

Fonctions usuelles

Corrigé de l'exercice 1 : Équations et inéquations avec $\ln$ et $\exp$

1. L'équation a un sens si $x > 0$ et $x - 2 > 0$, donc pour $x > 2$. Sur ce domaine, $\ln(x) + \ln(x - 2) = \ln(x(x - 2))$. Comme $\ln$ est injective, l'équation équivaut à $x^2 - 2x = 3$, soit $x^2 - 2x - 3 = 0$. Les racines sont 3 et -1 . Or seule 3 vérifie $x > 2$. **L'unique solution est $x = 3$.**
2. On pose $X = e^x > 0$. L'équation devient $X^2 - 3X + 2 = 0$, soit $(X - 1)(X - 2) = 0$. Ainsi $e^x = 1$ ou $e^x = 2$. **Les solutions sont $x = 0$ et $x = \ln 2$.**
3. Il faut $2x - 1 > 0$ et $x + 3 > 0$, donc $x > \frac{1}{2}$. Sur ce domaine, $\ln$ est strictement croissante, donc l'inéquation équivaut à $2x - 1 \leq x + 3$, c'est-à-dire $x \leq 4$. **L'ensemble des solutions est $\left] \frac{1}{2}, 4 \right]$.**
4. Les deux membres sont strictement positifs. On compose par $\ln$, qui est injective : $x \ln 2 = (x - 1) \ln 3$. Donc $x(\ln 3 - \ln 2) = \ln 3$. Comme $\ln 3 \neq \ln 2$, on obtient $x = \frac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 2} = \frac{\ln 3}{\ln(3/2)}$.

Point de méthode : on écrit toujours le domaine avant de combiner des logarithmes, car $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ exige $a > 0$ et $b > 0$.

Corrigé de l'exercice 2 : Fonctions puissances et étude de x puissance x

1. Par définition, $x^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln x}$ pour $x > 0$. Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme composée, de dérivée $\sqrt{2}x^{\sqrt{2}} - 1$. Ensuite, $\sqrt{2}\ln x \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$, donc $x^{\sqrt{2}} \rightarrow 0$. On prolonge ainsi par continuité en posant $0^{\sqrt{2}} = 0$. De plus, le taux d'accroissement en 0 vaut $\frac{x^{\sqrt{2}}}{x} = x^{\sqrt{2}-1}$. Or $\sqrt{2} - 1 > 0$, donc ce taux tend vers 0. **Le prolongement est dérivable en 0, de dérivée nulle.** Par ailleurs, $2^x = e^{x\ln 2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(2^x)' = \ln 2 \cdot 2^x$.

2. On écrit $f(x) = e^{x\ln x}$. La dérivée de $x\ln x$ est $\ln x + 1$. Par conséquent, $f'(x) = (\ln x + 1)x^x$. Comme $x^x > 0$, le signe de f' est celui de $\ln x + 1$. Ce facteur est négatif pour $x < 1/e$ et positif pour $x > 1/e$. **Ainsi, f décroît sur $]0, 1/e]$, croît sur $[1/e, +\infty[$, et son minimum vaut $f(1/e) = e^{-1/e} \approx 0,69$.**

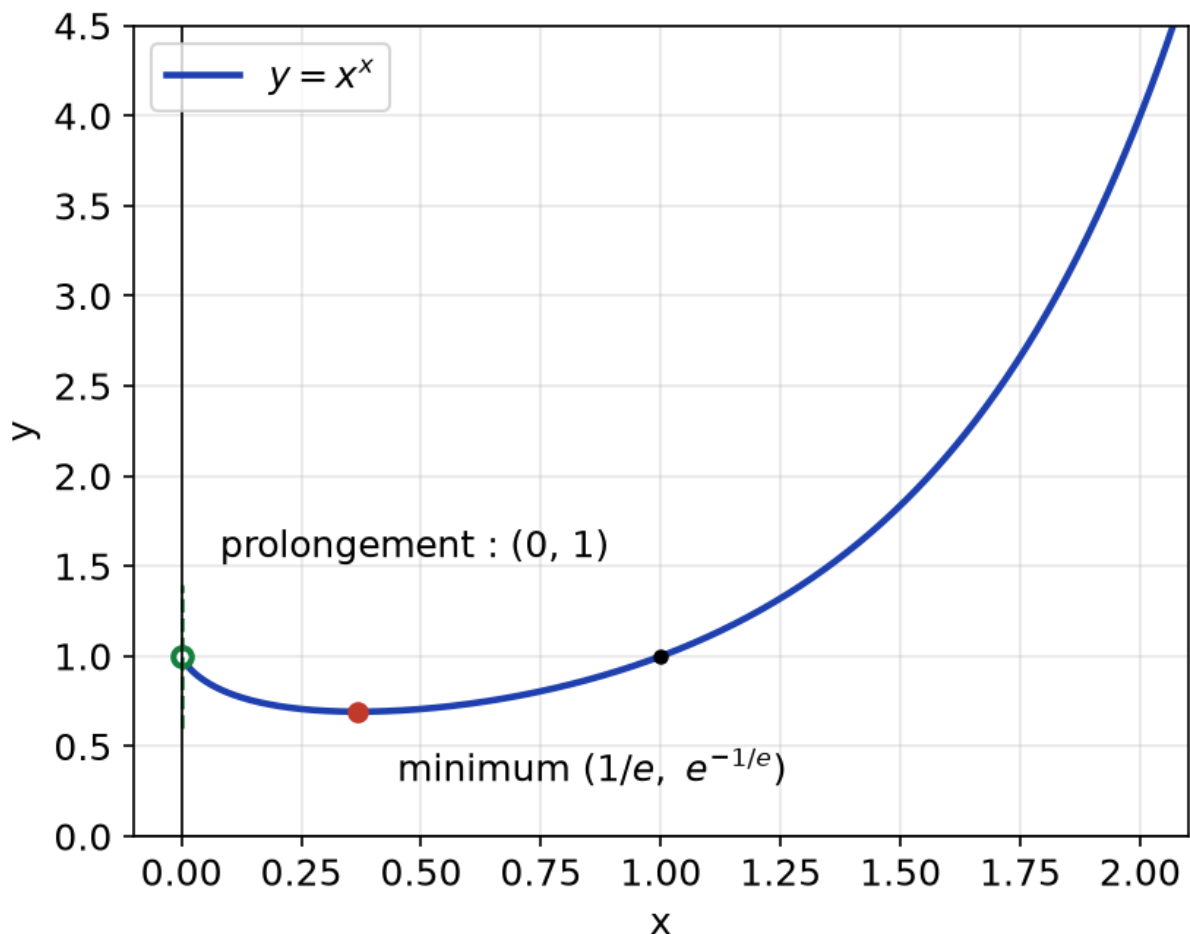
3. Par croissances comparées, $x\ln x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$. Par continuité de l'exponentielle, $f(x) \rightarrow e^0 = 1$. En $+\infty$, en revanche, $x\ln x \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$. **La fonction f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.**

4. Pour $0 < x < 1$, posons $u = x\ln x$. Alors $u \neq 0$ et

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{e^u - 1}{u} \cdot \frac{u}{x} = \frac{e^u - 1}{u} \cdot \ln x.$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, on a $u \rightarrow 0$, donc $\frac{e^u - 1}{u} \rightarrow 1$, qui est la dérivée de $\exp$ en 0. Or $\ln x \rightarrow -\infty$. **Le taux d'accroissement tend vers $-\infty$: le prolongement n'est pas dérivable en 0, et la courbe admet au point $(0, 1)$ une demi-tangente verticale.**

La courbe ci-dessous résume cette étude : elle part du point $(0, 1)$ avec une tangente verticale, descend jusqu'au minimum, puis remonte en passant par $(1, 1)$.



Corrigé de l'exercice 3 : Limites par croissances comparées

1. C'est le cas $\alpha = 3$, $\beta = 1$ du théorème des croissances comparées. **La limite vaut 0.**
2. On a $x(\ln x)^2 = x^1 |\ln x|^2$. Le théorème en 0^+ , avec $\beta = 1$ et $\alpha = 2$, donne **une limite nulle.**
3. L'exponentielle l'emporte sur toute puissance : $\frac{x^5}{e^x} \rightarrow 0$. **La limite vaut 0.**
4. On factorise les termes dominants :

$$\frac{e^x - x^3}{x^2 + \ln x} = \frac{e^x}{x^2} \cdot \frac{1 - x^3 e^{-x}}{1 + \frac{\ln x}{x^2}}.$$

D'une part, $x^3 e^{-x} \rightarrow 0$ et $\frac{\ln x}{x^2} \rightarrow 0$, donc le second facteur tend vers 1. D'autre part,

$\frac{x^2}{e^x} \rightarrow 0^+$, donc $\frac{e^x}{x^2} \rightarrow +\infty$. **La limite vaut $+\infty$.**

5. On pose $t = -x \rightarrow +\infty$. Alors $xe^x = -\frac{t}{e^t}$, qui tend vers 0. **La limite vaut 0.**

6. On écrit $x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. Or $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, et l'exponentielle est continue en 0. **La limite vaut 1.**

Corrigé de l'exercice 4 : Formes indéterminées plus délicates

1. C'est une forme 1^∞ . On écrit $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln(1 + 1/x)}$. Avec $u = 1/x \rightarrow 0^+$, on a $x \ln(1 + 1/x) = \frac{\ln(1 + u)}{u} \rightarrow 1$. Par continuité de l'exponentielle, **la limite vaut e .**

2. On écrit $\frac{x \ln x}{e^x} = e^{(\ln x)^2 - x}$. Ensuite, $(\ln x)^2 - x = x \left(\frac{(\ln x)^2}{x} - 1 \right)$. Par croissances comparées, $\frac{(\ln x)^2}{x} \rightarrow 0$, donc l'exposant tend vers $-\infty$. **La limite vaut 0.**

3. On a $x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x} \ln x}$. Or $\sqrt{x} \ln x = x^{1/2} \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ , par croissances comparées. **La limite vaut $e^0 = 1$.**

4. On factorise e^x dans le logarithme : $\ln(1 + e^x) = x + \ln(1 + e^{-x})$. Donc $\frac{\ln(1 + e^x)}{x} = 1 + \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x}$. Le numérateur du dernier quotient tend vers $\ln 1 = 0$. **La limite vaut 1.**

5. De même, $\ln(x^2 + 1) = 2 \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$. Pour $x > 1$, on obtient $\frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln x} = 2 + \frac{\ln(1 + 1/x^2)}{\ln x}$. Le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers $+\infty$. **La limite vaut 2.**

Point de méthode : dans un logarithme, on factorise par le terme dominant, puis on sépare avec $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Corrigé de l'exercice 5 : Inégalités classiques

1. Posons $\varphi(x) = e^x - 1 - x$. Elle est dérivable et $\varphi'(x) = e^x - 1$. Cette dérivée est strictement négative sur $] -\infty, 0[$ et strictement positive sur $] 0, +\infty[$. Donc φ est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$ et strictement croissante sur $] 0, +\infty[$. Son minimum est $\varphi(0) = 0$, atteint seulement en 0. **Ainsi $e^x \geq 1 + x$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.**
2. Pour $x > -1$, on applique la question 1 à $y = \ln(1+x)$: $e^y \geq 1 + y$, soit $1 + x \geq 1 + \ln(1+x)$. **Donc $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$.**
3. Soit $u(x) = x - \arctan x$ sur $[0, +\infty[$. On a $u'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$. Donc u est croissante et $u(x) \geq u(0) = 0$. Ensuite, soit $v(x) = \arctan x - x + \frac{x^3}{3}$. On calcule

$$v'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \frac{1 - (1+x^2) + x^2(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{x^4}{1+x^2} \geq 0.$$
 Par conséquent, v est croissante et $v(x) \geq v(0) = 0$. **On a bien $x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x$ pour $x \geq 0$.**
4. Soit $g(x) = \operatorname{ch} x - 1 - \frac{x^2}{2}$. On a $g'(x) = \operatorname{sh} x - x$ et $g''(x) = \operatorname{ch} x - 1 \geq 0$. Ainsi g' est croissante, et $g'(0) = 0$. Donc g' est du signe de x . Il en résulte que g décroît sur $] -\infty, 0[$ et croît sur $] 0, +\infty[$. **Son minimum est $g(0) = 0$, d'où $\operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.**

Corrigé de l'exercice 6 : Équations trigonométriques

1. Sur $] -\pi/2, \pi/2[$, $\cos$ ne s'annule pas. Donc $\tan = \sin/\cos$ est dérivable comme quotient, et

$$\tan' = \frac{\cos \cdot \cos - \sin \cdot (-\sin)}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}.$$

En séparant la fraction, on obtient aussi $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

2. On pose $X = \cos x$. L'équation devient $2X^2 - 3X + 1 = 0$, soit $(2X-1)(X-1) = 0$. D'abord, $\cos x = 1$ donne $x = 0$ dans $[0, 2\pi[$. Ensuite, $\cos x = \frac{1}{2}$ donne $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$. **Les solutions sont $0, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.**

3. La formule d'addition donne

$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sin x + \cos x$. Le maximum de $\sin x + \cos x$ vaut 1. Donc **le maximum de $\sin x + \cos x$ vaut $\sqrt{2}$, atteint en $x = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π** . Ensuite, l'équation $\sin x + \cos x = 1$ équivaut à $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi $x + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}$ ou $x + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{3\pi}{4}$ modulo 2π . **Dans $[0, 2\pi[$, les solutions sont 0 et $\frac{\pi}{2}$.**

4. Comme $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, l'équation s'écrit $\cos x (2\sin x - 1) = 0$. D'une part, $\cos x = 0$ donne $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. D'autre part, $\sin x = \frac{1}{2}$ donne $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$. **Les solutions sont $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{2}$.**

Corrigé de l'exercice 7 : Valeurs remarquables des fonctions réciproques

1. On cherche l'angle de l'intervalle de référence qui convient. D'abord, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ avec $\frac{\pi}{6} \in [-\pi/2, \pi/2]$. Ensuite, $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $\frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$. Enfin, $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ avec $-\frac{\pi}{3} \in]-\pi/2, \pi/2[$. **Donc $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$ et $\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$.**

2. Attention, $\frac{5\pi}{6} \notin [-\pi/2, \pi/2]$. On calcule donc $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, puis $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. De même, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. Enfin, $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$ et $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$. **Les trois valeurs sont $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{4}$.**

3. Le réel 3 n'est pas dans $[-\pi/2, \pi/2]$. En revanche, $\pi - 3 \approx 0,14$ y appartient, et $\sin(\pi - 3) = \sin 3$. Donc $\arcsin(\sin 3) = \pi - 3$. De même, 4 n'est pas dans $[0, \pi]$, mais $2\pi - 4 \approx 2,28$ l'est, et $\cos(2\pi - 4) = \cos 4$. **Ainsi $\arcsin(\sin 3) = \pi - 3$ et $\arccos(\cos 4) = 2\pi - 4$.**

4. Soit $\theta = \arctan x \in]-\pi/2, \pi/2[$. Alors $\cos\theta > 0$ et $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + x^2$. Donc $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pour tout réel x . Ensuite, pour $x \in [-1, 1]$, $\theta = \arccos x \in [0, \pi]$, donc $\sin\theta \geq 0$ et $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$. Enfin, pour $x \in]-1, 1[$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} > 0$. **On obtient $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ et $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.**

Corrigé de l'exercice 8 : Construction de la fonction arcsinus

1. La fonction $\sin$ est continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Sa dérivée $\cos$ est strictement positive sur $]-\pi/2, \pi/2[$, donc $\sin y$ est strictement croissante. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[\sin(-\pi/2), \sin(\pi/2)]$. **L'intervalle image est $[-1, 1]$.**
2. Le théorème de la bijection affirme aussi que la réciproque est continue et strictement monotone, de même sens. Donc $\arcsin$ est continue et strictement croissante. Pour l'impairité, soit $x \in [-1, 1]$ et $\theta = \arcsin x$. Alors $-\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $\sin(-\theta) = -x$. Par définition, $\arcsin(-x) = -\theta$. **Ainsi $\arcsin$ est impaire.**
3. Soit $\theta = \arcsin x$. On a $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - x^2$. Or $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, donc $\cos \theta \geq 0$. **Par conséquent, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.**
4. Pour $x \in]-1, 1[$, on a $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $\sin'(\theta) = \cos \theta > 0$. La formule de dérivation d'une réciproque s'applique : $\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$. **Donc**
 $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. En $x = 1$, on a $\theta = \pi/2$ et $\sin'(\pi/2) = 0$. Le taux d'accroissement de $\arcsin$ en 1 est l'inverse de celui de $\sin$ en $\pi/2$, qui tend vers 0^+ . **Il tend donc vers $+\infty$: $\arcsin$ n'est pas dérivable en 1, et sa courbe y a une tangente verticale.**
5. Soit $h = \arcsin + \arccos$. Elle est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$, avec
 $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Par le théorème des accroissements finis, h est constante sur $[-1, 1]$. Or $h(0) = 0 + \frac{\pi}{2}$. **Donc $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$.**

Corrigé de l'exercice 9 : Dérivées de fonctions trigonométriques réciproques

1. La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f_1 aussi. Par dérivation d'une composée,
 $f_1'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$ **pour tout réel x .**
2. La fonction $\arcsin$ est dérivable sur $] -1, 1[$. Or $x^2 \in]-1, 1[$ si et seulement si $|x| < 1$.

Sur $] -1, 1[$, on obtient $f'_2(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

3. Pour $x > 1$, on a $\frac{1}{x} \in]0, 1[$, où $\arccos$ est dérivable. Donc

$$f'_3(x) = -\frac{-1/x^2}{\sqrt{1-1/x^2}} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

On a utilisé $\sqrt{1-1/x^2} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, valable car $x > 0$. **Ainsi** $f'_3(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

4. La fonction f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_4(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$. En divisant par e^x , on obtient $\frac{1}{e^{-x}+e^x}$. **Donc** $f'_4(x) = \frac{1}{2 \operatorname{ch} x}$.

5. Sur $] -1, 1[$, les deux termes sont dérivables. On calcule

$$f'_5(x) = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

Les deux fractions se compensent. **Donc** $f'_5(x) = \arcsin x$: f_5 est une primitive de $\arcsin$.

Corrigé de l'exercice 10 : Relations entre arctangentes

1. Soit $\varphi(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$. Elle est dérivable et

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/x^2}{1+1/x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Comme $]0, +\infty[$ est un intervalle, φ y est constante, égale à $\varphi(1) = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$.
Ensuite, φ est impaire, car $\arctan$ l'est. **Donc la somme vaut $\frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$ et $-\frac{\pi}{2}$ pour $x < 0$.**

2. Posons $u(x) = \frac{1+x}{1-x}$. Alors $u'(x) = \frac{(1-x) + (1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$. De plus,

$$1+u^2 = \frac{(1-x)^2 + (1+x)^2}{(1-x)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x)^2}. \text{ Par conséquent, } g'(x) = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

pour tout $x \neq 1$.

3. Sur chacun des intervalles $] -\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$, la fonction $g - \arctan$ a une dérivée nulle, donc elle est constante. Sur $] -\infty, 1[$, la constante vaut $g(0) - \arctan 0 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Sur $]1, +\infty[$, on passe à la limite en $+\infty$: $u(x) \rightarrow -1$, donc $g(x) \rightarrow -\frac{\pi}{4}$, et $\arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}$. La constante vaut donc $-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$. **Ainsi** $g(x) = \arctan x + \frac{\pi}{4}$ **sur** $] -\infty, 1[$, **et** $g(x) = \arctan x - \frac{3\pi}{4}$ **sur** $]1, +\infty[$.

Point de méthode : une dérivée nulle donne une fonction constante sur chaque intervalle seulement ; la constante change ici en traversant $x = 1$.

Corrigé de l'exercice 11 : Une équation avec arctangente

1. Posons $a = \arctan \frac{1}{2}$ et $b = \arctan \frac{1}{3}$. Comme $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$ et $\arctan$ est croissante, a et b sont dans $]0, \pi/4[$. Donc $a + b \in]0, \pi/2[$. Ensuite,

$$\tan(a + b) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{5/6}{5/6} = 1.$$

Or $\frac{\pi}{4}$ est le seul réel de $]0, \pi/2[$ de tangente 1. **Donc** $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

2. Soit $\varphi(x) = \arctan x + \arctan(2x)$. Elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, comme somme de deux fonctions strictement croissantes. Ses limites sont $-\pi$ en $-\infty$ et π en $+\infty$. D'après le théorème de la bijection, φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -\pi, \pi[$, qui contient $\frac{\pi}{4}$. Ainsi (E) a une unique solution x_0 . De plus, $\varphi(0) = 0 < \frac{\pi}{4}$ et φ est croissante. **Donc** $x_0 > 0$.

3. Posons $a = \arctan x_0$ et $b = \arctan(2x_0)$, de sorte que $a + b = \frac{\pi}{4}$. Comme $\cos(a + b) \neq 0$, la formule d'addition s'applique : $\tan(a + b) = \frac{3x_0}{1 - 2x_0^2} = 1$. On obtient $2x_0^2 + 3x_0 - 1 = 0$, dont les racines sont $\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$. Or $x_0 > 0$. **L'unique solution est** $x_0 = \frac{\sqrt{17} - 3}{4} \approx 0,28$.

Corrigé de l'exercice 12 : Simplification de $\arcsin(2x/(1+x^2))$

1. Pour tout réel x , $(|x| - 1)^2 \geq 0$, donc $2|x| \leq 1 + x^2$. Ainsi $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$, et f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, $x \rightarrow \frac{2x}{1+x^2}$ est impaire, ainsi que $\arcsin$. **Donc f est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.**

2. Avec $x = \tan \theta$ et $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, on a $1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$. Donc

$$\frac{2x}{1+x^2} = 2 \tan \theta \cos^2 \theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta).$$

On a bien $\frac{2x}{1+x^2} = \sin(2\theta)$.

3. On a donc $f(x) = \arcsin(\sin 2\theta)$ avec $2\theta \in]-\pi, \pi[$. On distingue trois cas.

◦ Si $x \in [-1, 1]$, alors $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ et $2\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Donc $f(x) = 2\theta = 2\arctan x$.

◦ Si $x > 1$, alors $2\theta \in]\pi/2, \pi[$. L'angle $\pi - 2\theta$ est dans $]0, \pi/2[$ et a le même sinus. Donc $f(x) = \pi - 2\arctan x$.

◦ Si $x < -1$, alors $2\theta \in]-\pi, -\pi/2[$. L'angle $-\pi - 2\theta$ est dans $] -\pi/2, 0[$ et $\sin(-\pi - 2\theta) = \sin(2\theta)$. Donc $f(x) = -\pi - 2\arctan x$.

En résumé : $f(x) = 2\arctan x$ sur $[-1, 1]$, $f(x) = \pi - 2\arctan x$ sur $]1, +\infty[$, et $f(x) = -\pi - 2\arctan x$ sur $]-\infty, -1[$.

4. En 1, les deux expressions valent $\frac{\pi}{2}$, ce qui confirme la continuité. À gauche, le taux d'accroissement tend vers la dérivée de $2\arctan$ en 1, soit $\frac{2}{1+1} = 1$. À droite, il tend vers la dérivée de $\pi - 2\arctan$ en 1, soit -1 . **Les demi-tangentes sont distinctes : f n'est pas dérivable en 1, où sa courbe présente un point anguleux.** Enfin, $\frac{2x}{1+x^2} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$ et $\arcsin$ est continue en 0. **Donc f tend vers 0 en $\pm\infty$.** Ceci confirme la conjecture faite sur la figure de l'énoncé.

Point de méthode : après le changement de variable, on vérifie toujours dans quel intervalle se trouve l'angle obtenu avant d'écrire $\arcsin(\sin \varphi) = \varphi$.

Corrigé de l'exercice 13 : Formulaire des fonctions hyperboliques

1. On factorise une différence de carrés : $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)$. Or $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$ et $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$. **Le produit vaut 1.**

2. On développe le second membre :

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{(e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b})}{4}.$$

Les termes croisés $e^a - b$ et $e^b - a$ se compensent. Il reste

$$\frac{2e^{a+b} + 2e^{-a-b}}{4} = \operatorname{ch}(a+b). \text{ Ensuite, } 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a = \frac{(e^a - e^{-a})(e^a + e^{-a})}{2} = \frac{e^{2a} - e^{-2a}}{2}. \text{ Donc } \operatorname{sh}(2a) = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a.$$

3. En dérivant terme à terme, $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ et $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$. Ensuite, $\operatorname{th}' = \frac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2}$. On obtient $\operatorname{th}' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$.

4. On pose $t = e^x > 0$. L'équation $\frac{t + 1/t}{2} = 2$ devient $t^2 - 4t + 1 = 0$. Ses racines $2 \pm \sqrt{3}$ sont toutes deux positives. De plus, $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$, donc $\ln(2 - \sqrt{3}) = -\ln(2 + \sqrt{3})$. **Les solutions sont** $x = \pm \ln(2 + \sqrt{3})$.

5. Avec $t = e^x$, l'équation $t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2}$ devient $2t^2 - 3t - 2 = 0$. Le discriminant vaut $9 + 16 = 25$, d'où $t = 2$ ou $t = -\frac{1}{2}$. Seule la racine positive convient. **L'unique solution est** $x = \ln 2$; en effet, $\operatorname{sh}(\ln 2) = \frac{2 - 1/2}{2} = \frac{3}{4}$.

Corrigé de l'exercice 14 : Réciproques des fonctions hyperboliques

1. La fonction sh est continue et $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch} > 0$, donc elle est strictement croissante. De plus, $\operatorname{sh} x \rightarrow \pm\infty$ en $\pm\infty$. **D'après le théorème de la bijection, sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.**

2. Soit y réel. On résout $\operatorname{sh} x = y$ avec $t = e^x$: $t^2 - 2yt - 1 = 0$. Le produit des racines vaut -1 , donc une seule est positive, à savoir $y + \sqrt{y^2 + 1}$. Elle est bien positive car $\sqrt{y^2 + 1} > |y|$. **Ainsi** $\operatorname{argsh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

3. Première méthode : $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ ne s'annule pas, donc $\operatorname{argsh}'(y) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} y)}$. Or $\operatorname{ch} > 0$ et $\operatorname{ch}^2 = 1 + \operatorname{sh}^2$, donc $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} y) = \sqrt{1 + y^2}$. Seconde méthode : on dérive directement,

$$\frac{1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}}}{y + \sqrt{y^2 + 1}} = \frac{\sqrt{y^2 + 1} + y}{\sqrt{y^2 + 1} (y + \sqrt{y^2 + 1})} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}.$$

Les deux méthodes donnent $\operatorname{argsh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$.

4. La fonction th est continue et strictement croissante, car $\operatorname{th}' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2} > 0$. Ensuite, $\operatorname{th} x = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \rightarrow 1$ en $+\infty$, et th est impaire. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$. Pour $y \in] -1, 1[$, l'équation $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y$ donne $e^{2x}(1 - y) = 1 + y$, donc $x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y}$. Enfin, la dérivée vaut $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + y} + \frac{1}{1 - y} \right)$. **La réciproque a pour dérivée** $\frac{1}{1 - y^2}$ **sur** $] -1, 1[$.

Corrigé de l'exercice 15 : Une fonction homographique

1. On a $2 + \frac{3}{x-1} = \frac{2x-2+3}{x-1} = \frac{2x+1}{x-1}$. **Donc** $a = 2$ **et** $k = 3$.

2. Pour $x \neq 1$, $f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2} < 0$. Ainsi f est strictement décroissante sur $] -\infty, 1[$ et sur $] 1, +\infty[$. Ensuite, $f(x) \rightarrow 2$ en $\pm\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$ en 1^- et $f(x) \rightarrow +\infty$ en 1^+ . **La courbe admet l'asymptote verticale** $x = 1$ **et l'asymptote horizontale** $y = 2$.

3. Pour $x \neq 1$, on a aussi $2 - x \neq 1$, et $f(2-x) + f(x) = 2 + \frac{3}{1-x} + 2 + \frac{3}{x-1} = 4$. Cette relation traduit la symétrie des points $(x, f(x))$ et $(2-x, f(2-x))$ par rapport à $(1, 2)$. **Le point** $O(1, 2)$ **est centre de symétrie**.

4. Sur $] -\infty, 1[$, f est continue et strictement décroissante, d'image $] -\infty, 2[$. Sur $] 1, +\infty[$, son image est $] 2, +\infty[$. Ces images sont disjointes, donc f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sur

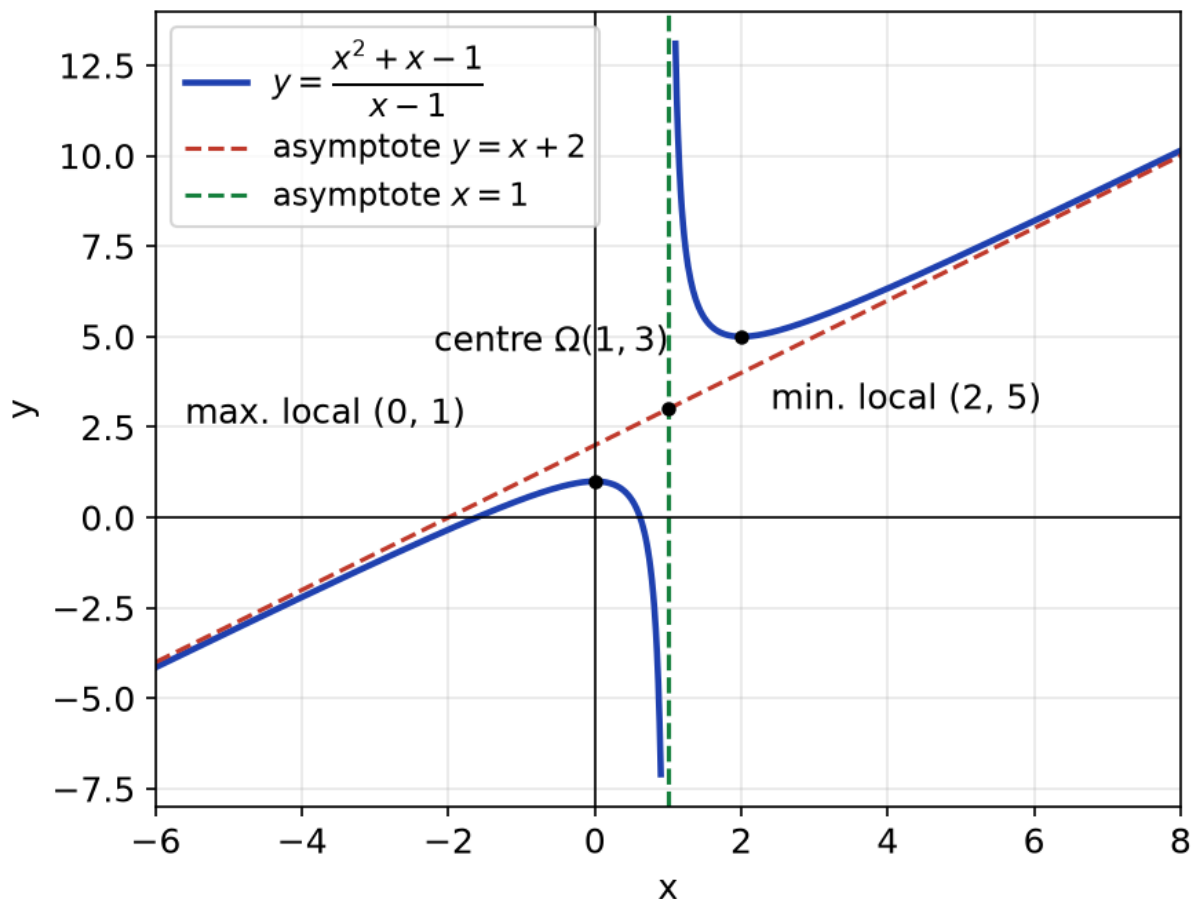
$\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Pour $y \neq 2$, l'égalité $y = 2 + \frac{3}{x-1}$ donne $x - 1 = \frac{3}{y-2}$. **Donc**
 $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-2}$.

5. L'inéquation s'écrit $1 + \frac{3}{x-1} \geq 0$, soit $\frac{x+2}{x-1} \geq 0$. Un tableau de signes conclut.
L'ensemble des solutions est $] -\infty, -2] \cup]1, +\infty[$.

Corrigé de l'exercice 16 : Asymptote oblique d'une fonction rationnelle

- La division euclidienne de $x^2 + x - 1$ par $x - 1$ donne
 $x^2 + x - 1 = (x - 1)(x + 2) + 1$. **Donc** $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1}$, **soit** $a = 1$,
 $b = 2$, $c = 1$.
- On a $f(x) - (x + 2) = \frac{1}{x-1}$, qui tend vers 0 en $\pm\infty$. Donc la droite $D: y = x + 2$ est
asymptote oblique en $\pm\infty$. De plus, cette différence est du signe de $x - 1$. **La courbe est**
au-dessus de D pour $x > 1$ et en dessous pour $x < 1$.
- On calcule $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. Elle est positive sur $] -\infty, 0]$
et sur $[2, +\infty[$, négative sur $[0, 1[$ et sur $]1, 2]$. Ensuite, $f(0) = 1$ et $f(2) = 5$. En 1,
 $\frac{1}{x-1}$ tend vers $-\infty$ à gauche et vers $+\infty$ à droite. **Ainsi f croît de $-\infty$ à 1 sur**
 $] -\infty, 0]$, décroît de 1 à $-\infty$ sur $[0, 1[$, décroît de $+\infty$ à 5 sur $]1, 2]$, puis croît de
5 à $+\infty$.
- Pour $h \neq 0$, $f(1+h) = 3 + h + \frac{1}{h}$ et $f(1-h) = 3 - h - \frac{1}{h}$. Leur somme vaut 6. **Le**
point $O(1, 3)$, intersection des deux asymptotes, est donc centre de symétrie.

La figure ci-dessous montre la courbe obtenue, ses deux asymptotes, ses extremums locaux et le centre de symétrie.



Corrigé de l'exercice 17 : Asymptotes et branches paraboliques

1. On a $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, $f(x) > |x + 1|$. En multipliant par la quantité conjuguée,

$$f(x) - (x + 1) = \frac{(x+1)^2 + 2 - (x+1)^2}{f(x) + x + 1} = \frac{2}{f(x) + x + 1}.$$

En $+\infty$, le dénominateur tend vers $+\infty$, donc cette différence tend vers 0^+ . De même, $f(x) - (-x - 1) = \frac{2}{f(x) - x - 1}$, qui tend vers 0^+ en $-\infty$. **Les asymptotes sont $y = x + 1$ en $+\infty$ et $y = -x - 1$ en $-\infty$, et la courbe est au-dessus de chacune d'elles.**

2. Posons $u = 1/x \rightarrow 0^+$. Alors $g(x) - x - 1 = \frac{e^u - 1}{u} - 1$, qui tend vers $1 - 1 = 0$. Donc $y = x + 1$ est asymptote en $+\infty$. Ensuite, $g(x) - x - 1 = x(e^u - 1 - u)$. D'après l'exercice 5, $e^u > 1 + u$ pour $u \neq 0$. **La droite $y = x + 1$ est asymptote et la**

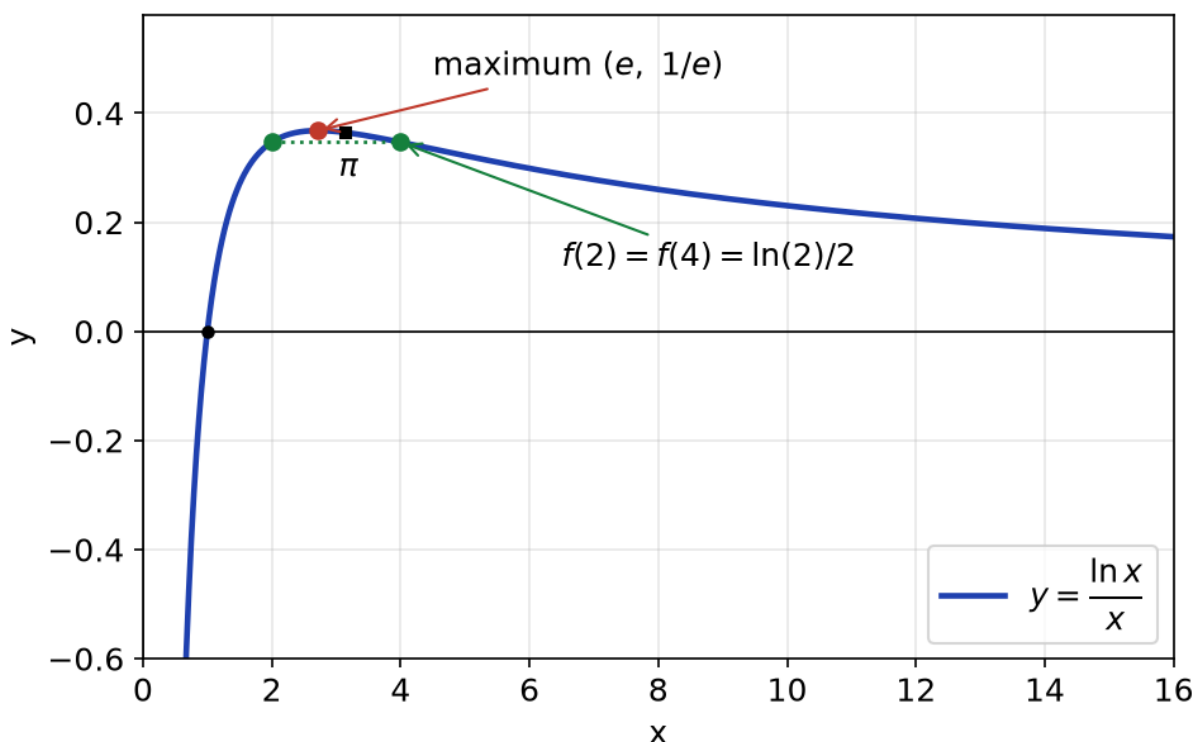
courbe de g est au-dessus.

3. On a $\frac{h(x)}{x} = 1 + \frac{\ln x}{x} \rightarrow 1$, mais $h(x) - x = \ln x \rightarrow +\infty$. La courbe de h a donc une branche parabolique de direction $y = x$. Ensuite, $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$, d'où une branche parabolique de direction (Ox) . Enfin, $\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$. **Les branches sont paraboliques, de directions respectives $y = x$, (Ox) et (Oy) .**

Corrigé de l'exercice 18 : Étude de $\ln(x)/x$ et comparaison de e^π et π^e

1. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$, et $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Elle est positive sur $]0, e]$ et négative sur $[e, +\infty[$. Le maximum vaut $f(e) = \frac{1}{e}$. En 0^+ , $\ln x \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow -\infty$. En $+\infty$, $f(x) \rightarrow 0$ par croissances comparées. Enfin, f s'annule en 1, est négative avant et positive après. **La courbe admet l'asymptote verticale $x = 0$ et l'asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$, avec un maximum $\frac{1}{e}$ en e .**
2. On sait que $e < \pi$, et f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Donc $f(\pi) < f(e)$, soit $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{e}$. Ainsi $e \ln \pi < \pi$, c'est-à-dire $\ln(\pi^e) < \ln(e^\pi)$. Comme $\ln$ est strictement croissante, $\pi^e < e^\pi$.
3. Pour $a, b \geq 1$, $a^b = b^a$ équivaut à $b \ln a = a \ln b$, soit $f(a) = f(b)$. Or f est strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Deux réels distincts de même image sont donc de part et d'autre de e : $a < e < b$, d'où $a \in \{1, 2\}$. Si $a = 1$, on aurait $f(b) = 0$, impossible pour $b > 1$. Si $a = 2$, on remarque que $f(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2} = f(2)$. Par injectivité de f sur $[e, +\infty[$, $b = 4$ est le seul choix. **L'unique couple est $(2, 4)$: $2^4 = 4^2 = 16$.**

La figure ci-dessous place le maximum en e , le réel π sur la partie décroissante, et les deux points de même ordonnée d'abscisses 2 et 4.



Corrigé de l'exercice 19 : Étude complète de $x \arctan x$

1. On a $f(-x) = (-x)\arctan(-x) = x\arctan x$, car $\arctan$ est impaire. Donc f est paire. Ensuite, $f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$. Pour $x > 0$, les deux termes sont strictement positifs ; pour $x < 0$, ils sont strictement négatifs. **Ainsi f décroît sur $]-\infty, 0]$, croît sur $[0, +\infty[$, et son minimum vaut $f(0) = 0$.**

2. On dérive encore :

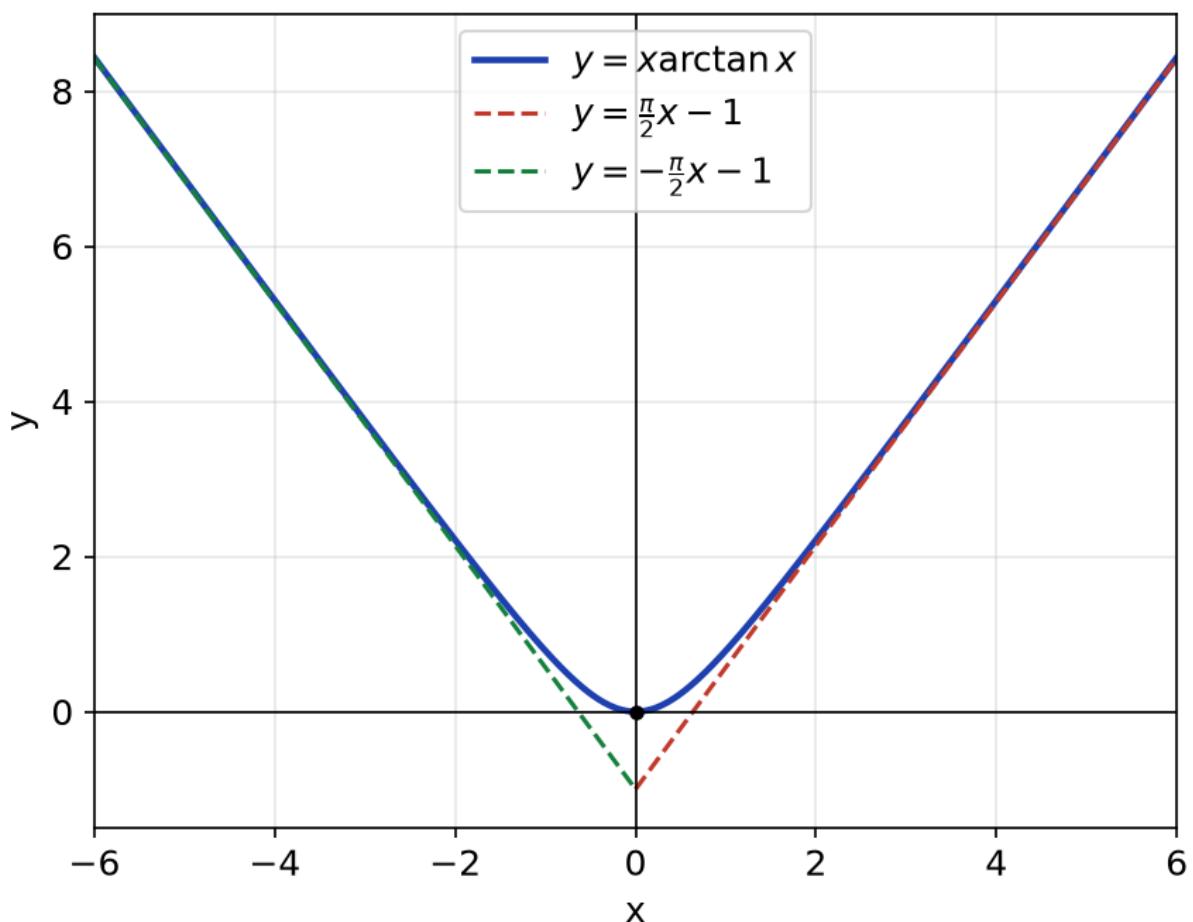
$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2) + (1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}.$$

Comme $f'' > 0$, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

3. Pour $x > 0$, l'exercice 10 donne $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$. Donc $f(x) = \frac{\pi}{2}x - x\arctan \frac{1}{x}$. Posons $u = 1/x$: $x\arctan \frac{1}{x} = \frac{\arctan u}{u}$, qui tend vers $\arctan'(0) = 1$ quand $u \rightarrow 0^+$. Par conséquent, $f(x) - \left(\frac{\pi}{2}x - 1\right) = 1 - x\arctan \frac{1}{x} \rightarrow 0$. **La droite $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ est asymptote en $+\infty$.**

4. D'après l'exercice 5, $\arctan u \leq u$ pour $u \geq 0$. L'inégalité est même stricte pour $u > 0$, car $u - \arctan u$ a une dérivée $\frac{u^2}{1+u^2}$ strictement positive sur $]0, +\infty[$. Donc $x \arctan \frac{1}{x} < 1$, et la courbe est strictement au-dessus de l'asymptote. Par parité, la symétrique de cette droite par rapport à (Oy) est asymptote en $-\infty$. En $-\infty$, l'asymptote est $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$, et la courbe est encore au-dessus.

Comme le montre la figure ci-dessous, la courbe est convexe, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et se rapproche de ses deux asymptotes par au-dessus.



Corrigé de l'exercice 20 : Problème : la fonction gudermannienne

1. Les fonctions sh et $\arctan$ sont impaires, donc leur composée aussi. Elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc gd l'est également. Ensuite, $\text{gd}'(x) = \frac{\text{ch } x}{1 + \text{sh}^2 x} = \frac{\text{ch } x}{\text{ch}^2 x}$. **Donc**
 $\text{gd}'(x) = \frac{1}{\text{ch } x}$.

2. On a $\text{th } x \in]-1, 1[$, donc $k(x) = \arcsin(\text{th } x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Or
 $1 - \text{th}^2 x = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$ et $\text{ch } x > 0$. Par conséquent,

$$k'(x) = \frac{\text{th}'(x)}{\sqrt{1 - \text{th}^2 x}} = \frac{1/\text{ch}^2 x}{1/\text{ch } x} = \frac{1}{\text{ch } x}.$$

Ainsi $k - \text{gd}$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et s'annule en 0. **Donc**
 $\text{gd}(x) = \arcsin(\text{th } x)$ **pour tout réel** x .

3. Soit $\ell(x) = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$. Alors $\ell'(x) = \frac{2e^x}{1 + e^{2x}} = \frac{2}{e^{-x} + e^x} = \frac{1}{\text{ch } x}$. De plus,
 $\ell(0) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 0 = \text{gd}(0)$. **Donc** $\text{gd}(x) = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$ **pour tout réel** x .

4. Comme $\text{sh } x \rightarrow \pm\infty$ en $\pm\infty$, on obtient $\text{gd}(x) \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}$. Ensuite, $\text{gd}''(x) = -\frac{\text{sh } x}{\text{ch}^2 x}$,
du signe de $-x$. Donc gd est convexe sur $]-\infty, 0]$ et concave sur $[0, +\infty[$. Enfin,
 $\text{gd}(0) = 0$ et $\text{gd}'(0) = 1$. **Les asymptotes sont** $y = \pm\frac{\pi}{2}$, **l'origine est un point**
d'inflexion, et la tangente en 0 est $y = x$.

5. La fonction gd est continue et strictement croissante, car $\text{gd}' > 0$. Avec ses limites, le
théorème de la bijection montre que c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Soit y dans
cet intervalle. D'abord, $\arctan(\text{sh } x) = y$ équivaut à $\text{sh } x = \tan y$, donc
 $x = \text{argsh}(\tan y)$. Ensuite, avec la question 3, $\text{gd}(x) = y$ équivaut à
 $\arctan(e^x) = \frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}$. Cet angle est dans $]0, \pi/2[$, donc $e^x = \tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. **La**
réciproque est $y \rightarrow \text{argsh}(\tan y) = \ln \tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

6. Comme gd' ne s'annule pas, la réciproque g est dérivable et $g'(y) = \text{ch}(g(y))$. Or
 $\text{sh}(g(y)) = \tan y$, donc $\text{ch}(g(y)) = \sqrt{1 + \tan^2 y}$. Pour $y \in]-\pi/2, \pi/2[$,
 $\cos y > 0$. **Donc** $g'(y) = \frac{1}{\cos y}$.

Point de méthode : pour prouver une égalité de fonctions sur un intervalle, il suffit de comparer les
dérivées, puis les valeurs en un point.

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [fonctions usuelles, cours de maths en L1](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur fonctions usuelles](#)
- À maîtriser avant : [Dérivation et accroissements finis](#)
- Chapitre précédent : [Dérivation et accroissements finis](#)
- Chapitre suivant : [Arithmétique des entiers](#)
- Le même thème en maths sup : [fonctions usuelles, exercices de maths sup](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)