

Fonctions usuelles

Corrigé de l'exercice 1 : Ensembles de définition, parité et périodicité

- La fonction est définie lorsque $1 - x \neq 0$ et $\frac{1+x}{1-x} > 0$. Un tableau de signes montre que le quotient est strictement positif exactement pour $x \in]-1, 1[$. Cet intervalle est symétrique par rapport à 0. De plus, $f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$. **Ainsi, f est définie sur $]-1, 1[$ et impaire.**
- Il faut $4 - x^2 \geq 0$, soit $x \in [-2, 2]$, et $x^2 \neq 1$. Donc $D = [-2, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, 2]$, qui est symétrique. Comme g ne dépend que de x^2 , on a $g(-x) = g(x)$. **Par conséquent, g est paire sur D .**
- La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x , $\cos(3x + 6\pi) = \cos(3x)$ et $\sin(2x + 4\pi) = \sin(2x)$. Donc $h(x + 2\pi) = h(x)$. En revanche, $h(0) = 1$ et $h(\pi) = \cos(3\pi) + \sin(2\pi) = -1$. Comme $h(0 + \pi) \neq h(0)$, le réel π n'est pas une période. **La fonction h est 2π -périodique, mais pas π -périodique.**
- Le dénominateur $e^x - 1$ s'annule seulement en 0, donc k est définie sur $\mathbb{R}^*$, qui est symétrique. Pour $x \neq 0$, on multiplie numérateur et dénominateur par e^x :

$$k(-x) = \frac{-x}{e^{-x} - 1} - \frac{x}{2} = \frac{-x e^x}{1 - e^x} - \frac{x}{2} = \frac{x e^x}{e^x - 1} - \frac{x}{2}.$$

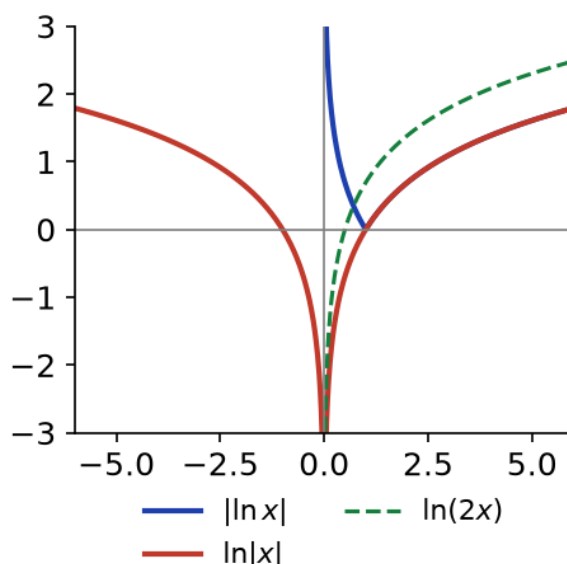
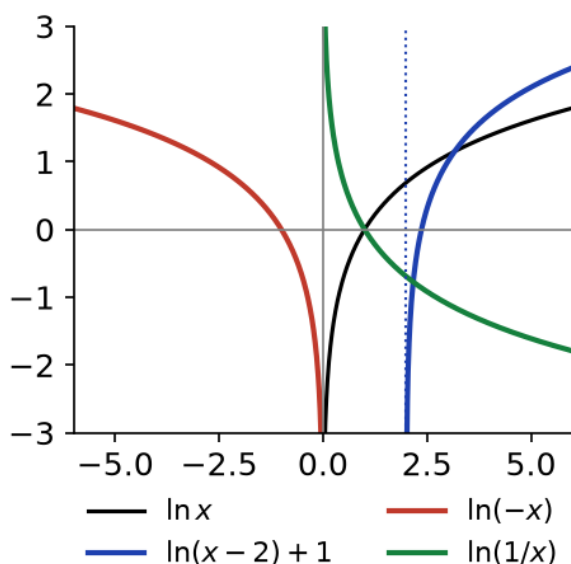
Ensuite, on calcule la différence : $k(-x) - k(x) = \frac{x e^x - x}{e^x - 1} - x = x - x = 0$. **Donc k est paire sur $\mathbb{R}^*$.**

Point de méthode : pour prouver la parité, on vérifie toujours d'abord que l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0.

Corrigé de l'exercice 2 : Transformations du graphe du logarithme

1. La fonction f_1 est définie pour $x > 2$. On a $f_1(x) = \ln(x - 2) + 1$, de la forme $f(x - a) + b$ avec $a = 2$ et $b = 1$. **La courbe de f_1 est l'image de celle de $\ln$ par la translation de vecteur $\vec{u}(2; 1)$; son asymptote verticale devient la droite $x = 2$.**
2. La fonction f_2 est définie pour $x < 0$. **Sa courbe est la symétrique de celle de $\ln$ par rapport à l'axe des ordonnées.**
3. Pour $x > 0$, $f_3(x) = -\ln x$. **La courbe de f_3 est la symétrique de celle de $\ln$ par rapport à l'axe des abscisses.**
4. La fonction f_4 est définie sur $]0, +\infty[$. Sur $[1, +\infty[$, $\ln x \geq 0$, donc $f_4 = \ln$. Sur $]0, 1[$, $\ln x < 0$, donc $f_4 = -\ln$. **On garde la partie de la courbe au-dessus de l'axe et on remplace l'autre par sa symétrique par rapport à l'axe des abscisses.**
5. La fonction f_5 est définie sur $\mathbb{R}^*$ et paire. Sur $]0, +\infty[$, elle coïncide avec $\ln$. **Sa courbe est donc la réunion de celle de $\ln$ et de sa symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.**
6. Pour $x > 0$, $f_6(x) = \ln 2 + \ln x$. D'une part, c'est une translation verticale de vecteur $\vec{v}(0; \ln 2)$. D'autre part, $f_6(x) = \ln(\lambda x)$ avec $\lambda = 2$, ce qui correspond à une affinité horizontale de rapport $\frac{1}{2}$. **Les deux transformations donnent la même courbe.**

La figure ci-dessous regroupe les six courbes obtenues. À gauche, on voit la translation et les deux symétries ; à droite, les valeurs absolues et la courbe de $\ln(2x)$.



Corrigé de l'exercice 3 : Fonctions monotones et fonctions bornées

- Pour tout réel x , $(|x| - 1)^2 \geq 0$, donc $1 + x^2 \geq 2|x|$. En divisant par $1 + x^2 > 0$, on obtient $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$. L'égalité a lieu si et seulement si $|x| = 1$. Or $f(1) = \frac{1}{2}$ et $f(-1) = -\frac{1}{2}$. Ainsi, f est bornée, de maximum $\frac{1}{2}$ atteint en 1 et de minimum $-\frac{1}{2}$ atteint en -1.
- La fonction g est dérivable et $g'(x) = 1 + \cos x \geq 0$. Donc g est croissante. Supposons que $g(a) = g(b)$ avec $a < b$. Alors g est constante sur $[a, b]$, car elle est croissante. Par conséquent, g' serait nulle sur $[a, b]$. Or g' ne s'annule qu'aux points isolés $\pi + 2k\pi$. C'est absurde, donc g est strictement croissante. Enfin, $g(x) \geq x - 1$, qui tend vers $+\infty$.
La fonction g est strictement croissante et non majorée.
- Prenons $u(x) = v(x) = x$, croissantes sur $\mathbb{R}$. Alors $uv(x) = x^2$, et $uv(-1) = 1 > 0 = uv(0)$. Donc uv n'est pas croissante. Supposons maintenant u et v croissantes et positives. Soient $x \leq y$. On a $u(x) \leq u(y)$ et $v(x) \geq 0$, donc $u(x)v(x) \leq u(y)v(x)$. De même, $v(x) \leq v(y)$ et $u(y) \geq 0$, donc $u(y)v(x) \leq u(y)v(y)$. Par transitivité, $uv(x) \leq uv(y)$: le produit est croissant.
- Soient f et g décroissantes, avec $g \circ f$ définie. Si $x \leq y$, alors $f(x) \geq f(y)$. Ensuite, g renverse l'ordre, donc $g(f(x)) \leq g(f(y))$. La composée $g \circ f$ est croissante.

Corrigé de l'exercice 4 : Calculs de dérivées

1. La fonction f_1 est un produit de fonctions dérivables. On obtient $f'_1(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x}$.
Donc $f'_1(x) = x(2 - x)e^{-x}$.

2. Pour tout réel x , $\sqrt{x^2+1} > |x| \geq -x$, donc $x + \sqrt{x^2+1} > 0$. De plus, $x^2 + 1 > 0$, donc la racine est dérivable. La dérivée de la composée donne

$$f'_2(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} (x + \sqrt{x^2+1})}.$$

Après simplification, $f'_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

3. Le dénominateur ne s'annule pas. La formule du quotient donne $f'_3(x) = \frac{3x^2(1+x^2) - 2x \cdot x^3}{(1+x^2)^2}$.
Donc $f'_3(x) = \frac{x^2(x^2+3)}{(1+x^2)^2}$.

4. On compose $x \rightarrow \cos(2x)$, de dérivée $-2\sin(2x)$, avec $y \rightarrow y^3$. **On obtient**
 $f'_4(x) = -6\cos^2(2x)\sin(2x)$.

5. On écrit $f_5(x) = e^{x \ln x}$, composée de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$. La dérivée de $x \ln x$ vaut $\ln x + 1$. **Ainsi,** $f'_5(x) = (\ln x + 1) x^x$.

6. Par produit et composée, $f'_6(x) = \cos x e^{\sin x} \cos x - e^{\sin x} \sin x$. **Donc**
 $f'_6(x) = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x)$.

Corrigé de l'exercice 5 : Dérivée d'une fonction réciproque

1. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 1 + e^x > 0$. Elle est donc

strictement croissante. De plus, $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Comme f' ne s'annule jamais, le théorème de la dérivée réciproque s'applique en tout point.

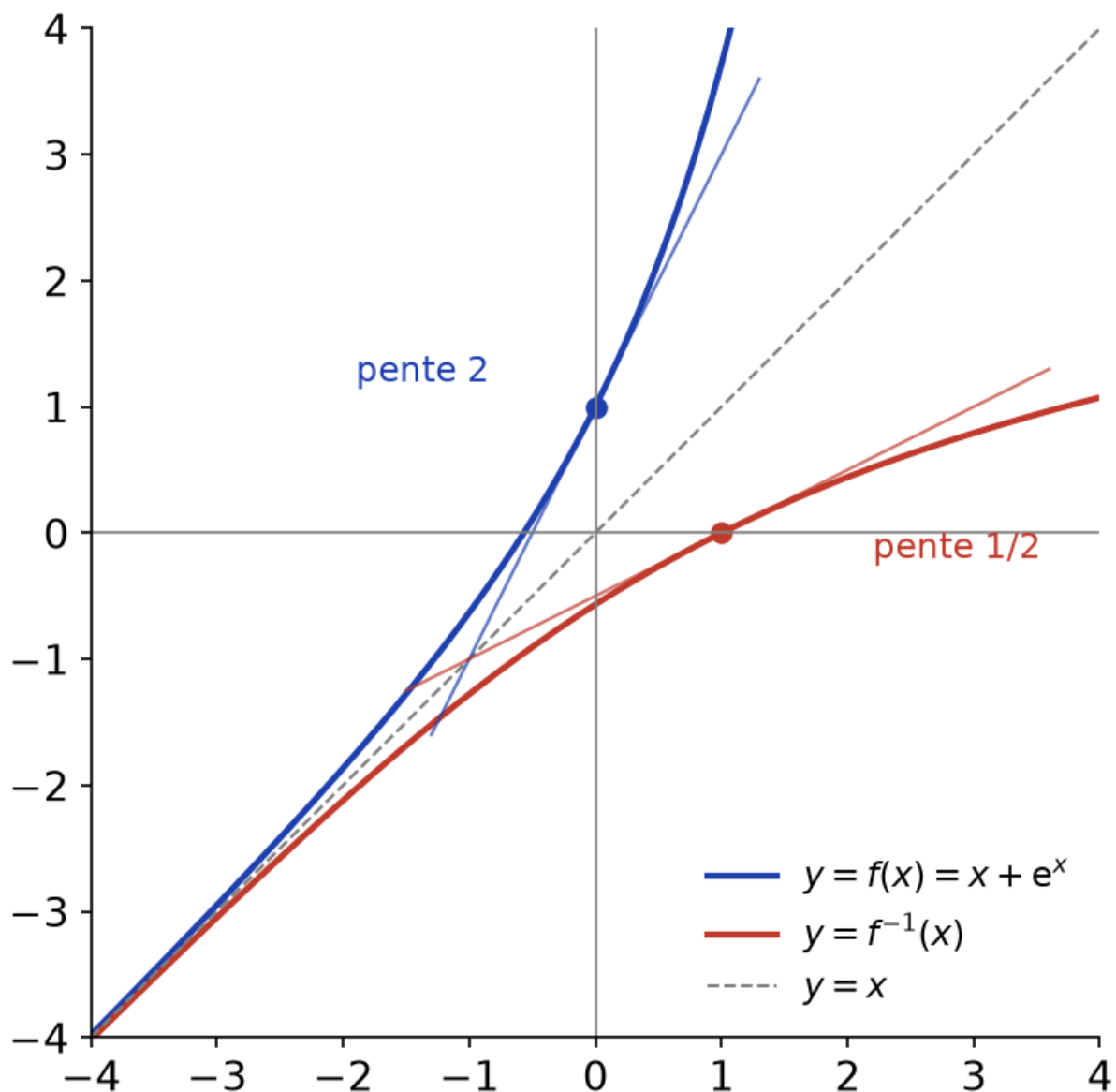
Pour tout réel y , $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{1 + e^{g(y)}}.$

3. On a $f(0) = 0 + 1 = 1$, donc $g(1) = 0$. Ensuite $g'(1) = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$. La tangente a pour équation $y = g(1) + g'(1)(x - 1)$. De même, $f(1) = 1 + e$, donc $g(1 + e) = 1$ et $g'(1 + e) = \frac{1}{1 + e}$. **Ainsi, $g(1) = 0$, $g'(1) = \frac{1}{2}$, la tangente est $y = \frac{x-1}{2}$, et $g'(1+e) = \frac{1}{1+e}$.**

4. Pour tout y , $f(g(y)) = y$, c'est-à-dire $g(y) + e^{g(y)} = y$. Donc $e^{g(y)} = y - g(y)$. **En reportant,** $g'(y) = \frac{1}{1 + y - g(y)}.$

5. Le dénominateur $1 + y - g(y) = 1 + e^{g(y)}$ est dérivable et strictement positif. Par conséquent, g' est dérivable, et $g''(y) = -\frac{1 - g'(y)}{(1 + y - g(y))^2}$. En $y = 1$, on obtient $g''(1) = -\frac{1 - 1/2}{2^2}$. **Donc $g''(1) = -\frac{1}{8}$.**

Comme le montre la figure ci-dessous, la tangente de pente 2 à la courbe de f en $(0; 1)$ devient, par symétrie, la tangente de pente $\frac{1}{2}$ à la courbe de g en $(1; 0)$.



Corrigé de l'exercice 6 : Équations avec exponentielles, logarithmes et puissances

- On pose $t = e^x > 0$. L'équation devient $t^2 - 3t + 2 = 0$, soit $(t - 1)(t - 2) = 0$. Les deux racines sont positives, donc $e^x = 1$ ou $e^x = 2$. **Les solutions sont 0 et $\ln 2$.**
- Il faut $x > 0$ et $x > 1$, soit $x > 1$. Sur cet intervalle, l'équation équivaut à $\ln(x(x-1)) = \ln 6$, donc à $x^2 - x - 6 = 0$. Les racines sont 3 et -2. Seule la première vérifie $x > 1$. **La solution est $x = 3$.**

3. Par définition, $2^x = e^{x \ln 2}$ et $3^{x-1} = e^{(x-1) \ln 3}$. L'exponentielle est injective, donc l'équation équivaut à $x \ln 2 = (x-1) \ln 3$. Ainsi, $x(\ln 3 - \ln 2) = \ln 3$. **La solution est**

$$x = \frac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 2} = \frac{\ln 3}{\ln(3/2)} \approx 2,71.$$
4. On pose $t = 2^x > 0$. Alors $4^x = t^2$ et $2^{x+1} = 2t$. L'équation devient $t^2 - 2t - 8 = 0$, soit $(t-4)(t+2) = 0$. Comme $t > 0$, on a $t = 4$. **La solution est** $x = 2$.
5. Pour $x > 0$, on prend le logarithme des deux membres, qui sont strictement positifs. On obtient $\sqrt{x} \ln x = x \ln \sqrt{x} = \frac{x}{2} \ln x$. Donc $\ln x \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) = 0$. Le premier facteur s'annule pour $x = 1$. Le second s'écrit $\sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)$ et s'annule pour $\sqrt{x} = 2$. On vérifie que $4^2 = 16 = 2^4$. **Les solutions sont 1 et 4.**

Corrigé de l'exercice 7 : Limites par croissances comparées

1. Avec $\alpha = 3$ et $\beta = \frac{1}{2}$, le théorème des croissances comparées s'applique directement. **La limite vaut 0.**
2. On écrit $x^x = e^{x \ln x}$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ par croissances comparées. Par continuité de l'exponentielle en 0, **la limite vaut** $e^0 = 1$.
3. On écrit $x^{1/x} = e^{\ln x / x}$. Comme $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$, **la limite vaut 1.**
4. On pose $u = \sqrt{x}$, qui tend vers $+\infty$. Alors $\frac{e^{\sqrt{x}}}{x^5} = \frac{e^u}{u^{10}}$. Or $\frac{u^{10}}{e^u} \rightarrow 0^+$. **Donc la limite vaut** $+\infty$.
5. On pose $x = e^{-t}$, avec $t \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$. Alors $x(\ln x)^2 = t^2 e^{-t}$, qui tend vers 0. **La limite vaut 0.**
6. On factorise par e^x au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{e^x - x^3}{e^x + \ln x} = \frac{1 - x^3 e^{-x}}{1 + \ln x e^{-x}}.$$

Par croissances comparées, $x^3 e^{-x} \rightarrow 0$ et $\ln x e^{-x} \rightarrow 0$. **La limite vaut 1.**

Point de méthode : devant une forme indéterminée, on factorise par le terme dominant, puis on invoque les croissances comparées.

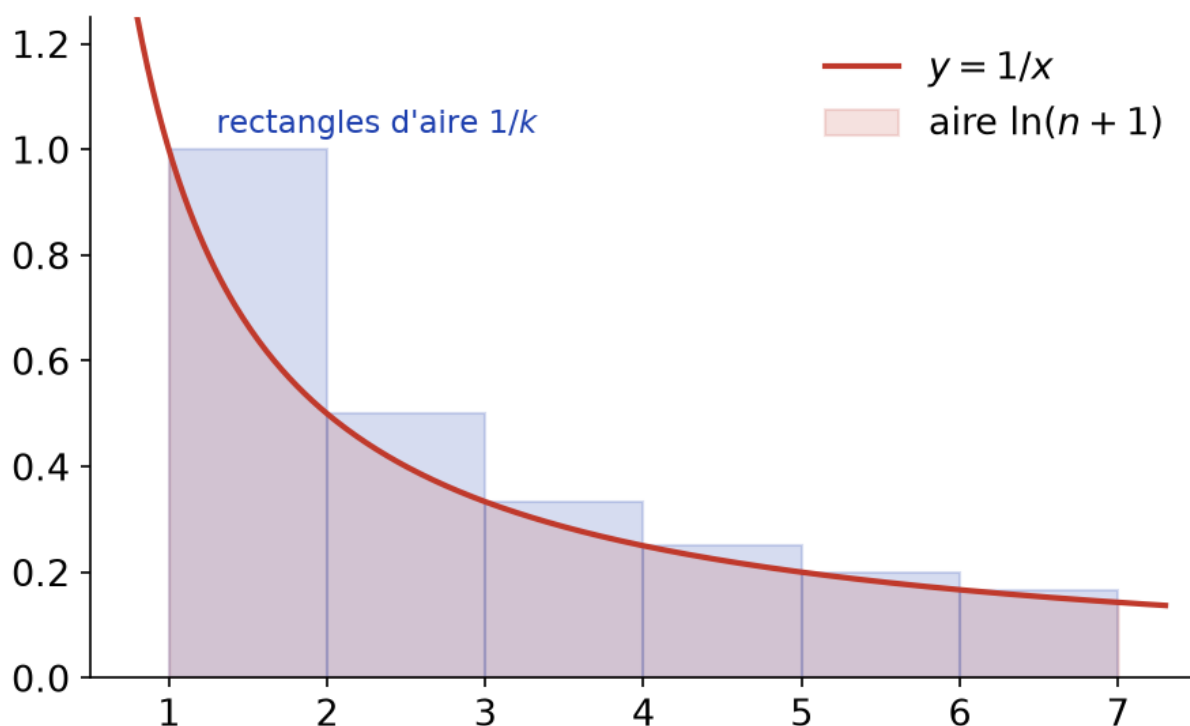
Corrigé de l'exercice 8 : Les inégalités fondamentales et la somme harmonique

1. Soit $\varphi(x) = e^x - 1 - x$. Elle est dérivable et $\varphi'(x) = e^x - 1$. Cette dérivée est négative sur $] -\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$. Donc φ admet un minimum en 0, égal à $\varphi(0) = 0$. Ainsi, $e^x \geq 1 + x$. Ensuite, pour $x > -1$, on applique ce résultat au réel $\ln(1+x)$:
 $1 + x \geq 1 + \ln(1+x)$. **Donc** $e^x \geq 1 + x$ **sur** $\mathbb{R}$ **et** $\ln(1+x) \leq x$ **sur** $] -1, +\infty[$.
2. Soit $x > -1$. On pose $y = -\frac{x}{1+x}$. Alors $1 + y = \frac{1}{1+x} > 0$, donc $y > -1$. La question précédente donne $\ln\left(\frac{1}{1+x}\right) \leq -\frac{x}{1+x}$. **En changeant de signe**, $\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$.
3. On applique la première inégalité à $-x$: $e^{-x} \geq 1 - x$. Si $x < 1$, les deux membres sont strictement positifs. La fonction inverse étant décroissante sur $]0, +\infty[$, **on obtient**
 $e^x \leq \frac{1}{1-x}$.
4. Pour $k \geq 1$, la question 1 donne $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$. Or $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k$. En sommant pour k de 1 à n , la somme télescopique vaut $\ln(n+1)$. Donc $\ln(n+1) \leq H_n$. Par ailleurs, la question 2 donne $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \geq \frac{1/k}{1+1/k} = \frac{1}{k+1}$. En sommant pour k de 1 à $n-1$, on obtient $\ln n \geq H_n - 1$. **Finalement**, $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$.
5. Comme $\ln(n+1) \rightarrow +\infty$, on a $H_n \rightarrow +\infty$. Pour $n \geq 2$, on divise par $\ln n > 0$:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1.$$

Or $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}$, qui tend vers 1. Le théorème des gendarmes conclut. **Ainsi**,
 $H_n \rightarrow +\infty$ **et** $\frac{H_n}{\ln n} \rightarrow 1$.

La figure ci-dessous interprète l'inégalité de gauche. Les rectangles de largeur 1 et de hauteur $\frac{1}{k}$ recouvrent l'aire sous la courbe $y = 1/x$ entre 1 et $n+1$, qui vaut $\ln(n+1)$.



Corrigé de l'exercice 9 : Inégalités par étude de fonction

1. Posons $\varphi(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ sur $[0, +\infty[$. Alors

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1 - (1+x) + x(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0.$$

Donc φ est croissante et $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$. De même, $\psi(x) = x - \ln(1+x)$ a pour dérivée $\frac{x}{1+x} \geq 0$ et $\psi(0) = 0$. **Ainsi**, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ **pour tout** $x \geq 0$.

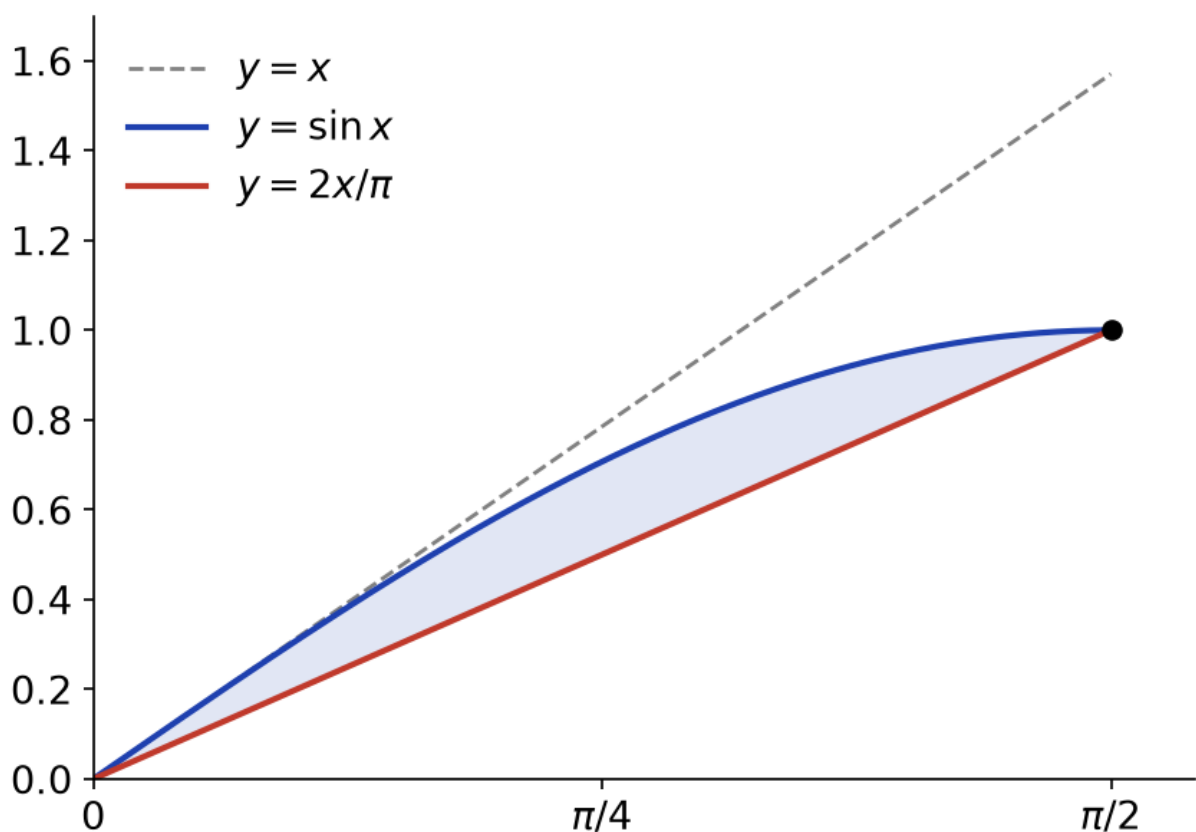
2. Avec $x = 0,1$, on obtient $0,1 - 0,005 \leq \ln(1,1) \leq 0,1$. **Donc** $0,095 \leq \ln(1,1) \leq 0,1$.

3. Soit $v(x) = x - \sin x$. Alors $v'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ et $v(0) = 0$, donc $v \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. Ensuite, soit $u(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. Sa dérivée $u'(x) = x - \sin x$ est positive sur $[0, +\infty[$. Donc u est croissante sur cet intervalle, et $u(x) \geq u(0) = 0$. Enfin, u est paire, donc l'inégalité vaut aussi pour $x < 0$. **Par conséquent**, $\sin x \leq x$ sur $[0, +\infty[$ **et** $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ **sur** $\mathbb{R}$.

4. La fonction φ est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\varphi'(x) = \frac{N(x)}{x^2}$, avec $N(x) = x \cos x - \sin x$.

Or $N'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x < 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. Comme $N(0) = 0$, on a $N(x) < 0$ sur cet intervalle. Ainsi, φ est strictement décroissante. Par conséquent, $\varphi(x) \geq \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$. En multipliant par $x > 0$, on obtient l'inégalité ; elle est aussi vraie en 0.
Donc $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Comme le montre la figure ci-dessous, la courbe du sinus reste coincée entre la corde $y = \frac{2x}{\pi}$ et la tangente $y = x$.



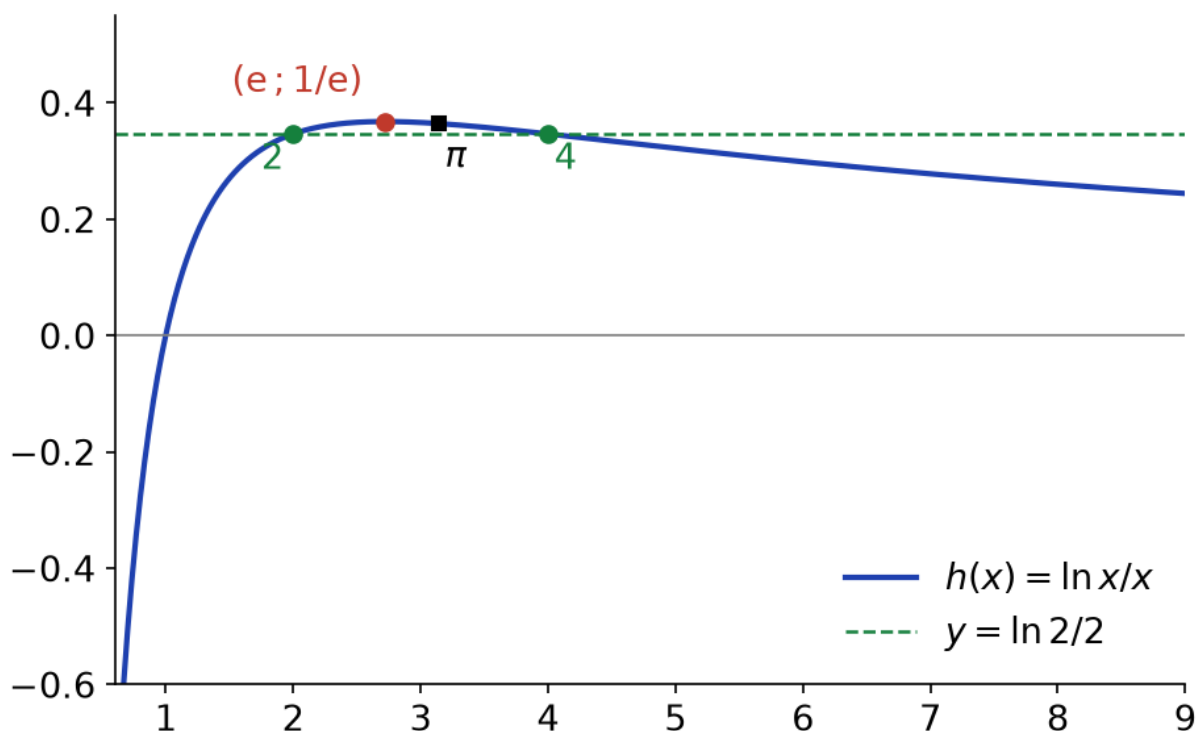
Corrigé de l'exercice 10 : Comparer e puissance π et π puissance e

1. La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Cette dérivée est positive sur

$]0, e]$ et négative sur $[e, +\infty[$. De plus, $h(x) \rightarrow -\infty$ en 0^+ , car $\ln x \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$. Enfin, $h(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$ par croissances comparées. **Ainsi, h croît strictement sur $]0, e]$, décroît strictement sur $[e, +\infty[$, et son maximum vaut $h(e) = \frac{1}{e}$.**

2. Comme $\pi \neq e$ et que le maximum n'est atteint qu'en e , on a $h(\pi) < \frac{1}{e}$. Donc $e \ln \pi < \pi$, soit $\ln(\pi^e) < \ln(e^\pi)$. Le logarithme est strictement croissant. **Par conséquent, $\pi^e < e^\pi$.**
3. On a bien $2^4 = 16 = 4^2$. Si $a^b = b^a$, alors $b \ln a = a \ln b$, puis en divisant par $ab > 0$, $h(a) = h(b)$. Or h est injective sur $]0, e]$ et sur $[e, +\infty[$. Si a et b étaient tous deux dans le même intervalle, on aurait $a = b$. **Donc $a < e < b$.**
4. D'après la question précédente, $a < e$, donc $a \in \{1, 2\}$. Si $a = 1$, alors $1 = b^1$, donc $b = 1$, ce qui contredit $b > a$. Si $a = 2$, alors b est l'unique réel de $[e, +\infty[$ tel que $h(b) = h(2)$, par injectivité. Comme $h(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2} = h(2)$, on a $b = 4$. **Le seul couple est $(a, b) = (2, 4)$.**

La figure ci-dessous montre le maximum de h en e . La droite horizontale $y = \frac{\ln 2}{2}$ coupe la courbe exactement en 2 et en 4, de part et d'autre de e .



Corrigé de l'exercice 11 : Valeurs et simplifications avec Arcsin, Arccos, Arctan

1. D'abord, $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, et $-\frac{\pi}{6}$ est l'unique angle de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de sinus $-\frac{1}{2}$. Ensuite, $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3}$ avec $\frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$. Enfin, $\tan \frac{3\pi}{4} = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, avec $-\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. **Les valeurs sont $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{4}$.**
2. On a $\sin(\pi - 3) = \sin 3$ et $\pi - 3 \approx 0,14$ appartient à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par ailleurs, $\cos(2\pi - 4) = \cos 4$ et $2\pi - 4 \approx 2,28$ appartient à $[0, \pi]$. **Donc $\text{Arcsin}(\sin 3) = \pi - 3$ et $\text{Arccos}(\cos 4) = 2\pi - 4$.**
3. Posons $\theta = \text{Arcsin } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors $\cos \theta \geq 0$, donc $\cos \theta = \sqrt{1 - x^2}$. Si $|x| < 1$, $\cos \theta > 0$ et $\tan \theta = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$. Enfin, posons $\alpha = \text{Arctan } x$. On a $\cos \alpha > 0$ et $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + x^2$. **Ainsi, $\cos(\text{Arcsin } x) = \sqrt{1 - x^2}$, $\tan(\text{Arcsin } x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ et $\cos(\text{Arctan } x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.**
4. Posons $\alpha = \text{Arctan } x$. Alors $\sin(2\alpha) = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2\tan \alpha \cos^2 \alpha$. Or $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + x^2}$. **Donc $\sin(2 \text{ Arctan } x) = \frac{2x}{1 + x^2}$.**

Corrigé de l'exercice 12 : Relations entre fonctions circulaires réciproques

1. Soit $x \in]-1, 1[$ et $\theta = \text{Arccos } x \in]0, \pi[$. La dérivée de $\cos$ en θ vaut $-\sin \theta$, avec $\sin \theta = \sqrt{1 - x^2} > 0$. Le théorème de la dérivée réciproque donne $\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. De même, si $\alpha = \text{Arctan } x$, alors $\tan'(\alpha) = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + x^2 \neq 0$. **Donc $\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ et $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$.**
2. Soit $\theta = \text{Arccos } x \in [0, \pi]$. Alors $\pi - \theta \in [0, \pi]$ et $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = -x$. Par unicité de l'angle de $[0, \pi]$ de cosinus $-x$, **on a $\text{Arccos}(-x) = \pi - \text{Arccos } x$.**

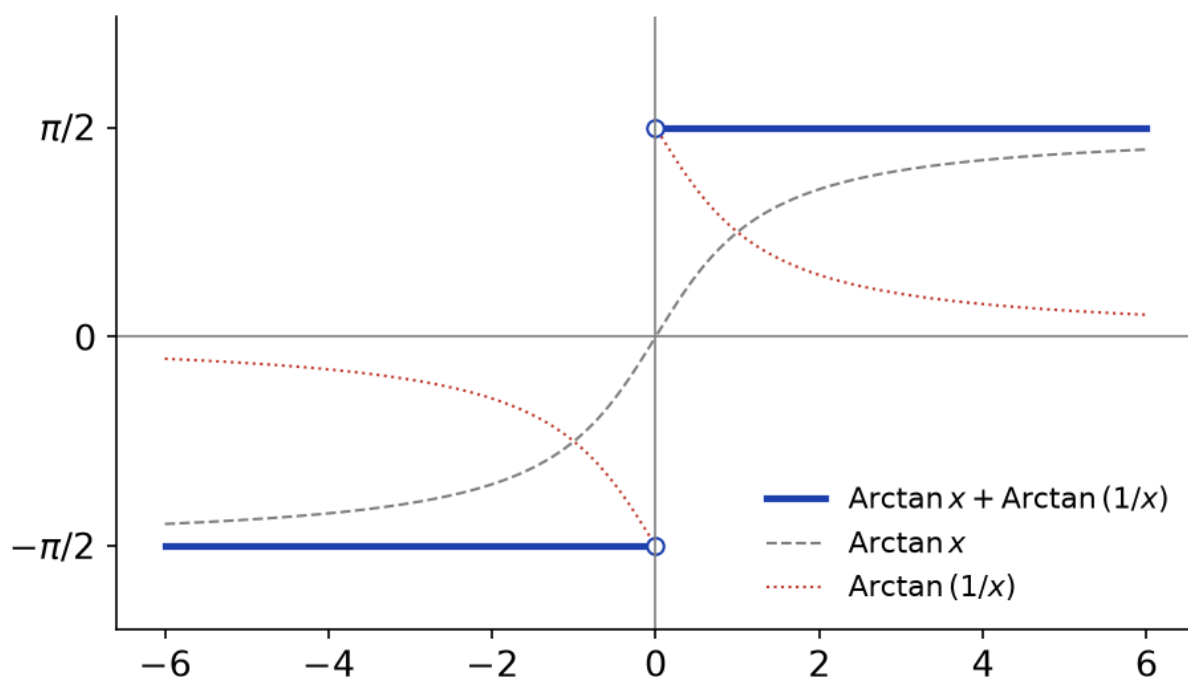
3. La fonction $s(x) = \text{Arcsin } x + \text{Arccos } x$ est dérivable sur $] -1, 1[$, de dérivée $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Sur cet intervalle, s est donc constante, égale à $s(0) = 0 + \frac{\pi}{2}$. Aux bornes, $s(1) = \frac{\pi}{2} + 0$ et $s(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi$. **Ainsi**, $\text{Arcsin } x + \text{Arccos } x = \frac{\pi}{2}$ sur $[-1, 1]$.

4. Pour $x \neq 0$, la dérivée de la composée donne

$$\psi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{1+1/x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Donc ψ est constante sur chacun des intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$. Or $\psi(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ et, par imparité, $\psi(-1) = -\frac{\pi}{2}$. **Ainsi**, $\psi(x) = \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$ et $\psi(x) = -\frac{\pi}{2}$ si $x < 0$. Une dérivée nulle n'entraîne la constance que sur un intervalle ; or $\mathbb{R}^*$ n'en est pas un.

La figure ci-dessous illustre ce saut : la somme vaut $-\frac{\pi}{2}$ à gauche de 0 et $\frac{\pi}{2}$ à droite.



Point de méthode : après avoir trouvé une dérivée nulle, vérifiez que l'ensemble d'étude est un intervalle, sinon fixez une constante par intervalle.

Corrigé de l'exercice 13 : Équations avec Arctan

1. Posons $a = \text{Arctan} \frac{1}{2}$ et $b = \text{Arctan} \frac{1}{3}$. Comme $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$ et que Arctan est croissante, on a $a, b \in]0, \frac{\pi}{4}[$. Donc $a + b \in]0, \frac{\pi}{2}[$. La formule d'addition donne

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{1/2 + 1/3}{1 - 1/6} = \frac{5/6}{5/6} = 1.$$

Le seul angle de $]0, \frac{\pi}{2}[$ de tangente 1 est $\frac{\pi}{4}$, d'où l'égalité.

2. Posons $a = \text{Arctan} 2$ et $b = \text{Arctan} 3$. Comme $2 > 1$ et $3 > 1$, on a $a, b \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$, donc $a + b \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Ensuite, $\tan(a + b) = \frac{2 + 3}{1 - 6} = -1$. Or le seul angle de $] \frac{\pi}{2}, \pi[$ de tangente -1 est $\frac{3\pi}{4}$. **Donc $\text{Arctan} 2 + \text{Arctan} 3 = \frac{3\pi}{4}$.**

3. La fonction S est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, comme somme de deux telles fonctions. De plus, elle tend vers $-\pi$ en $-\infty$ et vers π en $+\infty$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -\pi, \pi[$, qui contient $\frac{\pi}{4}$. Ainsi, l'équation admet une unique solution x_0 . Comme $S(0) = 0 < \frac{\pi}{4}$, on a $x_0 > 0$. Ensuite, $\text{Arctan}(2x_0) = \frac{\pi}{4} - \text{Arctan} x_0$, et ce dernier angle appartient à $] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$. En prenant la tangente :

$$2x_0 = \frac{1 - x_0}{1 + x_0}, \text{ soit } 2x_0^2 + 3x_0 - 1 = 0.$$

Les racines sont $\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$, et une seule est positive. **L'unique solution est**

$$x_0 = \frac{\sqrt{17} - 3}{4} \approx 0,28.$$

Corrigé de l'exercice 14 : Étude de $\text{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$

1. La racine impose $x \in [-1, 1]$. Ensuite, l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$ appliquée à $a = |x|$ et $b = \sqrt{1-x^2}$ donne $|2x\sqrt{1-x^2}| \leq x^2 + 1 - x^2 = 1$. Donc Arcsin s'applique. Enfin, l'expression intérieure est impaire et Arcsin est impaire. **Ainsi, f est définie sur $[-1, 1]$ et impaire.**

2. Avec $\theta = \text{Arcsin } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $x = \sin\theta$ et $\sqrt{1-x^2} = \cos\theta$, car $\cos\theta \geq 0$.
Donc $2x\sqrt{1-x^2} = 2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta)$.
3. On a $f(x) = \text{Arcsin}(\sin 2\theta)$, avec $2\theta \in [-\pi, \pi]$. Trois cas se présentent.

- Si $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, alors $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ et $2\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc $f(x) = 2\theta$.
- Si $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, alors $2\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Or $\pi - 2\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin(\pi - 2\theta) = \sin 2\theta$.
 Donc $f(x) = \pi - 2\theta$.
- Si $x \in \left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, l'imparité donne $f(x) = -f(-x) = -\pi - 2\theta$.

Finalement, $f(x) = 2 \text{ Arcsin } x$ **au centre**, $f(x) = \pi - 2 \text{ Arcsin } x$ **à droite** et $f(x) = -\pi - 2 \text{ Arcsin } x$ **à gauche**.

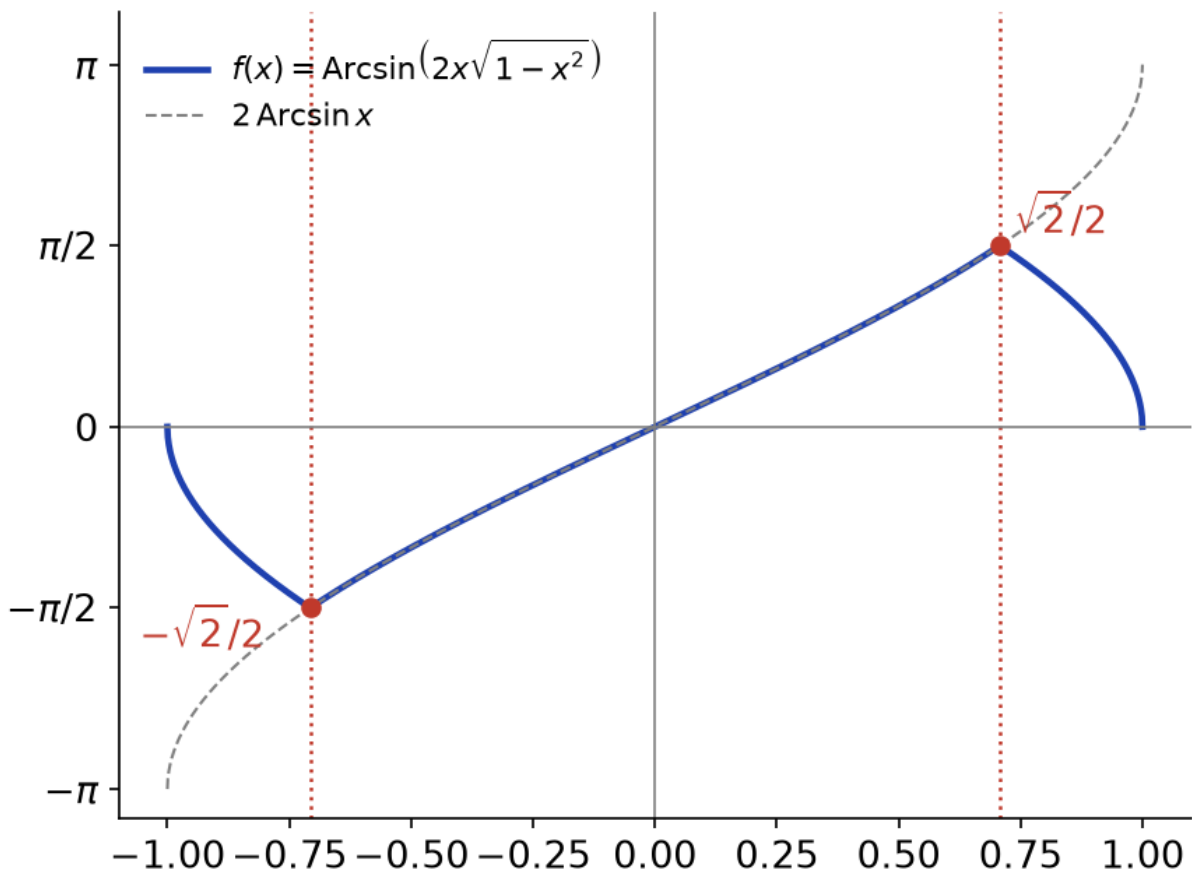
4. Posons $w(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$. Sur $] -1, 1[$, $w'(x) = 2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. Par ailleurs, $1 - w(x)^2 = 1 - 4x^2 + 4x^4 = (1 - 2x^2)^2$. Hors de $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a $|w(x)| < 1$, donc

$$f'(x) = \frac{w'(x)}{\sqrt{1-w(x)^2}} = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2} |1-2x^2|}.$$

Ainsi, $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ si $|x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ **et** $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ si $|x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui concorde avec les dérivées des trois expressions trouvées.

5. En $\frac{\sqrt{2}}{2}$, la dérivée à gauche de 2 Arcsin vaut $\frac{2}{\sqrt{1/2}} = 2\sqrt{2}$. En revanche, la dérivée à droite de $\pi - 2 \text{ Arcsin}$ vaut $-2\sqrt{2}$. Ces deux nombres diffèrent. **La fonction f n'est pas dérivable en $\frac{\sqrt{2}}{2}$: sa courbe présente un point anguleux.** Aux bornes ± 1 , elle admet des tangentes verticales.

La figure ci-dessous montre la courbe obtenue. Elle suit $2 \text{ Arcsin } x$ au centre, puis redescend vers 0 en ± 1 après les deux points anguleux.



Corrigé de l'exercice 15 : Formulaire hyperbolique

1. On factorise : $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = (\text{ch } x - \text{sh } x)(\text{ch } x + \text{sh } x)$. Or $\text{ch } x + \text{sh } x = e^x$ et $\text{ch } x - \text{sh } x = e^{-x}$. **Donc** $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$.

2. On développe le second membre :

$$4(\text{ch } a \text{ ch } b + \text{sh } a \text{ sh } b) = (e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b}) = 2e^{a+b} + 2e^{-a-b}.$$

Les termes croisés se compensent. En divisant par 4, on trouve $\text{ch}(a+b)$. Le même calcul, avec des signes adaptés, donne la formule pour sh. **Les deux formules d'addition sont démontrées.**

3. Avec $a = b = x$, on obtient $\text{sh}(2x) = 2 \text{sh } x \text{ ch } x$ et $\text{ch}(2x) = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x$. Ensuite, on remplace $\text{sh}^2 x$ par $\text{ch}^2 x - 1$. **Donc** $\text{ch}(2x) = 2 \text{ch}^2 x - 1$.

4. On divise numérateur et dénominateur de $\frac{\text{sh}(a+b)}{\text{ch}(a+b)}$ par $\text{ch } a \text{ ch } b > 0$. **On obtient**

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}.$$

5. On a $e^{\ln 3} = 3$ et $e^{-\ln 3} = \frac{1}{3}$. Donc $\operatorname{ch}(\ln 3) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$ et $\operatorname{sh}(\ln 3) = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$. On vérifie que $\frac{25}{9} - \frac{16}{9} = 1$. Enfin, $\operatorname{th}(\ln 2) = \frac{2 - 1/2}{2 + 1/2} = \frac{3}{5}$. **Ainsi, $\operatorname{ch}(\ln 3) = \frac{5}{3}$, $\operatorname{sh}(\ln 3) = \frac{4}{3}$ et $\operatorname{th}(\ln 2) = \frac{3}{5}$.**
6. On a $(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = (e^x)^n = e^{nx}$. Or $e^{nx} = \operatorname{ch}(nx) + \operatorname{sh}(nx)$, d'où l'égalité.

Corrigé de l'exercice 16 : Équations hyperboliques et fonction argument sinus hyperbolique

1. On pose $t = e^x > 0$. L'équation $\operatorname{sh} x = \frac{3}{4}$ devient $t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2}$, soit $2t^2 - 3t - 2 = 0$. Les racines sont 2 et $-\frac{1}{2}$, donc $t = 2$. Ensuite, $\operatorname{ch} x = \frac{5}{4}$ devient $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$, soit $2t^2 - 5t + 2 = 0$. Les racines sont 2 et $\frac{1}{2}$, toutes deux positives. **La première équation a pour solution $\ln 2$; la seconde a pour solutions $\ln 2$ et $-\ln 2$.**
2. On a $3 \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \frac{3t + 3/t - t + 1/t}{2} = t + \frac{2}{t}$. L'équation devient $t^2 - 3t + 2 = 0$, de racines 1 et 2 . **Les solutions sont 0 et $\ln 2$.** On vérifie : $3 \times \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = 3$.
3. La fonction sh est continue et strictement croissante, car $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch} > 0$. Elle tend vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$, donc elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Pour y réel, l'équation $\operatorname{sh} x = y$ s'écrit $t^2 - 2yt - 1 = 0$ avec $t = e^x$. Le produit des racines vaut -1 , donc une seule est positive : $t = y + \sqrt{y^2 + 1}$. **Ainsi, $\operatorname{Argsh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.**
4. D'une part, l'exercice 4 a donné la dérivée de cette expression : $\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$. D'autre part, avec $x = \operatorname{Argsh} y$, on a $\operatorname{Argsh}'(y) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$. Or $\operatorname{ch} x > 0$ et $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x = 1 + y^2$. **Les deux méthodes donnent $\operatorname{Argsh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.**

Corrigé de l'exercice 17 : Tangente hyperbolique et sa réciproque

1. La fonction th est le quotient d'une fonction impaire par une fonction paire, donc elle est impaire. La formule du quotient donne $\text{th}' = \frac{\text{ch}^2 - \text{sh}^2}{\text{ch}^2} = \frac{1}{\text{ch}^2}$. En écrivant aussi $\frac{\text{ch}^2 - \text{sh}^2}{\text{ch}^2} = 1 - \text{th}^2$, on a les deux formes. Cette dérivée est strictement positive. Enfin, $\text{th } x = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \rightarrow 1$ en $+\infty$. **La fonction th est impaire, strictement croissante, de limites -1 et 1 .**
2. Soit $w(x) = x - \text{th } x$. Alors $w'(x) = 1 - (1 - \text{th}^2 x) = \text{th}^2 x \geq 0$ et $w(0) = 0$. **Donc $\text{th } x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.**
3. La fonction th est continue, strictement croissante, de limites ± 1 . Elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$. Pour $y \in] -1, 1[$, l'équation $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y$ équivaut à $e^{2x}(1 - y) = 1 + y$. **Ainsi, $\text{Argth } y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right)$.**
4. Avec $x = \text{Argth } y$, on a $\text{th}'(x) = 1 - y^2 \neq 0$. Par le théorème de la dérivée réciproque, $\text{Argth}'(y) = \frac{1}{1 - y^2}$. **De plus, la fonction f de l'exercice 1 vérifie $f = 2 \text{Argth}$ sur $] -1, 1[$, ce qui explique à nouveau son imparité.**

Corrigé de l'exercice 18 : Dérivation d'une fonction à valeurs complexes

1. Avec $\varphi(t) = (a + i)t$, on a $\varphi'(t) = a + i$, donc $f'(t) = (a + i)e^{(a+i)t}$. Vérifions avec $f(t) = e^{at}\cos t + i e^{at}\sin t$. La dérivée vaut $e^{at}(a\cos t - \sin t) + i e^{at}(a\sin t + \cos t)$. Or $(a + i)(\cos t + i\sin t) = (a\cos t - \sin t) + i(a\sin t + \cos t)$. **Les deux calculs donnent $f'(t) = (a + i)f(t)$.**
2. Comme $a + i \neq 0$, la fonction $F(t) = \frac{e^{(a+i)t}}{a + i}$ a pour dérivée f . Or $\frac{1}{a + i} = \frac{a - i}{a^2 + 1}$.
Donc

$$F(t) = \frac{e^{at}}{a^2 + 1} (a \cos t + \sin t + i(a \sin t - \cos t)).$$

Les parties réelle et imaginaire de F sont des primitives de celles de f . **Ainsi,**
 $t \rightarrow \frac{e^{at}(a \cos t + \sin t)}{a^2 + 1}$ **est une primitive de** $e^{at} \cos t$, **et** $t \rightarrow \frac{e^{at}(a \sin t - \cos t)}{a^2 + 1}$ **une primitive de** $e^{at} \sin t$.

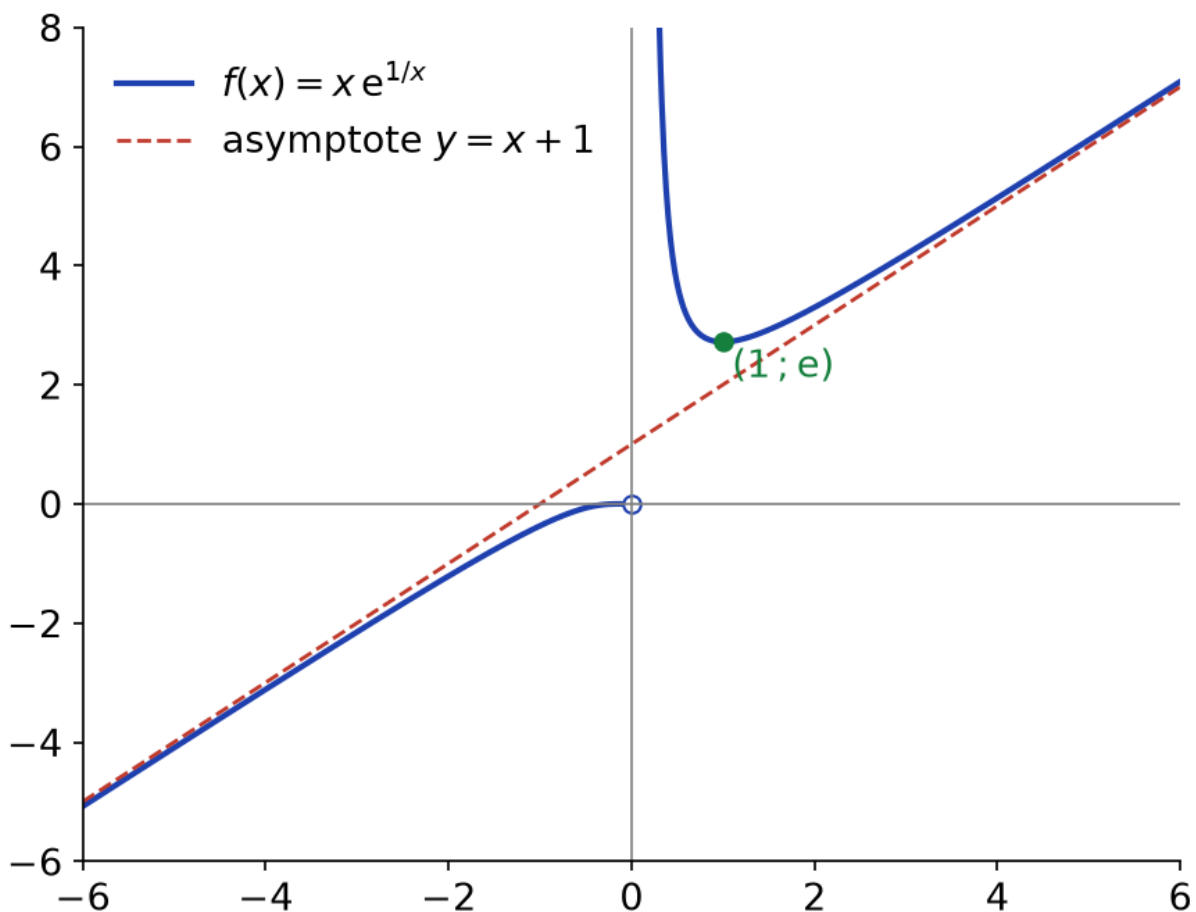
- On a $|f(t)| = e^{at} |e^{it}| = e^{at}$. Pour $a = -0,15$, le module décroît vers 0 tandis que l'argument t augmente. Le point tourne donc en se rapprochant de l'origine : c'est une spirale. Ensuite, $\frac{f'(t)}{f(t)} = a + i$ ne dépend pas de t . **Par conséquent, l'angle entre le rayon $f(t)$ et le vecteur dérivé $f'(t)$ est constant, égal à un argument de $a + i$.** Cette propriété caractérise la spirale logarithmique.
- On a $g(2\pi) - g(0) = 1 - 1 = 0$. Or $|2\pi g'(c)| = 2\pi |i e^{ic}| = 2\pi \neq 0$. **Aucun réel c ne convient : l'égalité des accroissements finis ne s'étend pas aux fonctions complexes.**
- Avec $\varphi(t) = t + it^2$, on a $\varphi'(t) = 1 + 2it$. **Donc la dérivée vaut $(1 + 2it)e^t + it^2$.**

Corrigé de l'exercice 19 : Étude complète de $x \exp(1/x)$

- La fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$. En $\pm\infty$, $e^{1/x} \rightarrow 1$, donc $f(x) \rightarrow \pm\infty$. Posons $u = \frac{1}{x}$, de sorte que $f(x) = \frac{e^u}{u}$. Quand $x \rightarrow 0^+$, $u \rightarrow +\infty$ et $\frac{e^u}{u} \rightarrow +\infty$ par croissances comparées. Quand $x \rightarrow 0^-$, $u \rightarrow -\infty$, $e^u \rightarrow 0$ et $\frac{1}{u} \rightarrow 0$. **Les limites sont $-\infty$ en $-\infty$, $+\infty$ en $+\infty$, 0 en 0^- et $+\infty$ en 0^+ .**
- Par produit et composée, $f'(x) = e^{1/x} + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{1/x} = \frac{x-1}{x} e^{1/x}$. Le signe est celui de $\frac{x-1}{x}$: positif sur $] -\infty, 0[$, négatif sur $]0, 1[$, positif sur $]1, +\infty[$. **Donc f croît de $-\infty$ à 0 sur $] -\infty, 0[$, décroît de $+\infty$ à e sur $]0, 1[$, puis croît de e à $+\infty$ sur $]1, +\infty[$.**
- Avec $x = \frac{1}{u}$, on a $f(x) - x - 1 = \frac{e^u}{u} - \frac{1}{u} - 1 = \frac{e^u - 1 - u}{u}$. Quand $x \rightarrow \pm\infty$, $u \rightarrow 0$. Or $\frac{e^u - 1 - u}{u} = \frac{e^u - 1}{u} - 1$, et $\frac{e^u - 1}{u} \rightarrow \exp'(0) = 1$. **Donc $f(x) - (x + 1) \rightarrow 0$: la droite $y = x + 1$ est asymptote en $\pm\infty$.**
- D'après l'inégalité $e^u \geq 1 + u$, stricte pour $u \neq 0$, le numérateur est strictement positif. Le signe de $f(x) - (x + 1)$ est donc celui de u , c'est-à-dire celui de x . **La courbe est au-**

dessus de l'asymptote pour $x > 0$ et au-dessous pour $x < 0$.

La figure ci-dessous résume l'étude : le minimum local $(1; e)$, la branche qui rejoint l'origine par la gauche et l'asymptote oblique.



Corrigé de l'exercice 20 : Angle de vue optimal

- Notons α l'angle entre l'horizontale et la droite qui joint l'œil au bord supérieur, et β celui vers le bord inférieur. Dans les triangles rectangles, $\tan\alpha = \frac{4}{x}$ et $\tan\beta = \frac{1}{x}$, avec $\alpha, \beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Donc $\theta(x) = \alpha - \beta = \text{Arctan} \frac{4}{x} - \text{Arctan} \frac{1}{x}$.
- Quand $x \rightarrow 0^+$, les deux arguments tendent vers $+\infty$ et chaque Arctan tend vers $\frac{\pi}{2}$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, chaque Arctan tend vers 0. **Dans les deux cas, $\theta(x) \rightarrow 0$.**

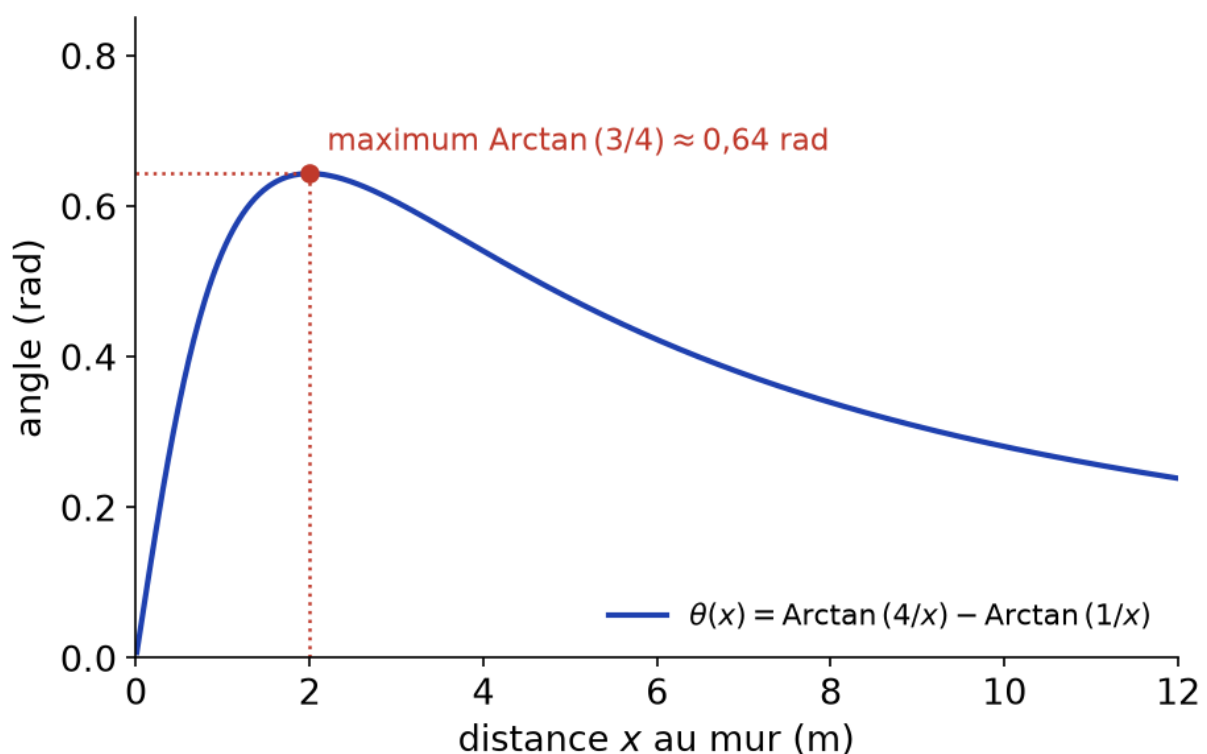
3. Pour $c > 0$, la dérivée de $x \rightarrow \text{Arctan } \frac{c}{x}$ vaut $-\frac{c}{x^2} \cdot \frac{1}{1+c^2/x^2} = -\frac{c}{x^2+c^2}$. Donc

$$\theta'(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{4}{x^2+16} = \frac{x^2+16-4x^2-4}{(x^2+1)(x^2+16)} = \frac{3(4-x^2)}{(x^2+1)(x^2+16)}.$$

Ainsi, θ est strictement croissante sur $]0, 2]$ et strictement décroissante sur $[2, +\infty[$.

4. Le maximum est atteint en $x = 2$ et vaut $\theta(2) = \text{Arctan } 2 - \text{Arctan } \frac{1}{2}$. C'est la différence de deux angles de $]0, \frac{\pi}{2}[$, donc il appartient à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. De plus, il est positif, car Arctan est croissante. De plus, $\tan \theta(2) = \frac{2-1/2}{1+2 \times 1/2} = \frac{3}{4}$. **Le visiteur doit se placer à 2 m du mur, et l'angle maximal vaut $\text{Arctan } \frac{3}{4} \approx 0,64$ rad, soit environ 36,9 degrés.**

La figure ci-dessous montre la fonction θ : nulle aux deux extrémités, elle atteint son maximum en $x = 2$.

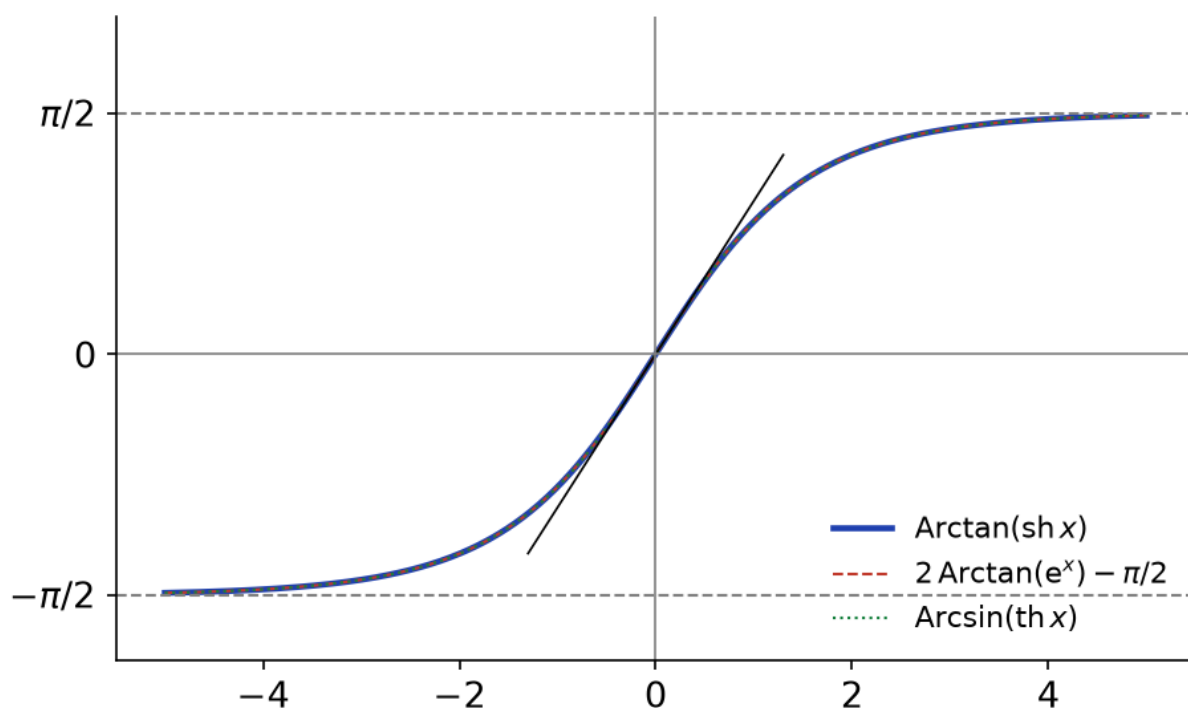


Point de méthode : on remarque que la distance optimale $2 = \sqrt{1 \times 4}$ est la moyenne géométrique des deux hauteurs.

Corrigé de l'exercice 21 : Trois expressions d'une même fonction

1. Les fonctions sh , exp et Arctan sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc F et G aussi. Ensuite, $|\text{th } x| < 1$ et Arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$. **Par composition, F , G et H sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.**
2. D'abord, $F'(x) = \frac{\text{ch } x}{1 + \text{sh}^2 x} = \frac{\text{ch } x}{\text{ch}^2 x} = \frac{1}{\text{ch } x}$. Ensuite,
 $G'(x) = \frac{2e^x}{1 + e^{2x}} = \frac{2}{e^{-x} + e^x} = \frac{1}{\text{ch } x}$. Enfin, $H'(x) = \frac{1 - \text{th}^2 x}{\sqrt{1 - \text{th}^2 x}} = \sqrt{1 - \text{th}^2 x}$. Or $1 - \text{th}^2 x = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$ et $\text{ch } x > 0$. **Les trois dérivées valent $\frac{1}{\text{ch } x}$.**
3. Les fonctions $F - G$ et $F - H$ ont une dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Elles sont donc constantes. Or $F(0) = \text{Arctan } 0 = 0$, $G(0) = 2 \times \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 0$ et $H(0) = 0$. **Donc $F = G = H$ sur $\mathbb{R}$.**
4. La fonction F est impaire, comme composée de deux fonctions impaires. Sa dérivée $\frac{1}{\text{ch}}$ est strictement positive, donc F est strictement croissante. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\text{sh } x \rightarrow +\infty$ et $F(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Par imparité, $F(x) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$. **Continue et strictement croissante, F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.**
5. Comme $F = H$, on a $\sin(F(x)) = \sin(\text{Arcsin}(\text{th } x)) = \text{th } x$. De plus, $F(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos(F(x)) > 0$, et $\cos(F(x)) = \sqrt{1 - \text{th}^2 x} = \frac{1}{\text{ch } x}$. Soit maintenant $y = F(x)$. Alors $\tan y = \text{sh } x$, donc $x = \text{Argsh}(\tan y) = \ln\left(\tan y + \sqrt{1 + \tan^2 y}\right)$. Or $\sqrt{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{\cos y}$, puisque $\cos y > 0$. **Ainsi, $F^{-1}(y) = \ln\left(\tan y + \frac{1}{\cos y}\right)$.**

Comme le montre la figure ci-dessous, les trois courbes sont confondues. Elles ont pour tangente $y = x$ en 0 et pour asymptotes $y = \pm \frac{\pi}{2}$.



Corrigé de l'exercice 22 : Problème, la fonction $(1 + 1/x)$ puissance x

Partie A.

- Soit $\varphi(u) = u - \ln(1+u)$ sur $[0, +\infty[$. Sa dérivée $\frac{u}{1+u}$ est strictement positive sur $]0, +\infty[$. Donc φ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et $\varphi(u) > \varphi(0) = 0$ pour $u > 0$. De même, soit $\psi(u) = \ln(1+u) - \frac{u}{1+u}$. On calcule $\psi'(u) = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^2} = \frac{u}{(1+u)^2} > 0$ pour $u > 0$. Comme $\psi(0) = 0$, on a $\psi(u) > 0$. **Donc** $\frac{u}{1+u} < \ln(1+u) < u$ **pour tout** $u > 0$.

Partie B.

- Pour $x > 0$, $g(x) = x(\ln(x+1) - \ln x)$. Par la formule du produit :

$$g'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

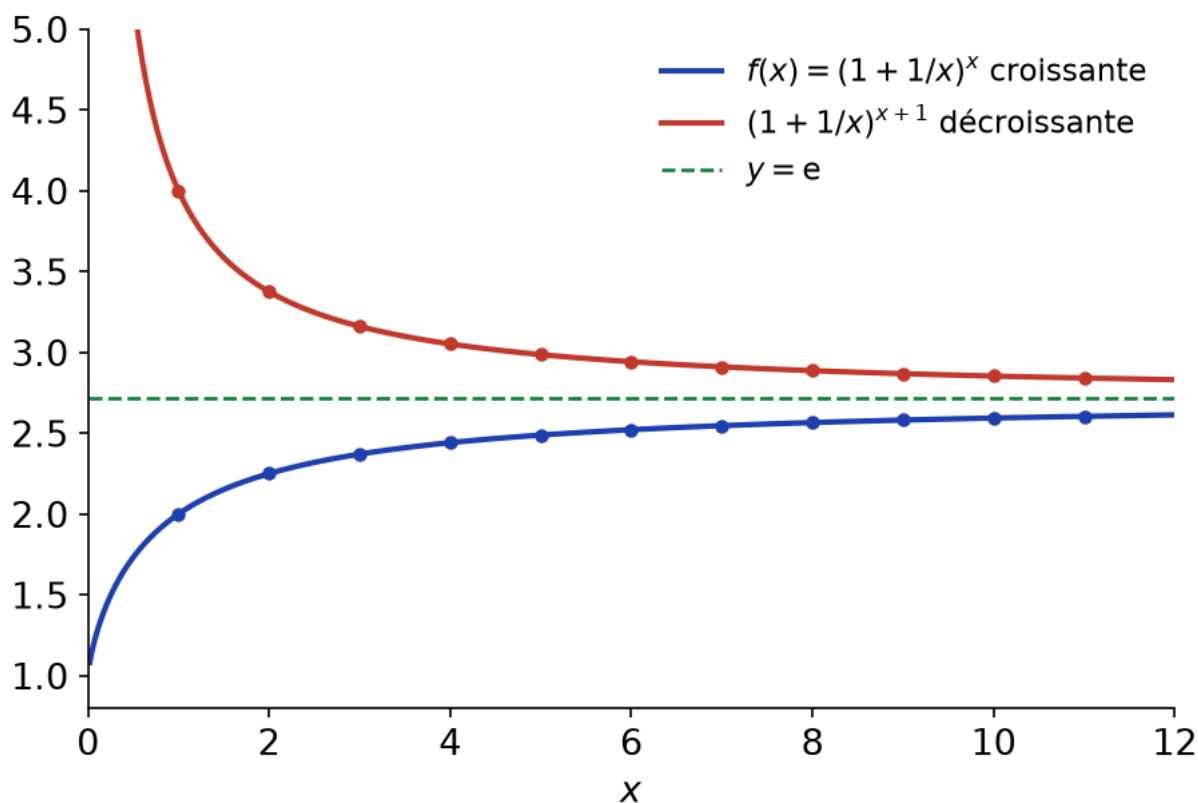
On applique la partie A avec $u = \frac{1}{x} > 0$: $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1/x}{1+1/x} = \frac{1}{x+1}$. **Donc** $g'(x) > 0$, **et** $f = e^g$ **est strictement croissante.**

2. En 0^+ , $g(x) = x\ln(x+1) - x\ln x$. Or $x\ln(x+1) \rightarrow 0$ et $x\ln x \rightarrow 0$ par croissances comparées. Donc $g(x) \rightarrow 0$. En $+\infty$, on pose $u = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$. Alors $g(x) = \frac{\ln(1+u)}{u}$, qui tend vers la dérivée de $\ln(1 + \cdot)$ en 0, soit 1. **Par continuité de l'exponentielle**, $f(x) \rightarrow 1$ en 0^+ **et** $f(x) \rightarrow e$ en $+\infty$.

Partie C.

- On a $\ln k(x) = (x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Sa dérivée vaut $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + (x+1)\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$. Par la partie A, cette quantité est strictement négative. Donc k est strictement décroissante. En 0^+ , $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \rightarrow +\infty$ et $x+1 \rightarrow 1$, donc $k \rightarrow +\infty$. En $+\infty$, $\ln k(x) = g(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \rightarrow 1 + 0$. **Ainsi**, k **décroît strictement de** $+\infty$ **à** e .
- Soit $x > 0$. La fonction f est croissante, donc $f(y) \leq e$ pour tout y , par passage à la limite. Par stricte croissance, $f(x) < f(x+1) \leq e$. De même, k étant strictement décroissante de limite e , $k(x) > k(x+1) \geq e$. **Donc** $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$.
- Pour $n \geq 1$, la question précédente donne $0 < e - f(n) < k(n) - f(n)$. Or $k(n) - f(n) = f(n)\left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = \frac{f(n)}{n}$. De plus, $f(n) < e < 3$. **Donc** $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$.
- Avec $x = 10$, on a $f(10) = 1,1^{10}$ et $k(10) = 1,1^{11}$. Comme $1,1^{10} > 2,593$ et $1,1^{11} < 2,854$, **on obtient** $2,593 < e < 2,854$. Cet encadrement reste grossier, car la convergence est lente, en $\frac{1}{n}$.

La figure ci-dessous montre les deux fonctions de part et d'autre de la droite $y = e$. Les points marqués correspondent aux entiers n , et l'écart se resserre lentement.



[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [fonctions usuelles, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur fonctions usuelles](#)
- À maîtriser avant : [Trigonométrie et fonctions circulaires](#)
- Chapitre précédent : [Nombres complexes et exponentielle complexe](#)
- Chapitre suivant : [Primitives et calcul intégral](#)
- Le même thème en L1 : [fonctions usuelles, exercices de maths en L1](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)

- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)