

Fonctions usuelles

Exercice 1 : Équations et inéquations avec ln et exp

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes, en précisant d'abord le domaine de validité.

1. $\ln(x) + \ln(x - 2) = \ln(3)$.
2. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.
3. $\ln(2x - 1) \leq \ln(x + 3)$.
4. $2^x = 3^x - 1$.

Exercice 2 : Fonctions puissances et étude de x puissance x

1. Donnez le domaine de dérivabilité et la dérivée de $x \rightarrow x^{\sqrt{2}}$ et de $x \rightarrow 2^x$. La première fonction se prolonge-t-elle en 0 ? Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
2. On pose $f(x) = x^x$ pour $x > 0$. Calculez $f'(x)$ et dressez le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$.
3. Déterminez la limite de f en 0^+ et en $+\infty$. Montrez que f se prolonge par continuité en 0.
4. Le prolongement est-il dérivable en 0 ? Interprétez graphiquement, puis tracez l'allure de la courbe.

Exercice 3 : Limites par croissances comparées

Déterminez les limites suivantes, en citant à chaque fois le résultat de croissances comparées utilisé.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x}.$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2.$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 e^{-x}.$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^3}{x^2 + \ln x}.$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x.$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}.$

Exercice 4 : Formes indéterminées plus délicates

On rappelle que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$ (dérivée de $\ln$ en 1). Déterminez :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{e^x}.$

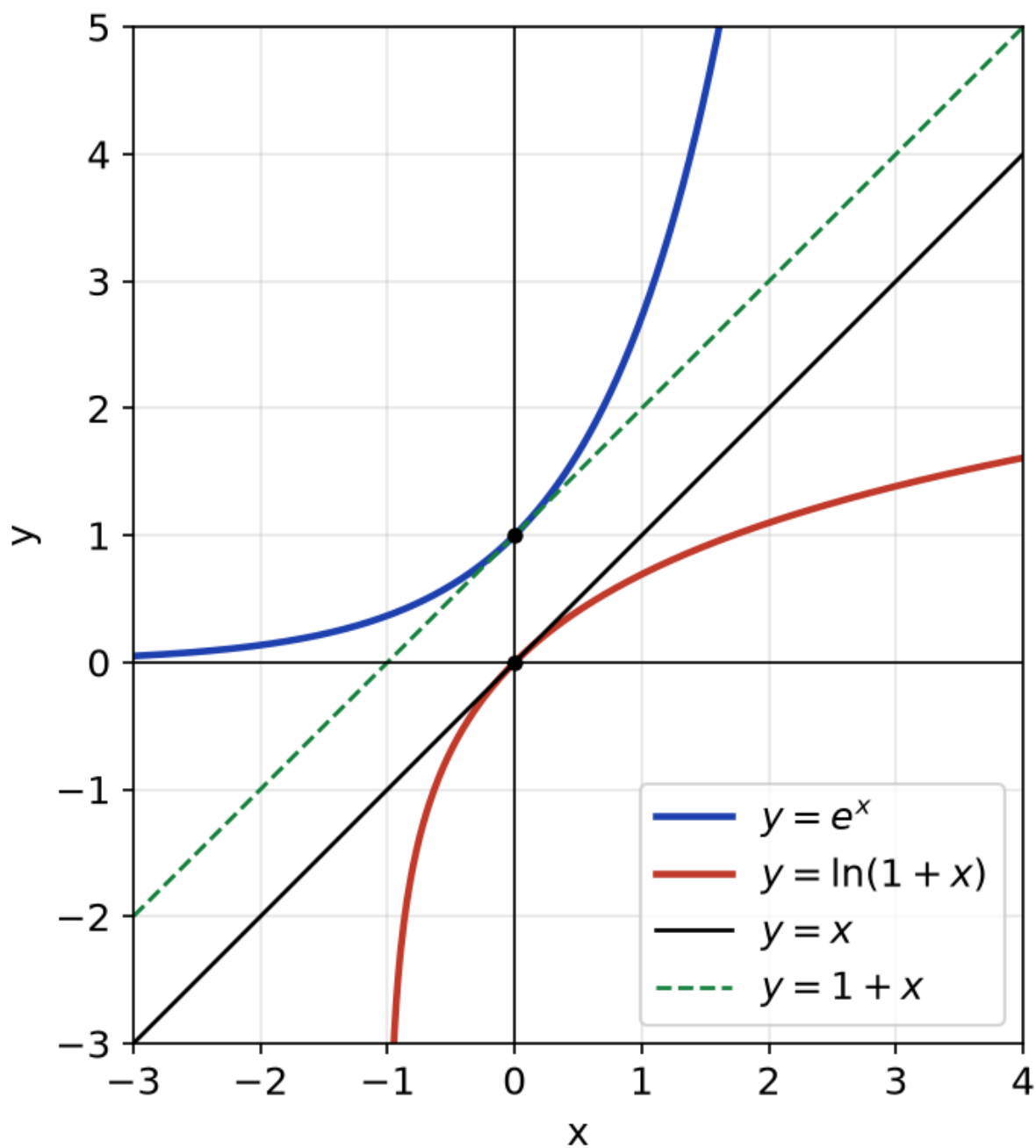
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}}.$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}.$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln x}.$

Exercice 5 : Inégalités classiques

La figure ci-dessous suggère des comparaisons entre les fonctions usuelles et leurs tangentes en 0. Démontrez-les par une étude de fonction.



1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1+x$, avec égalité seulement en 0.

2. Pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.
3. Pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 6 : Équations trigonométriques

1. Montrez que $\tan$ est dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$ avec $\tan' = 1 + \tan^2 = 1/\cos^2$.
2. Résolvez dans $[0, 2\pi[$ l'équation $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$.
3. Montrez que $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Déduisez-en le maximum de $x \rightarrow \sin x + \cos x$, puis résolvez $\sin x + \cos x = 1$ dans $[0, 2\pi[$.
4. Résolvez dans $[0, 2\pi[$ l'équation $\sin(2x) = \cos x$.

Exercice 7 : Valeurs remarquables des fonctions réciproques

1. Calculez $\arcsin \frac{1}{2}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\arctan(-\sqrt{3})$.
2. Calculez $\arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right)$, $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ et $\arctan\left(\tan \frac{3\pi}{4}\right)$.
3. Calculez $\arcsin(\sin 3)$ et $\arccos(\cos 4)$.
4. Pour x dans le domaine convenable, simplifiez $\cos(\arctan x)$, $\sin(\arccos x)$ et $\tan(\arcsin x)$.

Exercice 8 : Construction de la fonction arcsinus

1. Montrez que la restriction de $\sin$ à $[-\pi/2, \pi/2]$ est une bijection sur un intervalle que vous préciserez.
2. On note $\arcsin$ sa réciproque. Montrez que $\arcsin$ est continue, strictement croissante et impaire.
3. Montrez que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.
4. Montrez que $\arcsin$ est dérivable sur $] -1, 1[$ et calculez sa dérivée. Est-elle dérivable en 1 ?
5. On admet de même que $\arccos$ est dérivable sur $] -1, 1[$, de dérivée $-1/\sqrt{1 - x^2}$.
Démontrez que $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

Exercice 9 : Dérivées de fonctions trigonométriques réciproques

Pour chaque fonction, précisez un intervalle où elle est dérivable et calculez sa dérivée sous forme simplifiée.

1. $f_1(x) = \arctan(2x)$.
2. $f_2(x) = \arcsin(x^2)$.
3. $f_3(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 1$.
4. $f_4(x) = \arctan(e^x)$; exprimez le résultat avec ch .
5. $f_5(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$.

Exercice 10 : Relations entre arctangentes

1. Montrez que, pour tout $x > 0$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Que vaut cette somme pour $x < 0$?

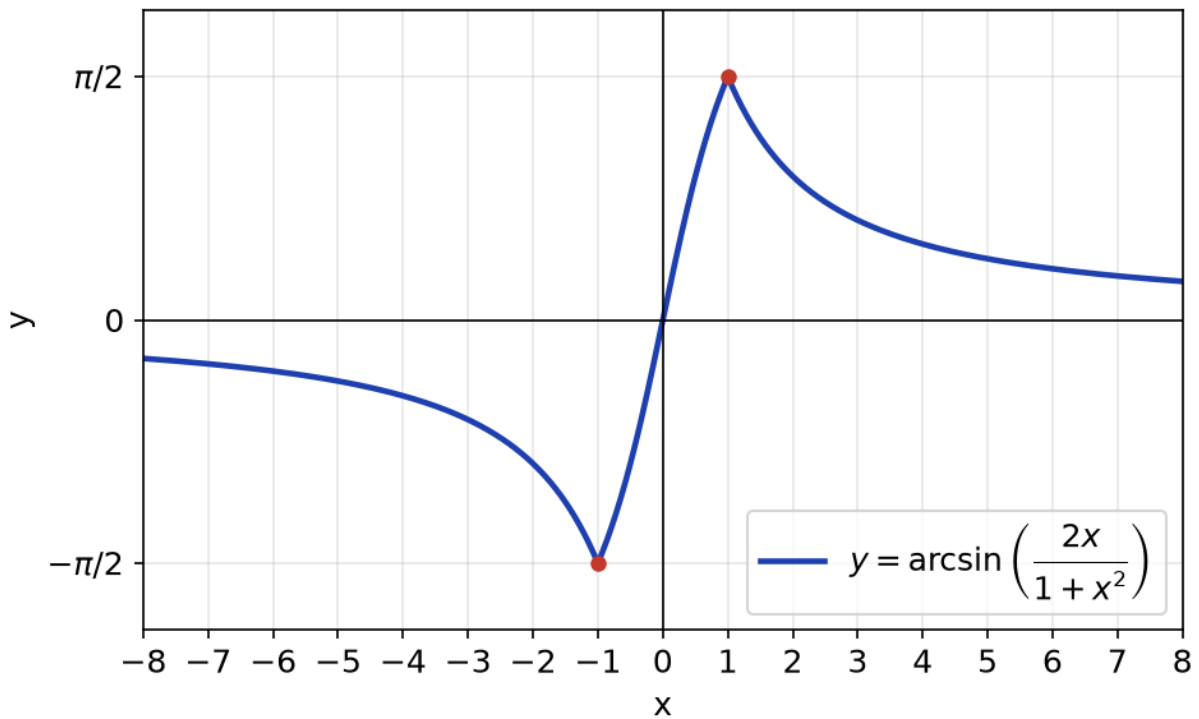
2. On pose $g(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour $x \neq 1$. Calculez $g'(x)$.
3. Déduisez-en une expression simple de $g(x)$ sur $] -\infty, 1[$, puis sur $]1, +\infty[$.

Exercice 11 : Une équation avec arctangente

1. Démontrez que $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.
2. On considère l'équation $(E): \arctan x + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$. Montrez qu'elle admet une unique solution réelle, et que celle-ci est strictement positive.
3. Déterminez cette solution.

Exercice 12 : Simplification de $\arcsin(2x/(1+x^2))$

On pose $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$. La courbe de f , tracée ci-dessous, suggère une formule différente selon la position de x par rapport à -1 et 1 .



1. Montrez que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est impaire.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\theta = \arctan x$. Montrez que $\frac{2x}{1+x^2} = \sin(2\theta)$.
3. Déduisez-en l'expression de $f(x)$ à l'aide de $\arctan x$ sur chacun des intervalles $[-1, 1]$, $]1, +\infty[$ et $]-\infty, -1[$.
4. Étudiez la dérivabilité de f en 1. Déterminez les limites de f en $\pm\infty$.

Exercice 13 : Formulaire des fonctions hyperboliques

1. Démontrez que $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ pour tout réel x .
2. Démontrez que $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$, puis que $\operatorname{sh}(2a) = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$.
3. Calculez les dérivées de ch , sh et th . Vérifiez que $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$.
4. Résolvez l'équation $\operatorname{ch} x = 2$.

5. Résolvez l'équation $\operatorname{sh} x = \frac{3}{4}$.

Exercice 14 : Réciproques des fonctions hyperboliques

1. Montrez que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note argsh sa réciproque.
2. Montrez que $\operatorname{argsh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ pour tout réel y .
3. Calculez la dérivée de argsh de deux façons : par la formule de dérivation d'une réciproque, puis directement.
4. Montrez que th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$, et que sa réciproque est $y \rightarrow \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$. Calculez la dérivée de cette réciproque.

Exercice 15 : Une fonction homographique

Soit $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

1. Déterminez des réels a et k tels que $f(x) = a + \frac{k}{x-1}$ pour tout $x \neq 1$.
2. Étudiez les variations de f et donnez ses asymptotes.
3. Montrez que le point $O(1, 2)$ est centre de symétrie de la courbe.
4. Montrez que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sur un ensemble à préciser, et déterminez f^{-1} .
5. Résolvez l'inéquation $f(x) \geq 1$.

Exercice 16 : Asymptote oblique d'une fonction rationnelle

Soit $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ pour $x \neq 1$.

1. Déterminez des réels a , b , c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
2. Déduisez-en que la courbe admet une asymptote oblique en $\pm\infty$, et étudiez sa position par rapport à la courbe.
3. Étudiez les variations de f , avec ses limites en 1.
4. Montrez que le point $O(1, 3)$ est centre de symétrie de la courbe, puis tracez-la.

Exercice 17 : Asymptotes et branches paraboliques

1. Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$. Justifiez que f est définie sur $\mathbb{R}$. Montrez que la courbe admet une asymptote en $+\infty$ et une en $-\infty$, et précisez la position de la courbe.
2. Soit $g(x) = x e^{1/x}$ pour $x > 0$. Montrez que la droite $y = x + 1$ est asymptote en $+\infty$. On pourra utiliser $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$. Précisez la position de la courbe.
3. Étudiez la branche infinie en $+\infty$ de $h(x) = x + \ln x$, puis celles de $x \rightarrow \sqrt{x}$ et de $x \rightarrow e^x$.

Exercice 18 : Étude de $\ln(x)/x$ et comparaison de e^π et π^e

Soit $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ pour $x > 0$.

1. Étudiez complètement f : variations, limites, asymptotes. Tracez sa courbe.
2. Sans calculatrice, comparez e^π et π^e .
3. Déterminez tous les couples d'entiers (a, b) avec $1 \leq a < b$ tels que $a^b = b^a$.

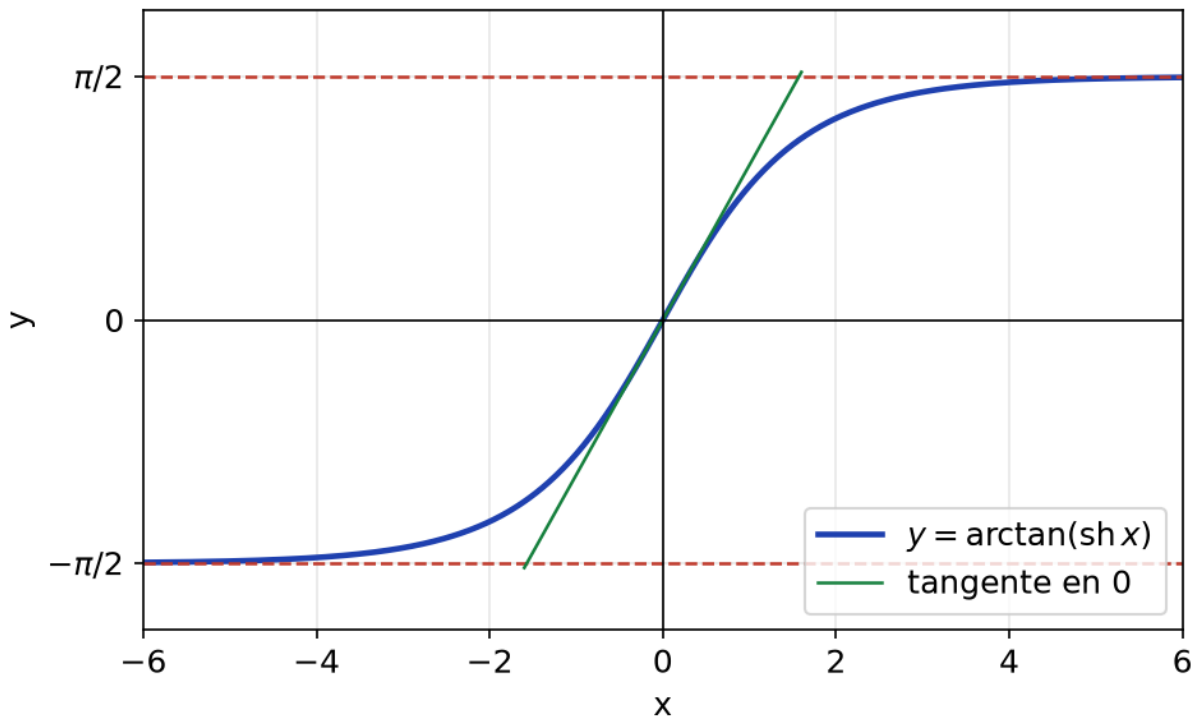
Exercice 19 : Étude complète de $x \arctan x$

Soit $f(x) = x \arctan x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Étudiez la parité de f . Calculez f' et étudiez son signe. Déduisez-en les variations de f .
2. Calculez f'' et montrez que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
3. Montrez que, pour $x > 0$, $f(x) = \frac{\pi}{2}x - x \arctan \frac{1}{x}$. Déduisez-en que la droite $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.
4. Précisez la position de la courbe par rapport à cette asymptote. Donnez l'asymptote en $-\infty$, puis tracez la courbe.

Exercice 20 : Problème : la fonction gudermannienne

On définit, pour tout réel x , $\operatorname{gd}(x) = \arctan(\operatorname{sh} x)$. Sa courbe est représentée ci-dessous.



1. Montrez que gd est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $\operatorname{gd}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$.
2. Montrez que, pour tout réel x , $\operatorname{gd}(x) = \arcsin(\operatorname{th} x)$.
3. Montrez que, pour tout réel x , $\operatorname{gd}(x) = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$.
4. Déterminez les limites de gd en $\pm\infty$, étudiez sa convexité et donnez sa tangente en 0.
5. Montrez que gd est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -\pi/2, \pi/2[$. Exprimez sa réciproque de deux façons : à l'aide de argsh et $\tan$, puis à l'aide de $\ln$ et $\tan$.
6. Calculez la dérivée de la réciproque.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [fonctions usuelles, cours de maths en L1](#)
- À maîtriser avant : [Dérivation et accroissements finis](#)
- Chapitre précédent : [Dérivation et accroissements finis](#)
- Chapitre suivant : [Arithmétique des entiers](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)