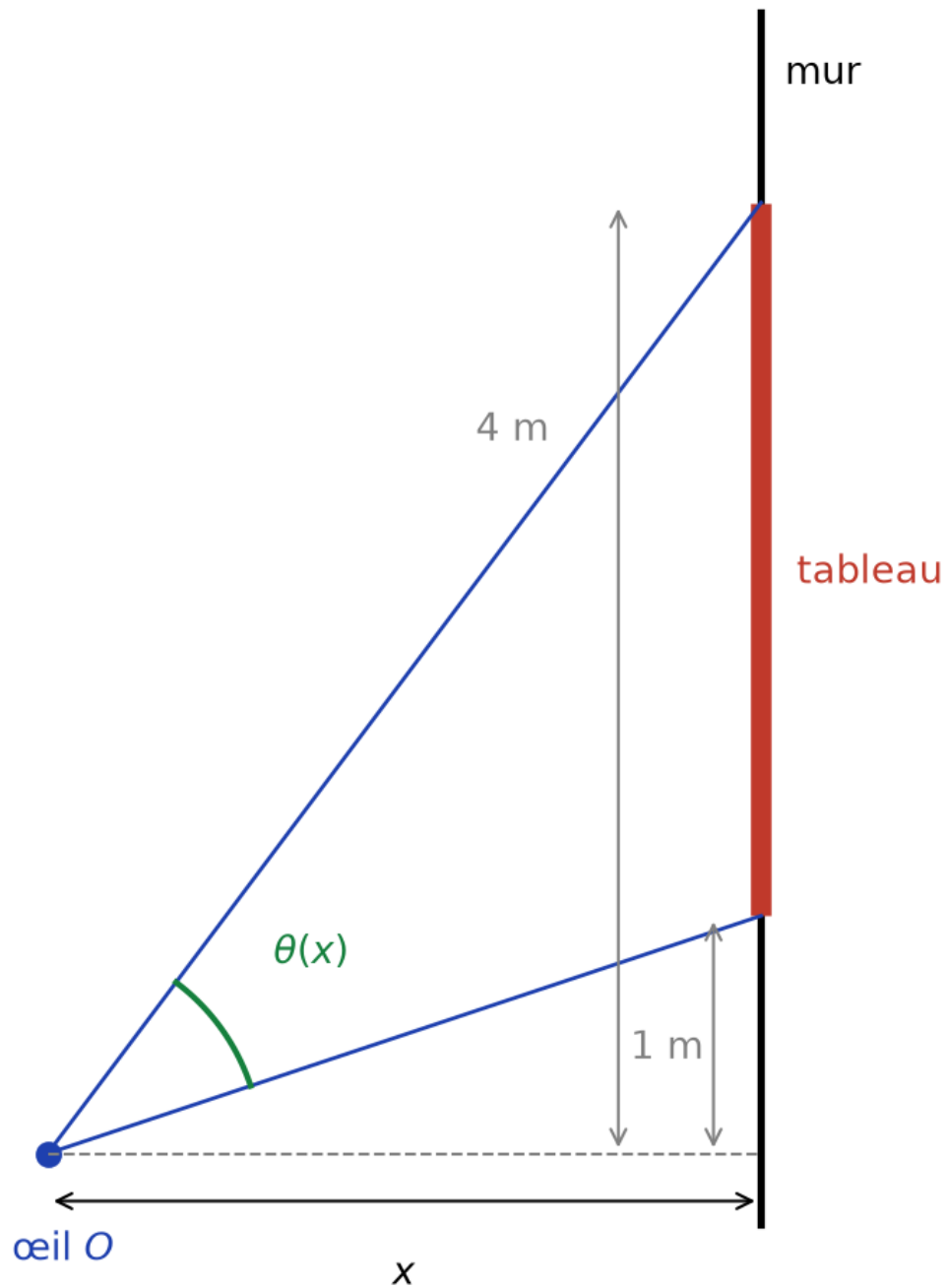
Exercice 19 : Étude complète de $x \exp(1/x)$

On considère $f(x) = x e^{1/x}$.

1. Déterminez l'ensemble de définition de f , puis ses limites en $-\infty$, $+\infty$, 0^- et 0^+ .
2. Calculez f' et dressez le tableau de variations de f .
3. En posant $u = 1/x$, montrez que $f(x) - (x + 1) = \frac{e^u - 1 - u}{u}$. En déduire que la droite $y = x + 1$ est asymptote à la courbe en $\pm\infty$.
4. Étudiez la position de la courbe par rapport à cette asymptote, puis tracez la courbe.

Exercice 20 : Angle de vue optimal

Un tableau est accroché à un mur vertical. Son bord inférieur est situé 1 m au-dessus de l'œil d'un visiteur, et son bord supérieur 4 m au-dessus. Le visiteur se place à une distance $x > 0$ du mur, comme sur la figure ci-dessous. On note $\theta(x)$ l'angle sous lequel il voit le tableau.



1. Montrez que $\theta(x) = \text{Arctan} \frac{4}{x} - \text{Arctan} \frac{1}{x}$.
2. Déterminez les limites de θ en 0^+ et en $+\infty$.
3. Étudiez les variations de θ sur $]0, +\infty[$.
4. À quelle distance le visiteur doit-il se placer pour voir le tableau sous l'angle maximal ? Montrez que cet angle maximal vaut $\text{Arctan} \frac{3}{4}$.

Exercice 21 : Trois expressions d'une même fonction

On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions $F(x) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x)$, $G(x) = 2 \operatorname{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}$ et $H(x) = \operatorname{Arcsin}(\operatorname{th} x)$.

1. Justifiez que F , G et H sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
2. Montrez que $F'(x) = G'(x) = H'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$.
3. En déduire que $F = G = H$ sur $\mathbb{R}$.
4. Étudiez la fonction F : parité, variations, limites. Montrez que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
5. Montrez que $\sin(F(x)) = \operatorname{th} x$ et $\cos(F(x)) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$. Pour $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, exprimez $F^{-1}(y)$ à l'aide de $\tan y$ et $\cos y$.

Exercice 22 : Problème, la fonction $(1 + 1/x)$ puissance x

On définit sur $]0, +\infty[$ les fonctions $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ et $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Partie A : deux inégalités.

1. Montrez que, pour tout $u > 0$, $\frac{u}{1+u} < \ln(1+u) < u$.

Partie B : étude de f .

1. On pose $g(x) = \ln f(x)$. Calculez $g'(x)$ et montrez que $g'(x) > 0$.
2. Déterminez les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

Partie C : étude de k et encadrement de e .

1. Montrez que k est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et déterminez ses limites en 0^+ et en $+\infty$.
2. En déduire que, pour tout $x > 0$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$.
3. Montrez que, pour tout entier $n \geq 1$, $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$.
4. Sachant que $1,1^{10} \approx 2,59374$ et $1,1^{11} \approx 2,85312$, donnez un encadrement de e .

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [fonctions usuelles, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Trigonométrie et fonctions circulaires](#)

- Chapitre précédent : [Nombres complexes et exponentielle complexe](#)
- Chapitre suivant : [Primitives et calcul intégral](#)
- Le même thème en L1 : [fonctions usuelles, exercices de maths en L1](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)