

Fonctions sinus et cosinus

I. Étude de la fonction sinus.

1. Propriétés de la fonction sinus.

Propriétés connues de la fonction sinus :

- La fonction sinus est **impaire** : pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$
- La fonction sinus est **périodique de période 2π** : tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$.

Propriété : continuité et dérivabilité de la fonction sinus.

- La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $\sin'(x) = \cos(x)$.

2. Étude de la fonction sinus sur l'intervalle $[0; \pi]$.

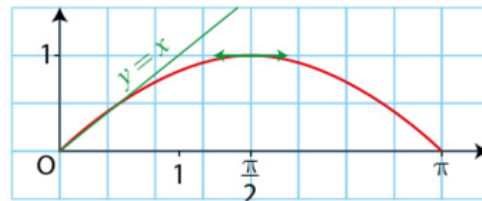
Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$.
Or, $\cos(x) \geq 0$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et $\cos(x) \leq 0$ sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$.

Donc, la fonction sinus est croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$.

Tableau de variations sur $[0; \pi]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin'(x)$	+	0	-
$\sin(x)$	0	1	0

Courbe représentative sur $[0; \pi]$



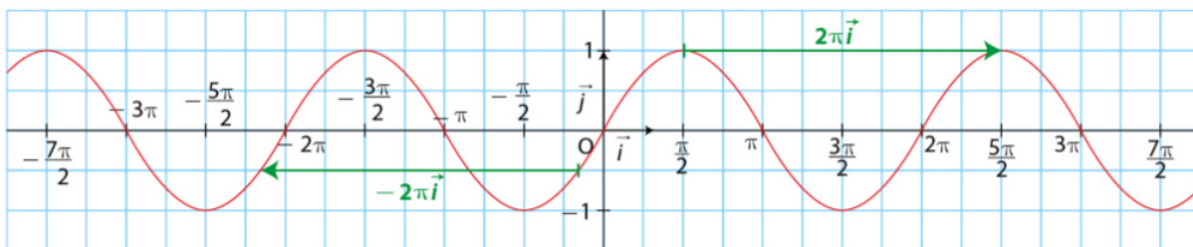
Dans un repère d'origine O , une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction sinus en l'origine O est $y = \sin'(0)(x - 0) + 0$, c'est-à-dire $y = \cos(0)x$, soit $y = x$.

3. Courbe représentative de la fonction sinus.

La parité de la fonction sinus permet de tracer la courbe sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'après la périodicité de la fonction sinus, les translations de vecteurs

$-2\pi\vec{i}, 2\pi\vec{i}, \dots$ permettent de tracer la courbe sur les intervalles $[-3\pi; \pi]$, $[\pi; 3\pi]$.



La courbe de la fonction sinus est appelée une **sinusoïde**.

II. Étude de la fonction cosinus.

1. Propriétés de la fonction cosinus.

Propriétés connues de la fonction cosinus :

- La fonction cosinus est **paire** : pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$.

- La fonction cosinus est **périodique période** 2π : tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\times}$.

Propriété : continuité et dérivabilité de la fonction cosinus.

- La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.

2. Étude de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0; \pi]$.

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.

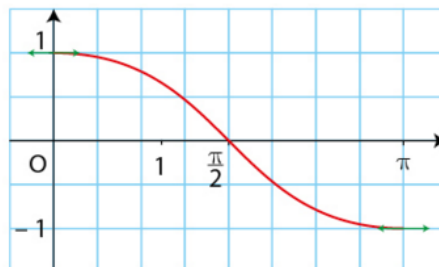
Or, $\sin(x) \geq 0$ sur $[0; \pi]$, donc $\cos'(x) \leq 0$ sur $[0; \pi]$.

Donc, la fonction cosinus est décroissante sur $[0; \pi]$.

Tableau de variations sur $[0; \pi]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos'(x)$	0	—	0
$\cos(x)$	1	0	-1

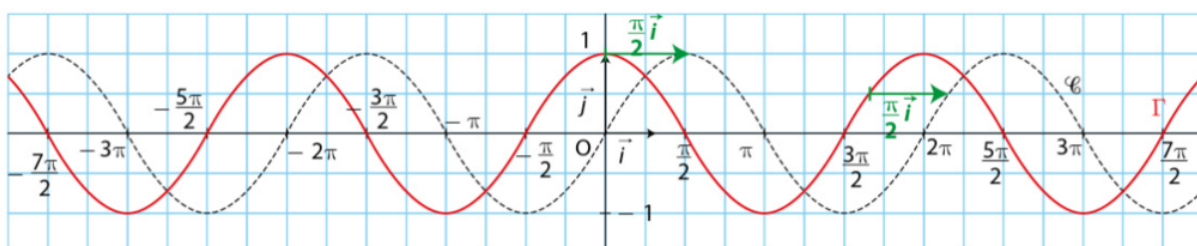
Courbe représentative sur $[0; \pi]$



3. Courbe représentative de la fonction cosinus.

La parité de la fonction cosinus permet de tracer la courbe sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'après la périodicité de la fonction cosinus, les translations de vecteurs $-2\pi\vec{i}, 2\pi\vec{i}, \dots$ permettent de tracer la courbe sur les intervalles $[-3\pi; -\pi]$, $[\pi; 3\pi], \dots$



La courbe représentative (φ) de la fonction sinus se déduit de celle (Γ) de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}i$.

Ainsi, la courbe (Γ) est aussi une **sinusoïde**.