

Fonctions usuelles

I. Fonctions réciproques et théorème de la bijection

Toutes les fonctions usuelles de ce chapitre se construisent de la même façon. D'abord, on part d'une fonction connue, continue et strictement monotone sur un intervalle. Ensuite, le théorème de la bijection fournit une fonction réciproque. Enfin, on transfère à cette réciproque la continuité, la monotonie et, si possible, la dérivabilité.

1. Le théorème de la bijection

Théorème :

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. Alors $J = f(I)$ est un intervalle, et f réalise une bijection de I sur J . Sa réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue, strictement monotone, de même sens de variation que f .

Les bornes de J se lisent sur les limites de f aux bornes de I . Par exemple, si f est strictement croissante sur $]a, b[$, alors $J =]\lim_{a} f, \lim_{b} f[$. Ce point sert à chaque construction du chapitre.

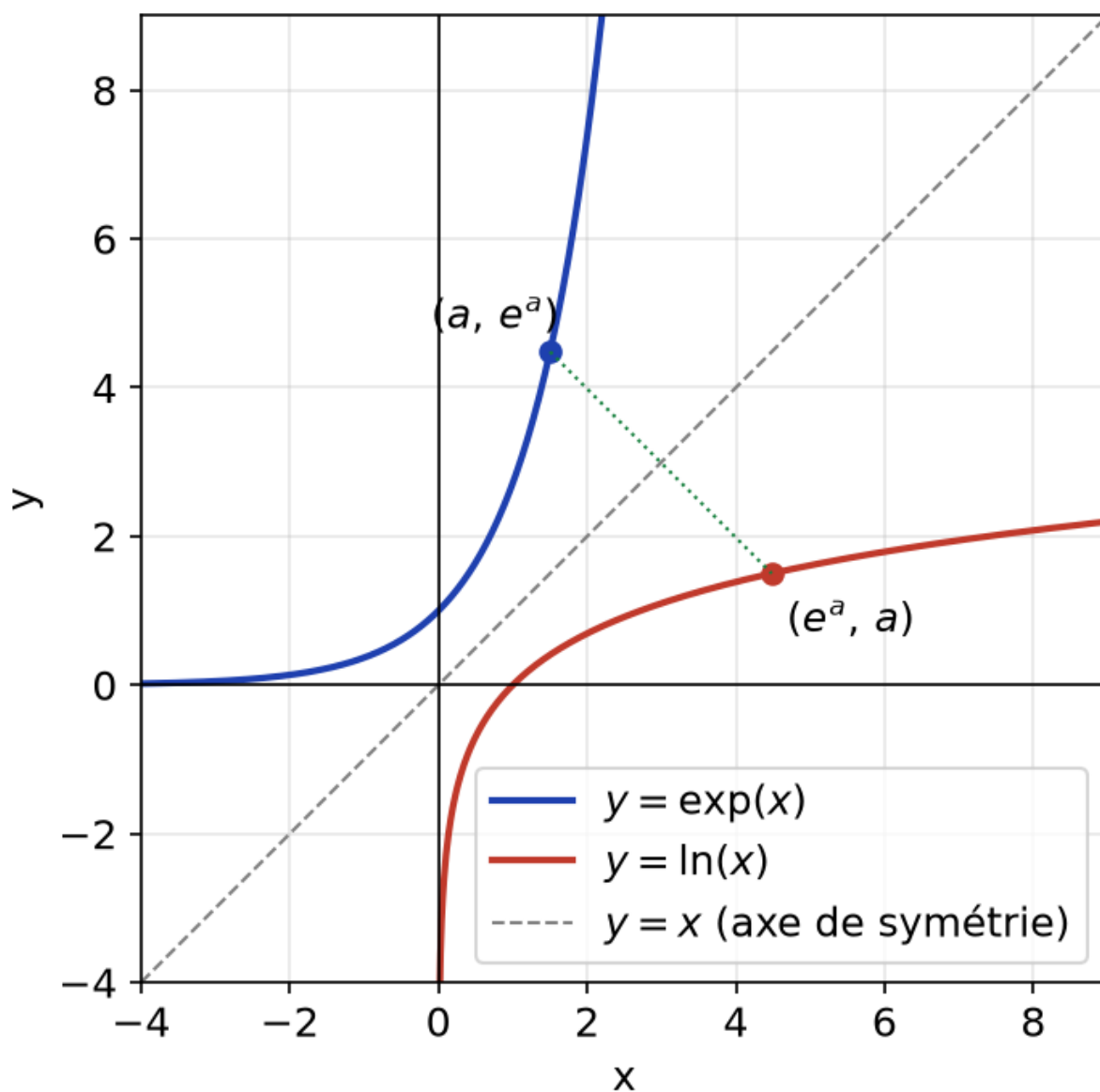
Démonstration :

Supposons f strictement croissante. Elle est injective, car $x < y$ entraîne $f(x) < f(y)$. Par conséquent, f est une bijection de I sur $f(I)$. De plus, $f(I)$ est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires. La réciproque est strictement croissante : si $u < v$ dans J et si l'on avait $f^{-1}(u) \geq f^{-1}(v)$, on obtiendrait $u \geq v$ en appliquant f . Enfin, une fonction

monotone dont l'image est un intervalle est continue, car elle n'a pas de saut. C'est pourquoi f^{-1} est continue.

2. Graphe et dérivée d'une réciproque

Le point (a, b) appartient au graphe de f si et seulement si (b, a) appartient au graphe de f^{-1} . Autrement dit, les deux courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice $y = x$. Comme le montre la figure ci-dessous, c'est le cas de l'exponentielle et du logarithme.



Théorème :

Sous les hypothèses précédentes, soit $y_0 = f(x_0)$ avec x_0 intérieur à I . Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Si $f'(x_0) = 0$, la courbe de f^{-1} admet une tangente verticale au point d'abscisse y_0 .

Démonstration :

Pour $y \neq y_0$ dans J , posons $x = f^{-1}(y)$. Alors $x \neq x_0$ et

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

Quand $y \rightarrow y_0$, on a $x \rightarrow x_0$ par continuité de f^{-1} . Donc le quotient tend vers $1/f'(x_0)$. Si $f'(x_0) = 0$, le quotient tend en valeur absolue vers $+\infty$, d'où la tangente verticale.

En pratique, on retient la formule sous la forme $(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1})$. Il reste ensuite à exprimer $f'(f^{-1}(y))$ en fonction de y seul.

II. Logarithme, exponentielle et fonctions puissances

1. Le logarithme népérien

Définition :

La fonction logarithme népérien $\ln$ est l'unique primitive de $x \rightarrow 1/x$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

Propriété :

Pour tous $a, b > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(1/a) = -\ln a$ et $\ln(a^n) = n \ln a$. De plus, $\ln$ est strictement croissante, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

Démonstration :

Fixons $b > 0$ et posons $g(x) = \ln(bx) - \ln x$ sur $]0, +\infty[$. On a $g'(x) = b/(bx) - 1/x = 0$, donc g est constante, égale à $g(1) = \ln b$. Ensuite, $\ln$ est croissante car sa dérivée est positive. Ainsi, $\ln(2^n) = n \ln 2$ tend vers $+\infty$, ce qui donne la limite en $+\infty$. Enfin, la limite en 0^+ s'en déduit avec $\ln(1/x) = -\ln x$.

2. L'exponentielle, réciproque du logarithme

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, et son image est $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, elle admet une réciproque définie sur $\mathbb{R}$: c'est l'exponentielle.

Proposition :

La fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est continue, strictement croissante, et vérifie $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$. Elle est dérivable et $\exp' = \exp$.

En effet, la formule de dérivation d'une réciproque donne $\exp'(y) = 1/\ln'(\exp y) = \exp y$. On note $e = \exp(1)$, et on écrit e^x pour $\exp(x)$.

3. Les fonctions puissances réelles

Définition :

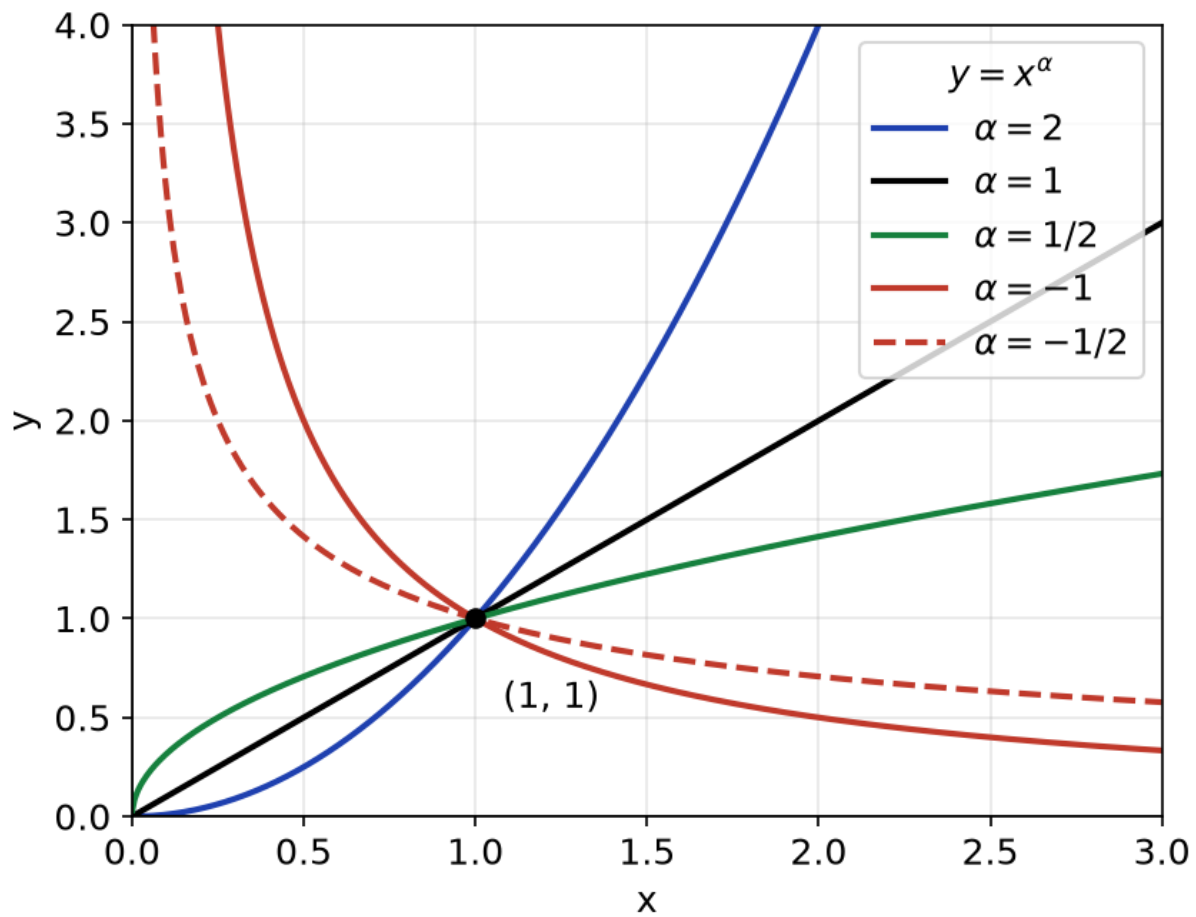
Pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on pose $a^b = e^{b \ln a}$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction puissance $x \rightarrow x^\alpha$ est définie sur $]0, +\infty[$ par $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

Cette définition prolonge les puissances entières et les racines. Par exemple, $x^{1/2} = e^{\frac{1}{2} \ln x} = \sqrt{x}$. De plus, les règles usuelles restent vraies : $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ et $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

Propriété :

La fonction $x \rightarrow x^\alpha$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $\alpha x^{\alpha-1}$. Elle est strictement croissante si $\alpha > 0$ et strictement décroissante si $\alpha < 0$. Si $\alpha > 0$, elle se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0.

La figure ci-dessous compare quelques puissances. Toutes les courbes passent par le point $(1, 1)$. Sur $]0, 1[$, la plus grande puissance donne la plus petite valeur ; au-delà de 1, l'ordre s'inverse.



Attention :

Une expression comme $u(x)^{v(x)}$ se réécrit toujours $e^{v(x)\ln u(x)}$, avec $u(x) > 0$. On étudie alors l'exposant $v(x)\ln u(x)$, ce qui ramène le problème à une seule limite.

Exemple :

Étudions $f(x) = 2^x$. On écrit $f(x) = e^{x \ln 2}$, donc $f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x$. Comme $\ln 2 > 0$, la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

III. Croissances comparées

Les limites de $\ln$, des puissances et de l'exponentielle sont infinies en $+\infty$. Pourtant, ces fonctions ne tendent pas vers l'infini à la même vitesse. Le théorème suivant les classe, et il permet de lever les formes indéterminées.

Théorème :

Pour tous réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

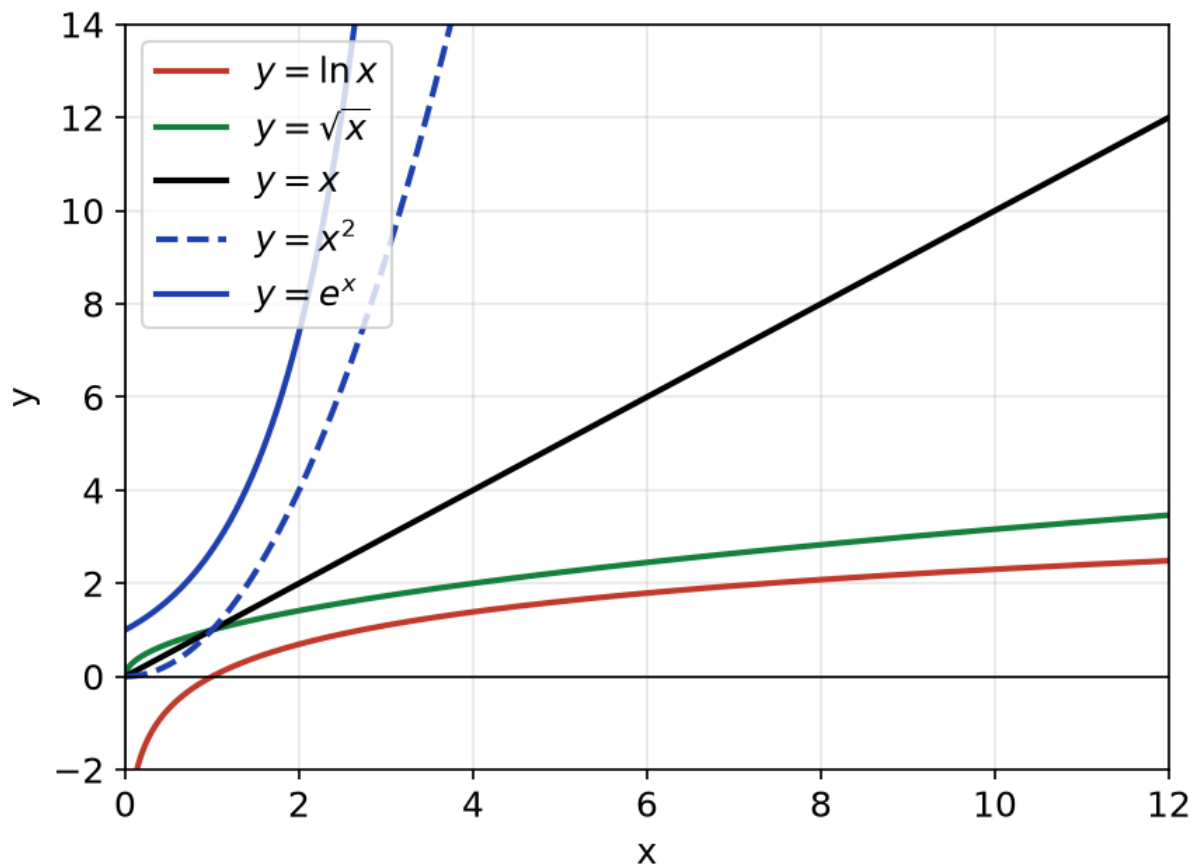
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0.$$

Démonstration :

D'abord, montrons que $\ln x \leq \sqrt{x}$ pour $x \geq 1$. La fonction $h(x) = \sqrt{x} - \ln x$ a pour dérivée $\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$. Elle atteint donc son minimum en 4, et $h(4) = 2 - 2\ln 2 > 0$. Ainsi, pour $x \geq 1$, $0 \leq \ln x / x \leq 1/\sqrt{x}$, ce qui donne $\ln x / x \rightarrow 0$.

Ensuite, écrivons $\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\ln X}{X}\right)^\alpha$ avec $X = x^{\beta/\alpha}$. Comme $X \rightarrow +\infty$, la première limite vaut 0. Pour la deuxième, on pose $x = \ln t$: $\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = \frac{(\ln t)^\alpha}{t^\beta}$ tend vers 0. Enfin, la troisième s'obtient avec $x = 1/t$.

On résume souvent ce théorème en une phrase : l'exponentielle l'emporte sur les puissances, qui l'emportent sur le logarithme. La figure ci-dessous rend cette hiérarchie visible.



Méthode :

Pour lever une indétermination avec les croissances comparées :

- on factorise, au numérateur et au dénominateur, le terme qui domine ;
- on fait apparaître des quotients du type $(\ln x)^\alpha / x^\beta$ ou $x^\alpha e^{-\beta x}$;
- pour une puissance variable u^v , on passe d'abord à $e^{v \ln u}$.

Exemple :

Cherchons la limite en $+\infty$ de $\frac{e^x + x^3}{e^x - \ln x}$. On factorise e^x en haut et en bas :

$$\frac{e^x + x^3}{e^x - \ln x} = \frac{1 + x^3 e^{-x}}{1 - (\ln x) e^{-x}}.$$

Or $x^3 e^{-x} \rightarrow 0$, et $(\ln x) e^{-x} \leq x e^{-x}$ tend aussi vers 0. Par conséquent, la limite vaut 1.

IV. Fonctions trigonométriques et fonctions trigonométriques réciproques

1. Rappels sur sinus, cosinus et tangente

Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont 2π -périodiques, dérivables, avec $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$. La tangente est définie hors de $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ par $\tan = \sin/\cos$. Elle est π -périodique et impaire.

Propriété :

La tangente est dérivable sur son domaine et $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$. De plus, pour a, b tels que les termes existent :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

Ces fonctions ne sont pas injectives sur $\mathbb{R}$. Pour les inverser, on les restreint donc à un intervalle où elles sont strictement monotones.

2. La fonction arcsinus

Sur $[-\pi/2, \pi/2]$, la fonction $\sin$ est continue et strictement croissante, car $\cos > 0$ sur l'intérieur. Son image est $[-1, 1]$. Le théorème de la bijection s'applique donc.

Définition :

La fonction $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ est la réciproque de la restriction de $\sin$ à $[-\pi/2, \pi/2]$. Ainsi, pour $x \in [-1, 1]$ et $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$:

$$\theta = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin \theta.$$

Théorème :

La fonction $\arcsin$ est continue, strictement croissante et impaire sur $[-1, 1]$. Elle est dérivable sur $] -1, 1[$ et

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En ± 1 , elle n'est pas dérivable : sa courbe y admet une tangente verticale.

Démonstration :

Soit $x \in]-1, 1[$ et $\theta = \arcsin x \in]-\pi/2, \pi/2[$. Alors $\sin'(\theta) = \cos \theta \neq 0$, donc $\arcsin$ est dérivable en x et $\arcsin'(x) = 1/\cos \theta$. Or $\cos \theta > 0$ et $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - x^2$. Par conséquent, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$. En $x = 1$, on a $\theta = \pi/2$ et $\cos \theta = 0$: c'est le cas de la tangente verticale.

Attention :

On a toujours $\sin(\arcsin x) = x$ pour $x \in [-1, 1]$. En revanche, $\arcsin(\sin \theta) = \theta$ seulement si $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Par exemple, $\arcsin(\sin \pi) = 0$.

3. La fonction arccosinus

De même, $\cos$ est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$, d'image $[-1, 1]$.

Définition :

La fonction $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ est la réciproque de la restriction de $\cos$ à $[0, \pi]$. Elle est continue, strictement décroissante, dérivable sur $] -1, 1[$ et $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

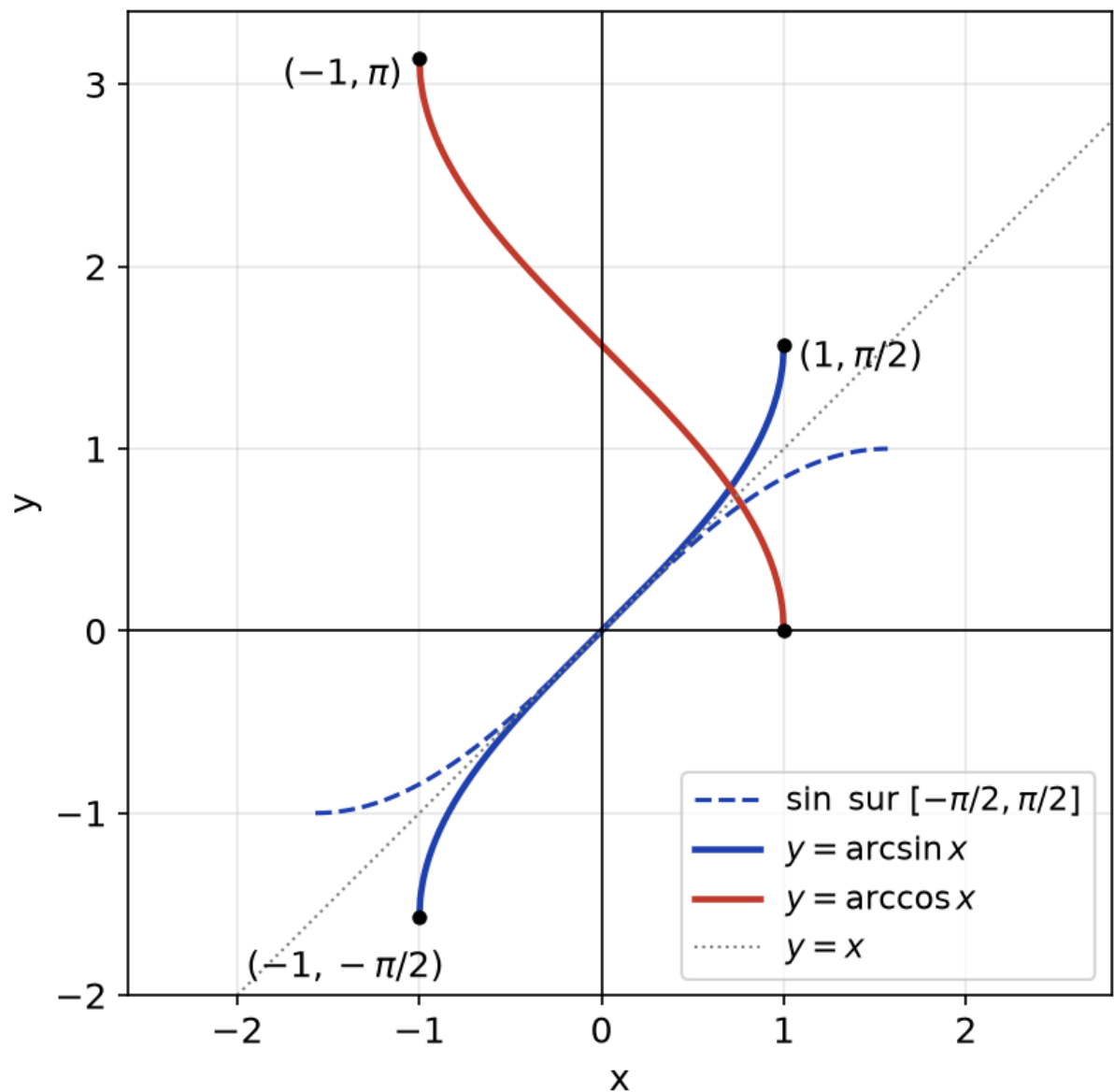
Proposition :

Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration :

La fonction $g = \arcsin + \arccos$ est continue sur $[-1, 1]$ et de dérivée nulle sur $] -1, 1[$. Elle est donc constante, égale à $g(0) = 0 + \pi/2$.

Comme le montre la figure ci-dessous, la courbe d'arcsinus est la symétrique de celle du sinus restreint par rapport à $y = x$. On y voit aussi les tangentes verticales aux extrémités.



4. La fonction arctangente

La tangente est continue et strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$, car $\tan' = 1 + \tan^2 > 0$. De plus, elle tend vers $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes. Son image est donc $\mathbb{R}$.

Définition :

La fonction $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$ est la réciproque de la restriction de $\tan$ à $]-\pi/2, \pi/2[$.

Théorème :

La fonction $\arctan$ est continue, strictement croissante, impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

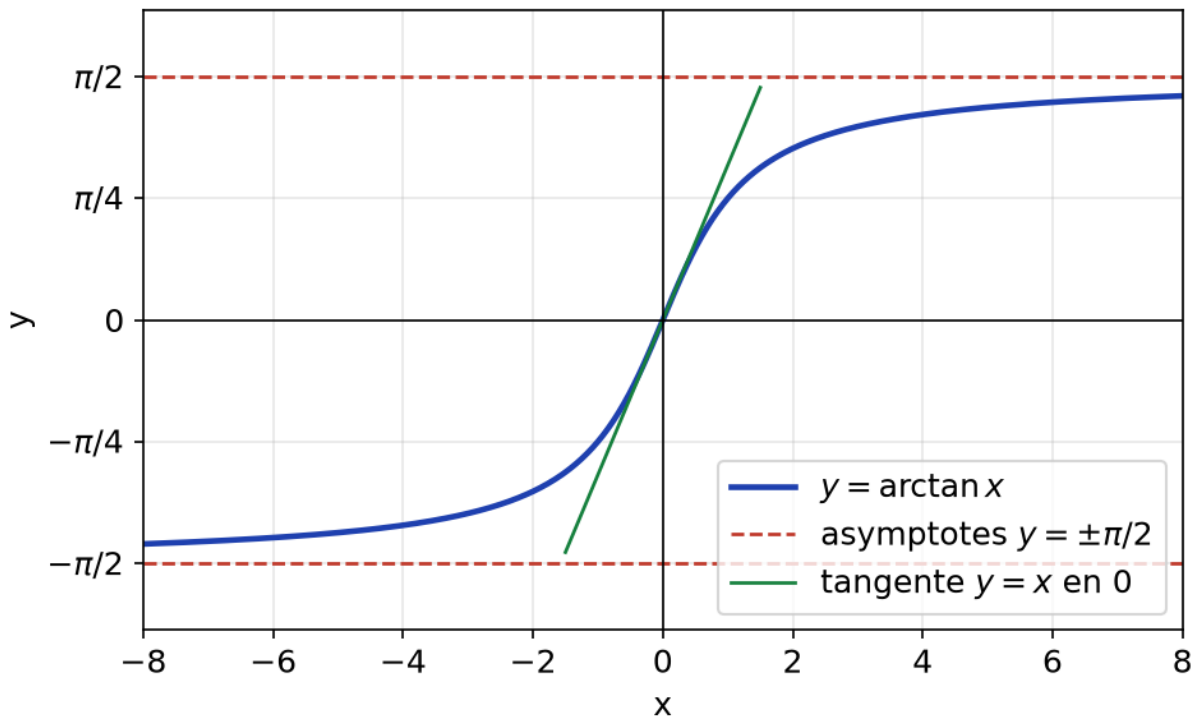
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.

Démonstration :

Pour $\theta = \arctan x$, on a $\tan'(\theta) = 1 + \tan^2\theta = 1 + x^2$, qui ne s'annule pas. La formule de dérivation d'une réciproque donne donc $\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$. Les limites découlent du théorème de la bijection.

La courbe ci-dessous présente deux asymptotes horizontales, d'équations $y = \pi/2$ et $y = -\pi/2$. Sa tangente en 0 est la droite $y = x$.



Propriété :

Pour tout $x > 0$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Pour tout $x < 0$, cette somme vaut $-\frac{\pi}{2}$.

Méthode :

Pour simplifier une expression contenant $\arctan$ ou $\arcsin$, deux voies existent :

- **par la dérivée** : on dérive sur chaque intervalle du domaine ; si la dérivée est celle d'une fonction connue, la différence est constante, et on calcule la constante en un point ou par une limite ;
- **par un changement de variable** : on pose $x = \tan \theta$ ou $x = \sin \theta$ avec θ dans le bon intervalle, puis on utilise $\arctan(\tan \varphi) = \varphi$ seulement si $\varphi \in]-\pi/2, \pi/2[$.

Dans les deux cas, on distingue les intervalles : la constante peut changer d'un intervalle à l'autre.

Exemple :

Calculons $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$. Posons $a = \arctan \frac{1}{2}$ et $b = \arctan \frac{1}{3}$. Ces deux angles sont dans $]0, \pi/4[$, donc $a + b \in]0, \pi/2[$. Ensuite, $\tan(a + b) = \frac{1/2 + 1/3}{1 - 1/6} = 1$. Or le seul angle de $]0, \pi/2[$ de tangente 1 est $\pi/4$. Finalement, $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

V. Fonctions hyperboliques

Définition :

Pour tout réel x , on pose

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

Ainsi, ch est la partie paire de l'exponentielle et sh sa partie impaire. En particulier, $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$.

Propriété :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

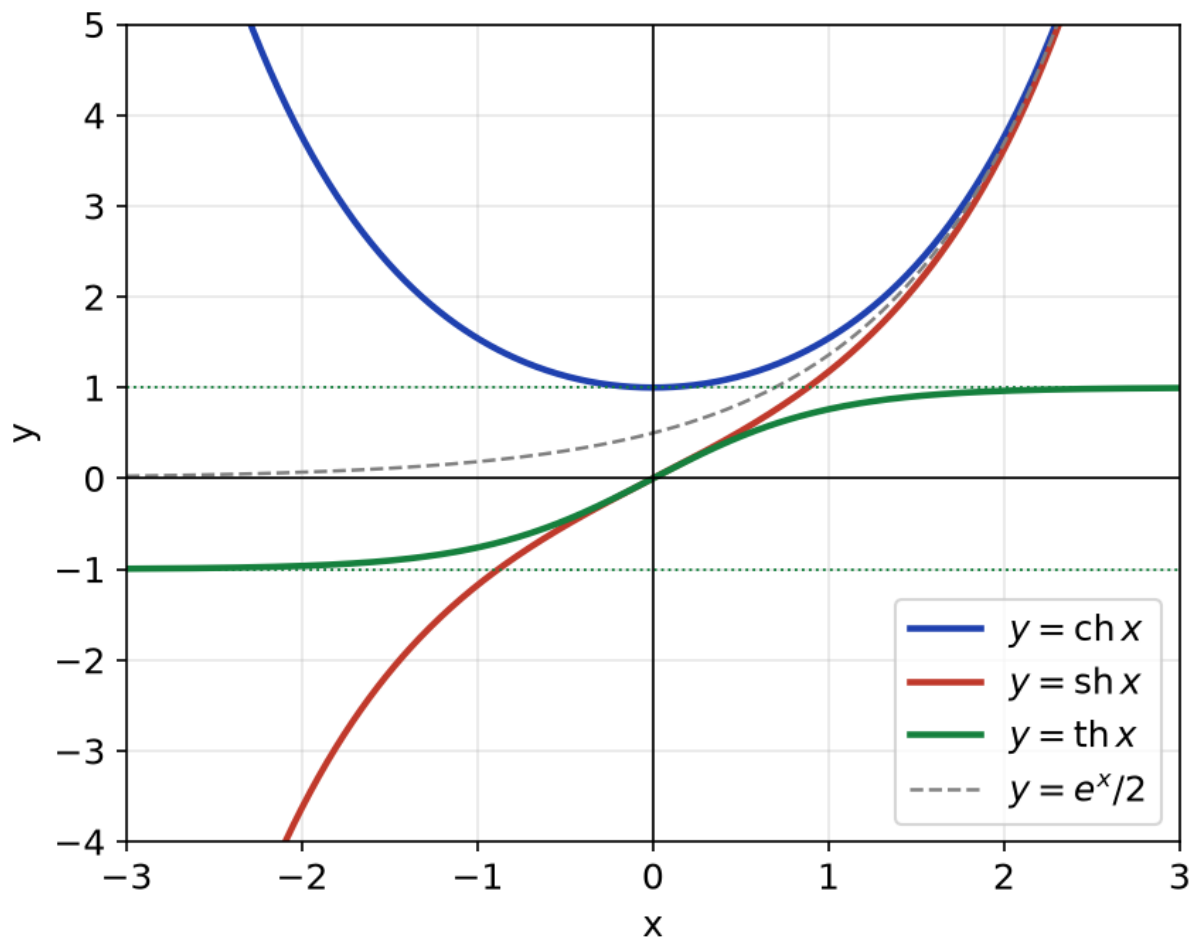
- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;

- $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$, $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ et $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}$;
- $\operatorname{ch} x \geq 1$ et $-1 < \operatorname{th} x < 1$.

Démonstration :

On a $(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) = e^{-x} e^x = 1$, d'où la première égalité. Les dérivées s'obtiennent terme à terme. Ensuite, la dérivée d'un quotient donne $\operatorname{th}' = \frac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}$. Enfin, $\operatorname{ch} x \geq 1$ découle de l'inégalité $a + 1/a \geq 2$ pour $a = e^x > 0$.

La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. De même, th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$. En revanche, ch est paire et décroît sur $] -\infty, 0]$. Comme le montre la figure ci-dessous, ch et sh se rapprochent de $e^x/2$ en $+\infty$.



Remarque :

Les formules hyperboliques ressemblent aux formules trigonométriques, au signe près. Par exemple, $\text{ch}(a + b) = \text{ch } a \text{ ch } b + \text{sh } a \text{ sh } b$. Le point $(\text{ch } t, \text{sh } t)$ décrit une branche de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$, d'où le nom de ces fonctions.

Exemple :

Réolvons $\text{sh } x = y$ pour construire la réciproque de sh . On pose $t = e^x > 0$. L'équation devient $t^2 - 2yt - 1 = 0$. Le produit des racines vaut -1 , donc une seule racine est positive : $t = y + \sqrt{y^2 + 1}$. Par conséquent, la réciproque de sh est $y \rightarrow \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

VI. Fonctions homographiques, asymptotes et branches infinies

1. Fonctions homographiques et rationnelles simples

Définition :

Une fonction homographique est une fonction $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$. Elle est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$.

Une division donne $f(x) = \frac{a}{c} + \frac{k}{cx+d}$ avec $k = b - \frac{ad}{c}$. De plus, $f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$. Le signe de $ad - bc$ fixe donc le sens de variation sur chaque intervalle. La courbe est une hyperbole de centre $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$, avec deux asymptotes : $x = -d/c$ et $y = a/c$.

Exemple :

Pour $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$, on écrit $f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$. Ici $ad - bc = 3 + 1 = 4 > 0$: la fonction croît sur $] -\infty, -1[$ et sur $] -1, +\infty[$. Elle réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. En résolvant $y = 3 - \frac{4}{x+1}$, on trouve $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{3-y}$.

2. Asymptotes et branches infinies

Définition :

Soit f définie au voisinage de $+\infty$. La droite $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$. Elle est oblique si $a \neq 0$.

Méthode :

Pour étudier la branche infinie de f en $+\infty$ quand $f(x) \rightarrow \pm\infty$:

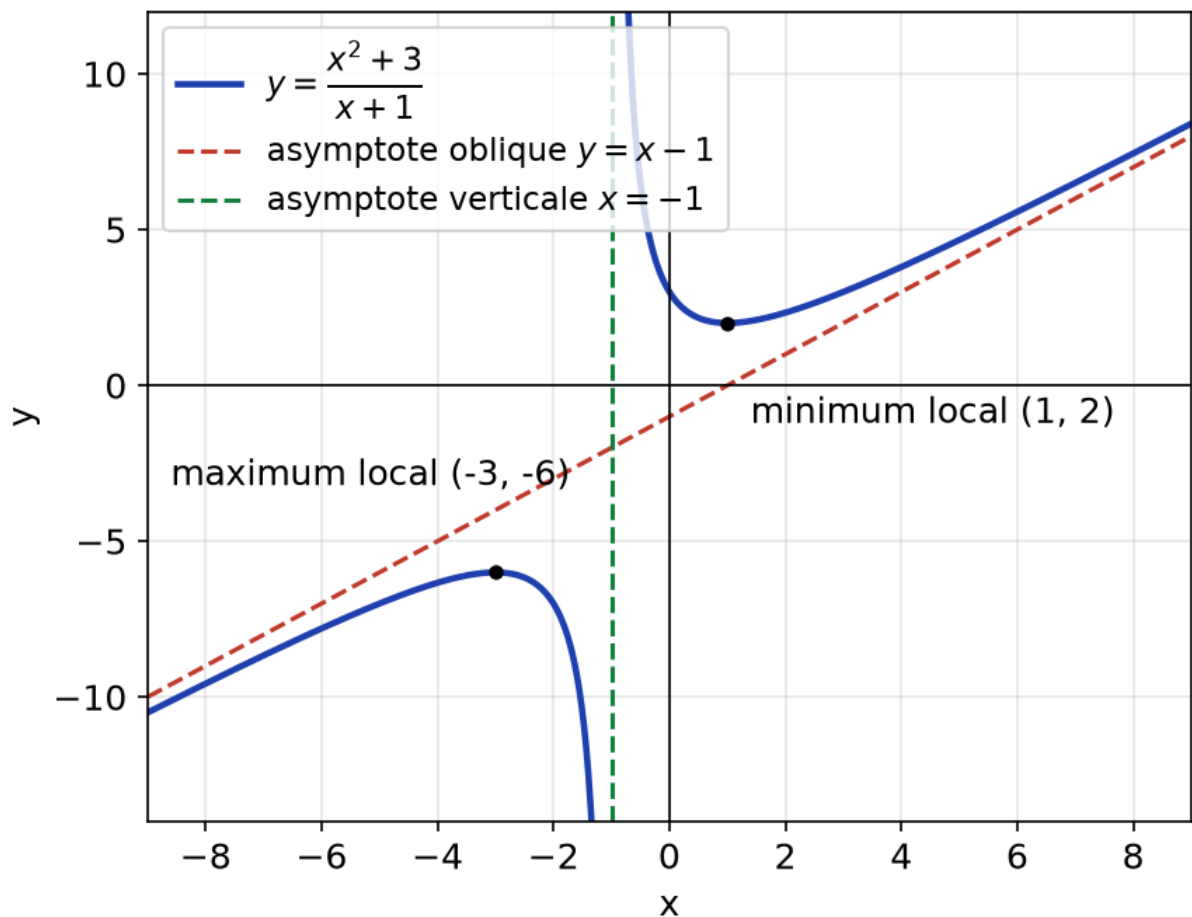
- on calcule $\lim f(x)/x$. Si elle vaut $\pm\infty$, la courbe a une branche parabolique de direction (Oy) ; si elle vaut 0, une branche parabolique de direction (Ox) ;
- si $f(x)/x \rightarrow a$ réel non nul, on calcule $\lim (f(x) - ax)$;
- si cette limite vaut un réel b , la droite $y = ax + b$ est asymptote ; si elle est infinie, la branche est parabolique de direction $y = ax$;
- enfin, le signe de $f(x) - (ax + b)$ donne la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Pour une fonction rationnelle, la division euclidienne donne souvent tout d'un coup. En effet, si $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$, la droite $y = ax + b$ est asymptote.

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$. La division euclidienne donne $x^2 + 3 = (x + 1)(x - 1) + 4$, donc $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x + 1}$. Ainsi, la droite $y = x - 1$ est asymptote en $\pm\infty$. La courbe est au-dessus pour $x > -1$ et en dessous pour $x < -1$. Ensuite, $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$ s'annule en $x = 1$ et $x = -3$, avec $f(1) = 2$ et $f(-3) = -6$.

La figure ci-dessous montre les deux asymptotes et les deux extremums locaux de cet exemple.



3. Plan d'étude complète d'une fonction

Une étude complète suit toujours le même ordre. D'abord, on fixe le domaine de définition et on cherche les symétries ou la périodicité, qui réduisent l'intervalle d'étude. Ensuite, on étudie la continuité et la dérivabilité, puis on calcule la dérivée et son signe. On dresse alors le tableau de variations avec les limites aux bornes. De plus, on précise les asymptotes, les branches infinies et les tangentes remarquables. Enfin, on trace la courbe en plaçant d'abord les asymptotes et les points particuliers.

Remarque :

En un point où la fonction n'est pas dérivable, on étudie la limite du taux d'accroissement à gauche et à droite. On obtient ainsi une demi-tangente verticale ou un point anguleux, qu'il faut faire apparaître sur le tracé.

Ce qu'il faut retenir

- Une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle est une bijection sur son image, et sa réciproque est continue, de même monotonie.
- Si $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, alors $(f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$; sinon, la tangente est verticale.
- Pour $a > 0$, $a^b = e^{b \ln a}$: toute puissance variable se traite par l'exponentielle.
- Croissances comparées: $(\ln x)^\alpha / x^\beta \rightarrow 0$ et $x^\alpha e^{-\beta x} \rightarrow 0$ en $+\infty$, et $x^\beta |\ln x|^\alpha \rightarrow 0$ en 0^+ .
- $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $] -1, 1[$ et $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
- $\arcsin(\sin \theta) = \theta$ seulement pour $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$; même prudence pour $\arccos$ et $\arctan$.
- $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$, et $\arctan x + \arctan(1/x) = \pm \pi/2$ selon le signe de x .
- $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$, $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$, $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$.
- Une homographie $\frac{ax+b}{cx+d}$ a une dérivée du signe de $ad - bc$ et deux asymptotes.
- Asymptote oblique: on calcule $\lim f(x)/x = a$, puis $\lim (f(x) - ax) = b$, puis le signe de $f(x) - ax - b$.

Questions fréquentes sur fonctions usuelles

Pourquoi $\arcsin(\sin x)$ n'est-il pas toujours égal à x ?

La fonction arcsinus renvoie un angle de l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. L'égalité $\arcsin(\sin x) = x$ n'est donc vraie que si x appartient à cet intervalle. Sinon, il faut chercher l'angle de $[-\pi/2, \pi/2]$ qui a le même sinus que x , par exemple $\pi - x$.

Comment retrouver rapidement la dérivée de arctan ?

On applique la formule de dérivation d'une réciproque : la dérivée vaut 1 sur $\tan'$ évaluée en arctan x. Comme $\tan' = 1 + \tan^2$, on obtient $1/(1 + x^2)$. La même démarche donne $1/\sqrt{1 - x^2}$ pour arcsinus.

Quand utiliser les croissances comparées ?

Dès qu'une limite mêle logarithme, puissances et exponentielle et conduit à une forme indéterminée. On factorise le terme dominant pour faire apparaître des quotients comme $(\ln x)/x$ ou $x^n e^{-x}$, qui tendent vers 0. Pour une puissance variable u^v , on écrit d'abord $\exp(v \ln u)$.

Comment trouver une asymptote oblique ?

On calcule d'abord la limite de $f(x)/x$, qui donne la pente a si elle est finie et non nulle. On calcule ensuite la limite de $f(x) - ax$, qui donne l'ordonnée b si elle est finie. Le signe de $f(x) - ax - b$ indique enfin la position de la courbe.

Pour aller plus loin en L1

- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur fonctions usuelles](#)
- Les solutions : [corrigé des exercices sur fonctions usuelles](#)
- À maîtriser avant : [Dérivation et accroissements finis](#)
- Chapitre précédent : [Dérivation et accroissements finis](#)
- Chapitre suivant : [Arithmétique des entiers](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)