

Fonctions holomorphes

Exercice 1 : Conditions de Cauchy-Riemann

On écrit $z = x + iy$ avec x, y réels. On considère les fonctions définies sur $\mathbb{C}$ par

$$f_1(z) = x^2 - y^2 + 2ixy, \quad f_2(z) = \bar{z}, \quad f_3(z) = |z|^2, \quad f_4(z) = x^2 + iy^2.$$

1. Pour chaque fonction, donnez sa partie réelle P et sa partie imaginaire Q .
2. Déterminez l'ensemble des points où chaque fonction vérifie les conditions de Cauchy-Riemann.
3. En déduire l'ensemble des points de $\mathbb{C}$ -dérivabilité de chaque fonction, et la dérivée en ces points.
4. Lesquelles de ces fonctions sont holomorphes sur un ouvert non vide ?

Exercice 2 : Fonction harmonique conjuguée

Soit $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2x$, définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Vérifiez que u est harmonique, c'est-à-dire $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.
2. Déterminez la fonction v de classe C^1 telle que $v(0,0) = 0$ et que $f = u + iv$ soit holomorphe sur $\mathbb{C}$.
3. Exprimez f en fonction de la seule variable z .

4. Montrez que $(x,y) \rightarrow x^2 + y^2$ n'est la partie réelle d'aucune fonction holomorphe sur un ouvert non vide.

Exercice 3 : Séries entières et fonctions analytiques

1. Déterminez le rayon de convergence de $\sum n^2 z^n$ et de $\sum 2^n z^{2n}$.
2. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Développez $z \rightarrow \frac{1}{1-z}$ en série entière de $z - a$ et donnez le rayon de convergence. En déduire que cette fonction est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
3. Soit $g(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Donnez son développement en série entière en 0 et son rayon.
4. Déterminez le rayon de convergence de la série de Taylor de g au point 1, sans calculer ses coefficients.
5. Expliquez pourquoi la série de Taylor en 0 de la fonction réelle $x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$, pourtant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, diverge pour $|x| > 1$.

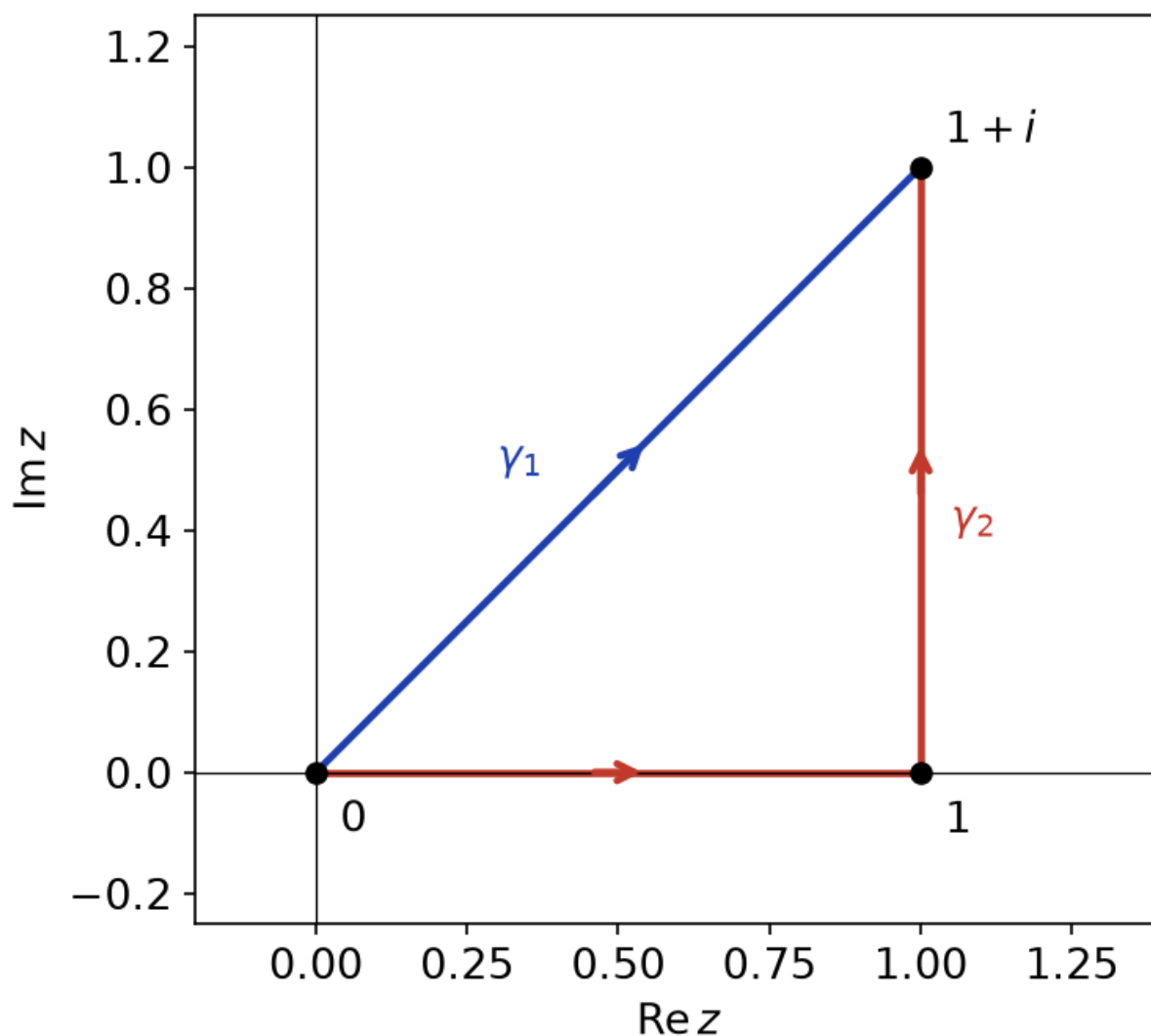
Exercice 4 : Logarithme complexe et puissances

On note Log la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

1. Calculez $\text{Log}(i)$, $\text{Log}(-1+i)$ et $\text{Log}(-\sqrt{3}-i)$.
2. On pose $z_1 = z_2 = -1+i$. Comparez $\text{Log}(z_1 z_2)$ et $\text{Log } z_1 + \text{Log } z_2$.
3. Calculez $i^i = \exp(i \text{Log } i)$.
4. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = -1+i$.
5. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $\cos z = 2$. Que peut-on en conclure sur la fonction cosinus complexe ?

Exercice 5 : Intégrales le long de deux chemins

On note γ_1 le segment de 0 à $1+i$, et γ_2 le chemin formé du segment de 0 à 1 suivi du segment de 1 à $1+i$, comme sur la figure.



1. Calculez $\int_{\gamma_1} z^2 dz$ et $\int_{\gamma_2} z^2 dz$ par paramétrage. Retrouvez le résultat à l'aide d'une primitive.
2. Calculez $\int_{\gamma_1} \bar{z} dz$ et $\int_{\gamma_2} \bar{z} dz$.
3. Expliquez la différence de comportement entre les deux fonctions.

4. En déduire l'intégrale de $\bar{z}$ sur le bord du triangle de sommets $0, 1, 1+i$, parcouru dans le sens direct. Comparez avec l'aire du triangle.

Exercice 6 : Intégrales sur un cercle et primitives

1. Soit $r > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. Calculez $\int_{C(0,r)} z^n dz$.
2. En déduire que $z \rightarrow 1/z$ n'admet pas de primitive holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.
3. Calculez $\int_{C(0,2)} \frac{(z^2+1)^2}{z^3} dz$.
4. Calculez $\int_{C(2,1)} \frac{dz}{z}$ en utilisant une primitive convenable.

Exercice 7 : Majoration d'une intégrale curviligne

1. Soit $R > 2$. Montrez que $\left| \int_{C(0,R)} \frac{dz}{z^2+4} \right| \leq \frac{2\pi R}{R^2-4}$. Quelle est la limite de cette intégrale quand $R \rightarrow +\infty$?
2. Décomposez $\frac{1}{z^2+4}$ en éléments simples. En déduire que l'intégrale de la question 1 est en fait nulle pour tout $R > 2$.
3. Pour $R > 1$, on note Γ_R le demi-cercle $t \rightarrow Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Montrez que $\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz$ tend vers 0 quand $R \rightarrow +\infty$.

Exercice 8 : Applications de la formule de Cauchy

Calculez les intégrales suivantes, en justifiant l'emploi de la formule de Cauchy.

$$1. \quad I_1 = \int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z-1} dz .$$

$$2. \quad I_2 = \int_{C(0,3)} \frac{e^z}{z(z-2)} dz .$$

$$3. \quad I_3 = \int_{C(0,1)} \frac{e^z}{z(z-2)} dz .$$

$$4. \quad I_4 = \int_{C(i,1)} \frac{dz}{z^2+1} .$$

Exercice 9 : Formule de Cauchy pour les dérivées

$$1. \text{ Calculez } \int_{C(0,1)} \frac{e^{2z}}{z^4} dz .$$

$$2. \text{ Calculez } \int_{C(0,1)} \frac{\sin z}{z^2} dz .$$

$$3. \text{ Calculez } \int_{C(0,2)} \frac{z^3}{(z-1)^2} dz .$$

$$4. \text{ Soit } n \in \mathbb{N} . \text{ Calculez } \int_{C(0,1)} \frac{e^z}{z^{n+1}} dz , \text{ puis en déduire la valeur de}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t - nt) dt .$$

Exercice 10 : Intégrales trigonométriques par la formule de Cauchy

1. À l'aide du paramétrage $z = e^{it}$, montrez que
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 4\cos t} = \int_{C(0,1)} \frac{dz}{i(2z^2 + 5z + 2)}.$$

2. En déduire la valeur de
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 4\cos t}.$$

3. Plus généralement, soit $a > b > 0$. Calculez
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\cos t}.$$

4. À l'aide de la formule de la moyenne appliquée à $\exp$, calculez
$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) dt$$
 et

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \sin(\sin t) dt.$$

Exercice 11 : Module constant et rigidité

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. On écrit $f = P + iQ$.

1. Montrez que si Q est constante sur U , alors f est constante.

2. Montrez que si $f(U) \subset \mathbb{R}$, alors f est constante.

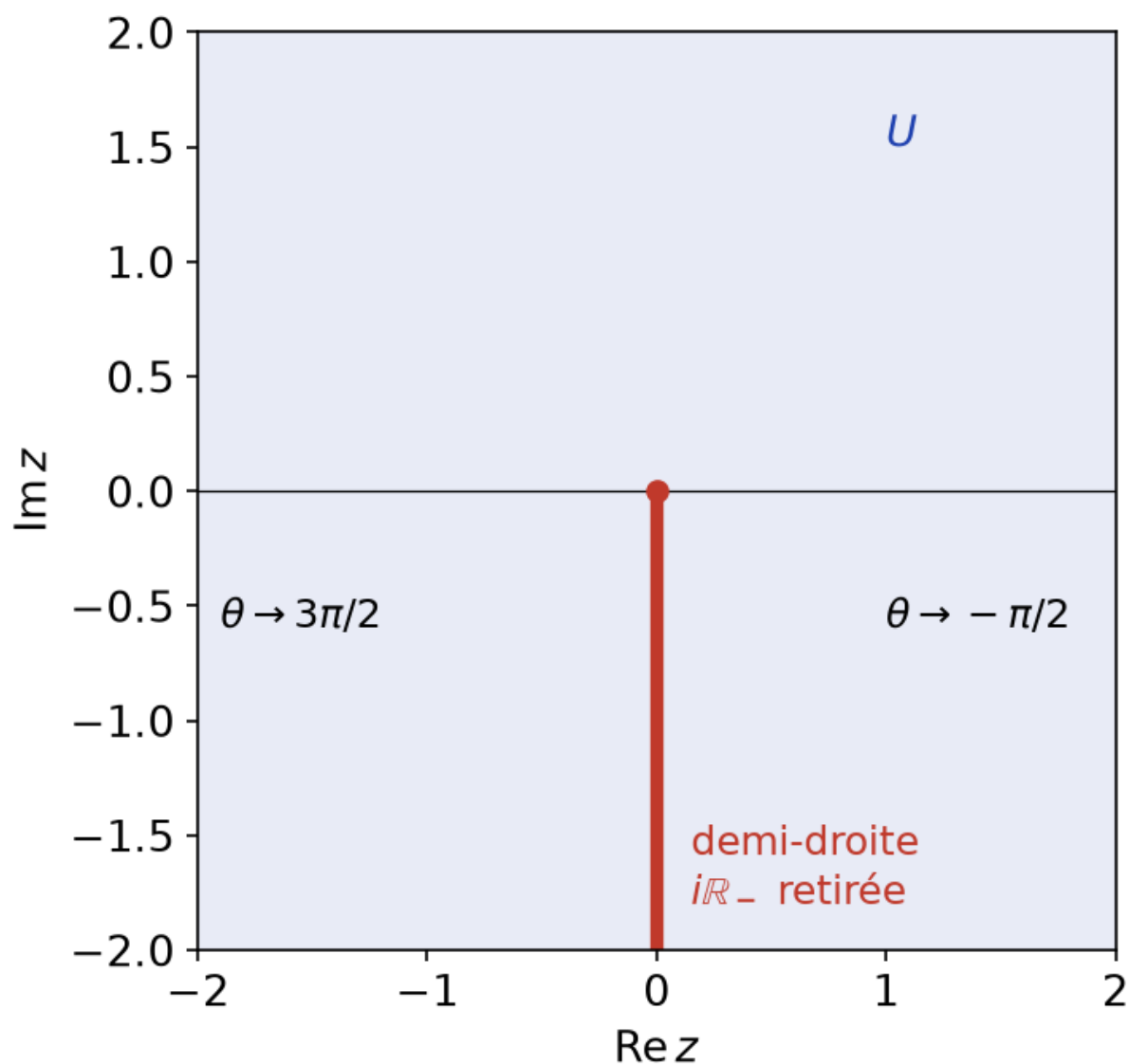
3. Montrez que si $|f|$ est constant sur U , alors f est constante.

4. On suppose que $\bar{f}$ est aussi holomorphe sur U . Montrez que f est constante.

5. Trouvez une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ , non constante, de norme euclidienne constante. Commentez.

Exercice 12 : Déterminations du logarithme

On note $U = \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$, le plan privé de la demi-droite $\left\{ \begin{matrix} iy, \\ y \leq 0 \end{matrix} \right\}$, représenté ci-dessous.



1. Tout $z \in U$ s'écrit de façon unique $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi/2, 3\pi/2[$. On pose $L(z) = \ln r + i\theta$. Montrez que L est une détermination continue du logarithme sur U , et calculez $L(-1)$ et $L(-1-i)$.
2. Comparez L et Log sur $U \setminus \mathbb{R}_-$.

3. Montrez qu'il n'existe aucune détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.
4. Soit V un ouvert étoilé et $f \in \mathcal{H}(V)$ qui ne s'annule pas. Montrez qu'il existe $g \in \mathcal{H}(V)$ telle que $e^g = f$.
5. En déduire qu'il existe $h \in \mathcal{H}(V)$ telle que $h^2 = f$.

Exercice 13 : Zéros isolés et suites de valeurs

1. Déterminez toutes les fonctions entières f telles que $f(1/n) = 1/n^2$ pour tout $n \geq 1$.
2. Existe-t-il f holomorphe sur $D(0,1)$ telle que $f(1/n) = (-1)^n/n$ pour tout $n \geq 2$?
3. Existe-t-il f holomorphe sur $D(0,1)$ telle que $f(1/n) = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 2$? Est-elle unique ?
4. Soit f entière telle que $f(1/n) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Montrez que $f = 0$. Pourquoi l'argument ne s'applique-t-il pas à $z \rightarrow \sin(\pi/z)$ sur $\mathbb{C}^*$?
5. Déterminez l'ordre du zéro 0 de $f(z) = \sin z - z$, et écrivez $f(z) = z^m g(z)$ avec $g(0) \neq 0$.

Exercice 14 : Prolongement analytique d'identités

1. Montrez que $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ et $\cos(2z) = 1 - 2\sin^2 z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
2. En admettant $e^{x+y} = e^x e^y$ pour x, y réels, montrez que $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ pour tous $z, w \in \mathbb{C}$.
3. Soit U un ouvert connexe contenant $[0,1]$ et $f \in \mathcal{H}(U)$ nulle sur $[0,1]$. Montrez que $f = 0$.
4. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = e^{-1/x^2}$ si $x > 0$ et $\varphi(x) = 0$ sinon. On admet que φ est de classe C^∞ . Expliquez pourquoi le résultat de la question 3 n'a pas d'analogue pour les fonctions C^∞ réelles.

5. Montrez qu'il existe au plus une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ qui prolonge $\ln$ sur $]0, +\infty[$. Identifiez-la.

Exercice 15 : Fonctions entières à croissance polynomiale

1. Soit f entière. On suppose qu'il existe $A, B \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrez que f est un polynôme de degré au plus k .
2. Déterminez toutes les fonctions entières f telles que $|f(z)| \leq |z|^2$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
3. Soit f entière telle que $f(z+1) = f(z)$ et $f(z+i) = f(z)$ pour tout z . Montrez que f est constante.

Exercice 16 : Variantes du théorème de Liouville

Dans cet exercice, f désigne une fonction entière.

1. On suppose $\operatorname{Re} f(z) \leq 0$ pour tout z . Montrez que f est constante. Indication : considérez e^f .
2. On suppose $\operatorname{Im} f(z) \geq 0$ pour tout z . Montrez que f est constante.
3. On suppose que $|f(z) - 1| \geq \frac{1}{2}$ pour tout z . Montrez que f est constante.
4. On suppose que $|f(z)| \leq |e^z|$ pour tout z . Montrez qu'il existe $c \in \mathbb{C}$, avec $|c| \leq 1$, tel que $f(z) = c e^z$.

Exercice 17 : Théorème de d'Alembert-Gauss par Liouville

Soit $n \geq 1$ et $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$, à coefficients complexes. On pose $S = |a_0| + \dots + |a_{n-1}|$ et $R = \max(1, 2S)$.

1. Montrez que $|P(z)| \geq \frac{|z|^n}{2}$ pour $|z| \geq R$.
2. On suppose que P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. Montrez que $1/P$ est entière et bornée.
3. Concluez que P admet une racine dans $\mathbb{C}$.
4. En déduire que P s'écrit $P(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k)$, avec $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.
5. On suppose les a_k réels. Montrez que si w est une racine non réelle, alors $\bar{w}$ est aussi racine. En déduire qu'un polynôme réel de degré impair a une racine réelle.

Exercice 18 : Principe du maximum

1. Déterminez le maximum de $|z^2 - 1|$ sur le disque fermé $\overline{D}(0,1)$ et les points où il est atteint.
2. Déterminez le minimum de $|z^2 - \frac{1}{4}|$ sur $\overline{D}(0,1)$, puis son minimum sur le cercle unité. Pourquoi cela ne contredit-il pas le principe du minimum ?
3. Déterminez le maximum et le minimum de $|e^z|$ sur $\overline{D}(0,1)$.
4. Soit f holomorphe sur un ouvert contenant $\overline{D}(0,1)$, telle que $|f(z)| = 1$ pour $|z| = 1$ et qui ne s'annule pas sur $\overline{D}(0,1)$. Montrez que f est constante.
5. Montrez par un exemple que la conclusion de la question 4 tombe si f s'annule.

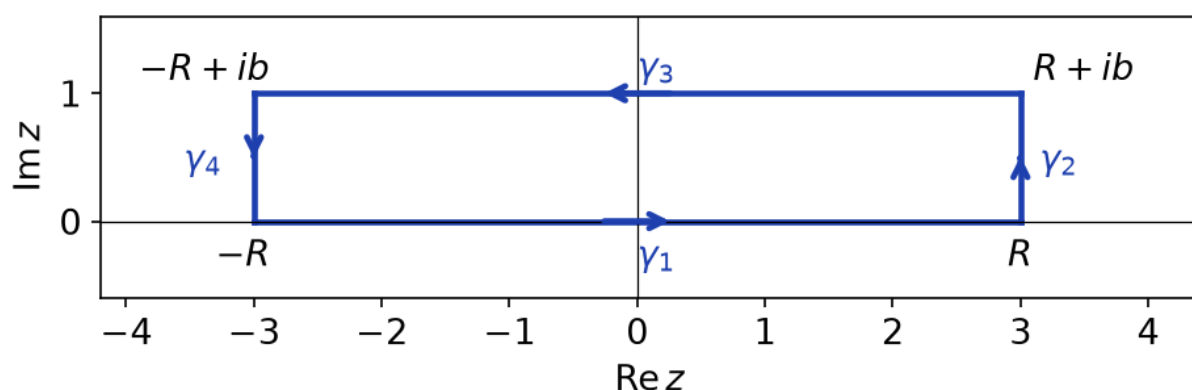
Exercice 19 : Lemme de Schwarz

On note $\mathbb{D} = D(0,1)$. Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ telle que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ et $f(0) = 0$.

1. Montrez que $g(z) = f(z)/z$ pour $z \neq 0$, $g(0) = f'(0)$, définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$.
2. Soit $r \in]0,1[$. Montrez que $|g(z)| \leq 1/r$ pour $|z| \leq r$. En déduire que $|g| \leq 1$ sur $\mathbb{D}$.
3. Concluez : $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, et $|f'(0)| \leq 1$.
4. Montrez que si $|f(z_0)| = |z_0|$ pour un $z_0 \neq 0$, ou si $|f'(0)| = 1$, alors il existe λ de module 1 tel que $f(z) = \lambda z$.
5. Déterminez toutes les fonctions f holomorphes de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1/2) = 1/2$.

Exercice 20 : Problème : intégrale de Gauss par le théorème de Cauchy

On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Soit $b > 0$ et $R > 0$. On note Γ_R le bord du rectangle de sommets $-R$, R , $R + ib$, $-R + ib$, parcouru dans le sens direct, et $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ ses quatre côtés, comme sur la figure. On pose $f(z) = e^{-z^2}$.



1. Justifiez que $\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$.
2. Montrez que $|f(R + it)| \leq e^{b^2 - R^2}$ pour $t \in [0, b]$. En déduire que les intégrales sur les

côtés verticaux γ_2 et γ_4 tendent vers 0 quand $R \rightarrow +\infty$.

3. Exprimez $\int_{\gamma_3} f(z) dz$ sous la forme d'une intégrale réelle sur $[-R, R]$.

4. En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2}$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2bx) dx = 0$.

5. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Déduisez-en $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \cos(\xi x) dx$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [fonctions holomorphes, cours de maths en L3](#)
- À maîtriser avant : [Compacité et connexité](#)
- Chapitre précédent : [Équations différentielles et théorème de Cauchy-Lipschitz](#)
- Chapitre suivant : [Singularités et théorème des résidus](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)

