

Fonctions holomorphes

I. Fonctions holomorphes et équations de Cauchy-Riemann

Dans tout le chapitre, U désigne un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ en écrivant $z = x + iy$. Une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ s'écrit alors $f = P + iQ$, où P et Q sont à valeurs réelles. L'idée centrale est simple : on dérive par rapport à la variable complexe, et non plus seulement par rapport à x ou y .

1. Dérivabilité complexe

Définition :

Soit $a \in U$. La fonction f est **$\mathbb{C}$ -dérivable** en a si le quotient $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite quand $h \rightarrow 0$, $h \in \mathbb{C}^*$. Cette limite est notée $f'(a)$. La fonction f est **holomorphe sur U** si elle est $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point de U . On note $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble de ces fonctions.

Les règles usuelles restent valables : sommes, produits, quotients et composées de fonctions holomorphes sont holomorphes. Ainsi, les polynômes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, et les fractions rationnelles le sont hors de leurs pôles. Une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier est dite **entière**.

Exemple :

La conjugaison $f(z) = \bar{z}$ n'est $\mathbb{C}$ -dérivable nulle part. En effet, le quotient vaut $\bar{h}/h$. Pour h réel, il vaut 1 . En revanche, pour h imaginaire pur, il vaut -1 . Il n'a donc pas de limite en 0 ,

bien que f soit linéaire sur $\mathbb{R}^2$.

2. Les équations de Cauchy-Riemann

Théorème :

Soit $f = P + iQ$ définie sur U et $a = x_0 + iy_0 \in U$. La fonction f est $\mathbb{C}$ -dérivable en a si et seulement si f est différentiable en a au sens de $\mathbb{R}^2$ et vérifie

$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = i \frac{\partial f}{\partial x}(a)$. Autrement dit :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \text{ en } (x_0, y_0).$$

Dans ce cas, $f'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial P}{\partial x}(a) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(a)$.

Démonstration :

Si f est $\mathbb{C}$ -dérivable en a , alors $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$. Donc f est différentiable, de différentielle $L : h \rightarrow f'(a)h$, qui est $\mathbb{C}$ -linéaire. Réciproquement, une application $\mathbb{R}$ -linéaire $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifie $L(s + it) = sL(1) + tL(i)$. Elle est donc $\mathbb{C}$ -linéaire si et seulement si $L(i) = iL(1)$. Or $L(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $L(i) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$. Si cette condition est remplie, $L(h) = L(1)h$, d'où la $\mathbb{C}$ -dérivabilité avec $f'(a) = L(1)$. Enfin, la condition $\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$ s'écrit $P_y + iQ_y = iP_x - Q_x$. En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient $P_y = -Q_x$ et $Q_y = P_x$.

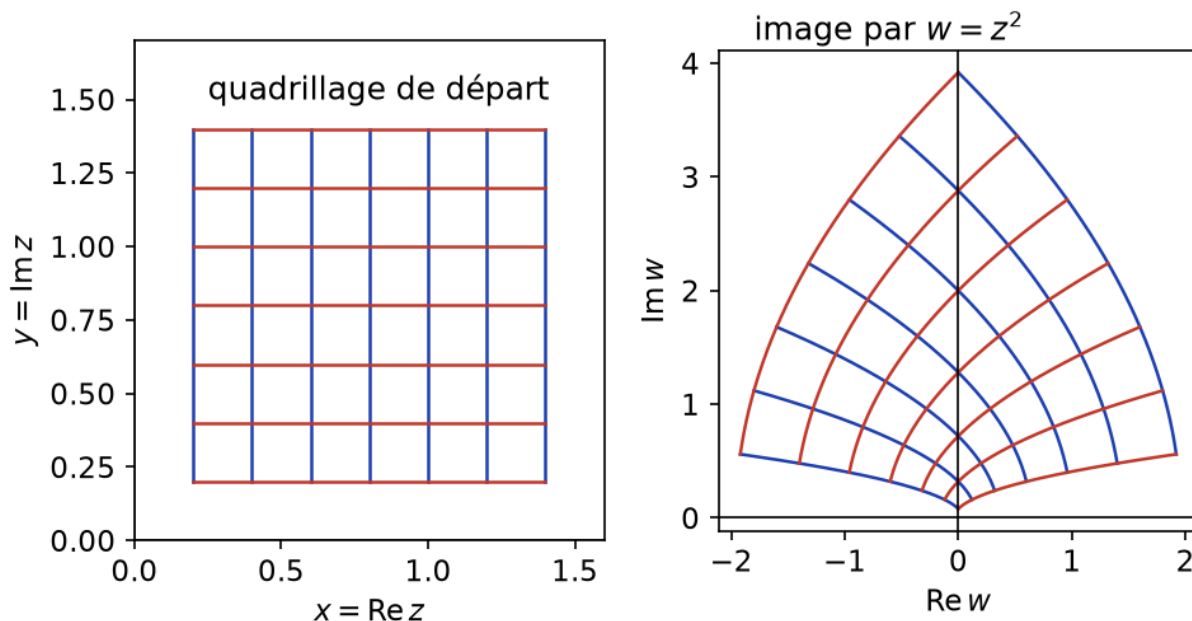
Méthode :

Pour vérifier les conditions de Cauchy-Riemann : d'abord, écrivez P et Q en fonction de x et y . Ensuite, calculez les quatre dérivées partielles et vérifiez que f est différentiable (par exemple de classe C^1). Enfin, résolvez le système $P_x = Q_y$, $P_y = -Q_x$. L'ensemble des solutions est l'ensemble des points de $\mathbb{C}$ -dérivabilité. La fonction est holomorphe sur tout ouvert contenu dans cet ensemble.

Exemple :

Soit $f(x+iy) = e^x \cos y + i e^x \sin y$. On a $P_x = e^x \cos y = Q_y$ et $P_y = -e^x \sin y = -Q_x$. Les dérivées sont continues, donc f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et $f' = P_x + iQ_x = f$. En revanche, $g(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ vérifie $P_x = 2x$, $Q_y = 0$, $P_y = 2y$, $Q_x = 0$: elle n'est $\mathbb{C}$ -dérivable qu'en 0 .

Géométriquement, la différentielle d'une fonction holomorphe est une similitude $h \rightarrow f'(a)h$. Par conséquent, là où $f'(a) \neq 0$, les angles orientés sont conservés : on dit que f est **conforme**. Comme le montre la figure ci-dessous, l'image d'un quadrillage par $z \rightarrow z^2$ est formée de paraboles qui se coupent encore à angle droit.



3. Premières manifestations de la rigidité

Proposition :

Soit U un ouvert **connexe** et $f \in \mathcal{H}(U)$. Si $f' = 0$, alors f est constante. De même, si $\operatorname{Re} f$ est constante, ou si $|f|$ est constant, alors f est constante.

Démonstration :

Si $f' = 0$, les dérivées partielles de f sont nulles ; f est donc localement constante, puis constante par connexité. Si P est constante, alors $P_x = P_y = 0$, donc $Q_x = Q_y = 0$ par Cauchy-Riemann, et $f' = P_x + iQ_x = 0$. Enfin, supposons $P^2 + Q^2 = c$. Si $c = 0$, c'est immédiat. Sinon, en dérivant, $PP_x + QQ_x = 0$ et $PP_y + QQ_y = 0$. Avec Cauchy-Riemann, cela donne $PP_x - QP_y = 0$ et $QP_x + PP_y = 0$. Ce système linéaire en (P_x, P_y) a pour déterminant $P^2 + Q^2 = c \neq 0$. Ainsi $P_x = P_y = 0$ et on conclut comme avant.

II. Séries entières, exponentielle et logarithme complexes

1. Fonctions analytiques

On rappelle qu'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon $R > 0$ a une somme S holomorphe sur le disque $D(0, R)$. De plus, $S'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$, série de même rayon. Par récurrence, S est indéfiniment $\mathbb{C}$ -dérivable et $a_n = S^{(n)}(0)/n!$.

Définition :

Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est **analytique** sur U si, pour tout $a \in U$, il existe $r > 0$ et une

suite (a_n) tels que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ pour tout $z \in D(a,r) \subset U$.

Proposition :

La somme d'une série entière de rayon R est analytique sur $D(0,R)$. Plus précisément, pour $|b| < R$, elle est développable en série entière de $z - b$ sur $D(b, R - |b|)$.

Démonstration :

Pour $|z - b| < R - |b|$, on écrit $z^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^{n-k} (z-b)^k$. La famille double $\left(a_n \binom{n}{k} b^{n-k} (z-b)^k \right)$ est sommable, car la somme des modules vaut $\sum |a_n| (|b| + |z-b|)^n < +\infty$. On peut donc sommer d'abord en n , ce qui donne un développement en puissances de $z - b$.

Toute fonction analytique est donc holomorphe. Le résultat surprenant de ce chapitre sera la réciproque : toute fonction holomorphe est analytique.

2. Exponentielle complexe

L'exponentielle est définie par $\exp(z) = \sum_{n \geq 0} z^n / n!$, de rayon infini. Elle vérifie

$\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$ et $\exp' = \exp$. De plus, $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, ce qui retrouve l'exemple de la partie I.

Propriété :

L'exponentielle est un morphisme surjectif de $(\mathbb{C}, +)$ sur $(\mathbb{C}^*, \times)$, de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$. Ainsi, $e^z = e^w$ si et seulement si $z - w \in 2i\pi\mathbb{Z}$. On pose $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ et $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$: ce sont des fonctions entières.

3. Logarithme complexe et déterminations

Comme l'exponentielle n'est pas injective, il n'y a pas « un » logarithme sur $\mathbb{C}^*$. On choisit donc un logarithme de façon continue sur un ouvert bien choisi.

Définition :

Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert. Une **détermination du logarithme** sur U est une fonction continue $L : U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\exp(L(z)) = z$ pour tout $z \in U$.

Théorème :

Toute détermination continue L du logarithme sur U est holomorphe, et $L'(z) = 1/z$. Si U est connexe, deux déterminations diffèrent d'une constante $2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration :

Soit $a \in U$ et $z \neq a$ voisin de a . Alors $L(z) \neq L(a)$, car leurs exponentielles diffèrent. On écrit donc

$$\frac{L(z) - L(a)}{z - a} = \frac{L(z) - L(a)}{e^{L(z)} - e^{L(a)}}.$$

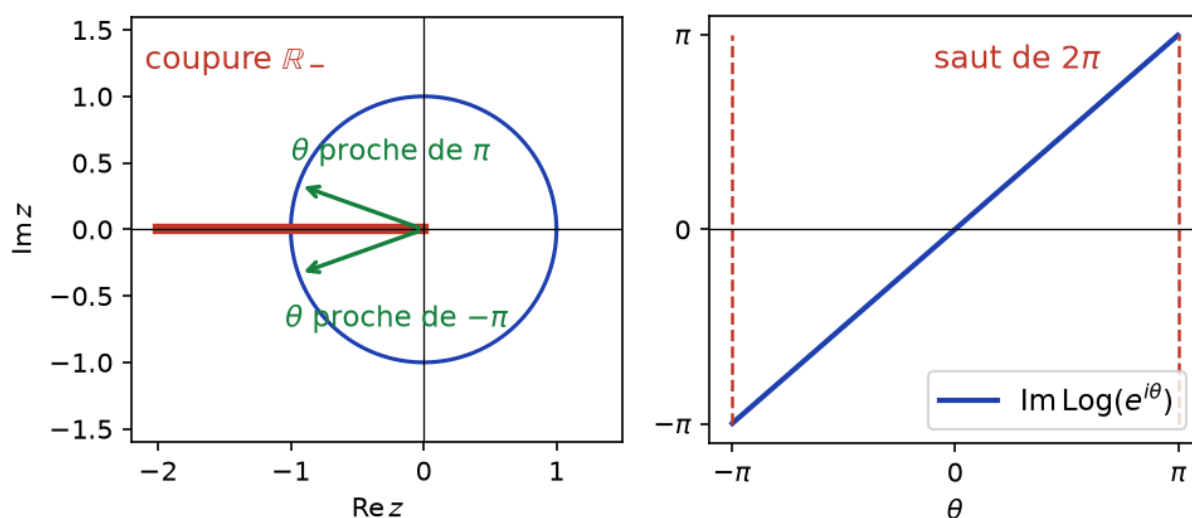
Par continuité, $L(z) \rightarrow L(a)$. Or $(e^w - e^{L(a)})/(w - L(a)) \rightarrow e^{L(a)} = a \neq 0$. Le quotient tend donc vers $1/a$. Enfin, si L_1 et L_2 sont deux déterminations, $(L_1 - L_2)/(2i\pi)$ est continue à valeurs entières, donc constante sur U connexe.

Définition :

La **détermination principale** du logarithme est définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ par
 $\text{Log}(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$, avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$. Pour $|z| < 1$, on a

$$\text{Log}(1+z) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} z^n / n.$$

La figure ci-dessous explique la coupure. Quand z parcourt le cercle unité, l'argument principal saute de 2π en traversant $\mathbb{R}_-$. C'est pourquoi on retire cette demi-droite.



Attention :

En général, $\text{Log}(z_1 z_2) \neq \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2$: l'égalité n'a lieu qu'à $2i\pi$ près. De plus, il n'existe aucune détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$ tout entier. Enfin, les puissances se définissent par $z^\alpha = \exp(\alpha \text{Log } z)$; par exemple, $i^i = e^{-\pi/2}$.

III. Intégrales le long d'un chemin

1. Définition et propriétés

Définition :

Un **chemin** de U est une application $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ continue et C^1 par morceaux. Il est **fermé** si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Pour f continue sur l'image γ^* , on pose

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

La longueur de γ est $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.

Cette intégrale ne change pas si l'on reparamètre γ en conservant le sens de parcours. En revanche, elle change de signe si l'on parcourt le chemin en sens inverse. Le cercle $C(a, r)$ est toujours parcouru une fois dans le sens direct : $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Propriété :

(Inégalité de la longueur) Si $|f| \leq M$ sur γ^* , alors $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \ell(\gamma)$.

Exemple :

Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculons

$$\int_{C(a,r)} (z-a)^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} i r e^{it} dt = i r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt. \text{ Cette intégrale vaut } 0 \text{ si } n \neq -1. \text{ En revanche, pour } n = -1, \text{ on obtient } \int_{C(a,r)} \frac{dz}{z-a} = 2i\pi.$$

2. Primitives

Théorème :

Si f admet une primitive holomorphe F sur U (c'est-à-dire $F' = f$), alors pour tout chemin $\gamma : [a,b] \rightarrow U$, on a $\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. En particulier, l'intégrale sur tout chemin fermé est nulle.

En effet, $(F \circ \gamma)' = f(\gamma)\gamma'$ sur chaque morceau. Par conséquent, la fonction $z \rightarrow 1/z$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$, puisque son intégrale sur $C(0,1)$ vaut $2i\pi \neq 0$. C'est la même obstruction que pour le logarithme.

Méthode :

Pour calculer une intégrale le long d'un chemin : si f possède une primitive évidente sur un ouvert contenant le chemin, utilisez-la. Sinon, paramétrez chaque morceau (segment $t \rightarrow z_0 + t(z_1 - z_0)$, arc de cercle $t \rightarrow a + r e^{it}$), puis calculez l'intégrale réelle obtenue. Pour une majoration, utilisez l'inégalité de la longueur.

Pour un chemin fermé γ et $a \notin \gamma^*$, on définit enfin l'**indice** $\text{Ind}_{\gamma}(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$. On admet

que c'est un entier, qui compte le nombre de tours de γ autour de a . Par exemple, l'indice d'un point par rapport à $C(z_0, r)$ vaut 1 si $|a - z_0| < r$ et 0 si $|a - z_0| > r$.

IV. Théorème de Cauchy et formule intégrale de Cauchy

1. Le théorème de Cauchy dans un ouvert étoilé

Définition :

L'ouvert U est **étoilé** par rapport à $c \in U$ si, pour tout $z \in U$, le segment $[c, z]$ est inclus dans U . Les disques et les ouverts convexes sont étoilés, ainsi que $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Lemme :

(Goursat) Soit $f \in \mathcal{H}(U)$ et T un triangle plein fermé contenu dans U . Alors l'intégrale de f sur le bord ∂T est nulle. Le résultat reste vrai si f est seulement continue sur U et holomorphe sur $U \setminus \{p\}$.

Démonstration :

Posons $I = \int_{\partial T} f$. On découpe T en quatre triangles par les milieux des côtés. Les côtés intérieurs sont parcourus deux fois en sens contraires. Donc l'un des quatre, T_1 , vérifie $|\int_{\partial T_1} f| \geq |I|/4$. En itérant, on obtient des triangles emboîtés T_n avec $|\int_{\partial T_n} f| \geq |I|/4^n$, de périmètre $p/2^n$ et de diamètre $d/2^n$. Ils se resserrent sur un point z_0 . Ensuite, on écrit $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)(z - z_0)$, avec $\varepsilon \rightarrow 0$. Les deux premiers termes ont une primitive, donc une intégrale nulle. Ainsi $|I|/4^n \leq \sup_{T_n} |\varepsilon| \cdot \frac{d}{2^n} \cdot \frac{p}{2^n}$, d'où $|I| \leq dp \sup_{T_n} |\varepsilon| \rightarrow 0$. Pour le cas d'un point exceptionnel, on découpe T en petits triangles et

on utilise la continuité de f en p .

Théorème :

(Cauchy) Soit U un ouvert étoilé et f continue sur U , holomorphe sur U privé d'au plus un point. Alors f admet une primitive holomorphe sur U . Par conséquent, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ pour tout chemin fermé γ de U .

Démonstration :

Soit c un centre d'étoile. On pose $F(z) = \int_{[c,z]} f$. Pour $z \in U$ et h petit, le triangle plein de sommets $c, z, z+h$ est dans U , car U est étoilé et contient un disque autour de z . Le lemme de Goursat donne $F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(w) dw$. Par conséquent,

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} (f(w) - f(z)) dw \right| \leq \sup_{w \in [z, z+h]} |f(w) - f(z)|.$$

Ce majorant tend vers 0 par continuité de f . Donc $F' = f$.

2. La formule intégrale de Cauchy

Théorème :

(Formule de Cauchy) Soit U un ouvert étoilé, $f \in \mathcal{H}(U)$, γ un chemin fermé de U et

$a \in U \setminus \gamma^*$. Alors

$$\text{Ind}_\gamma(a) f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

En particulier, si le disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$ est inclus dans un ouvert où f est holomorphe, alors

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{z-a} dz \text{ pour tout } a \in D(z_0, r).$$

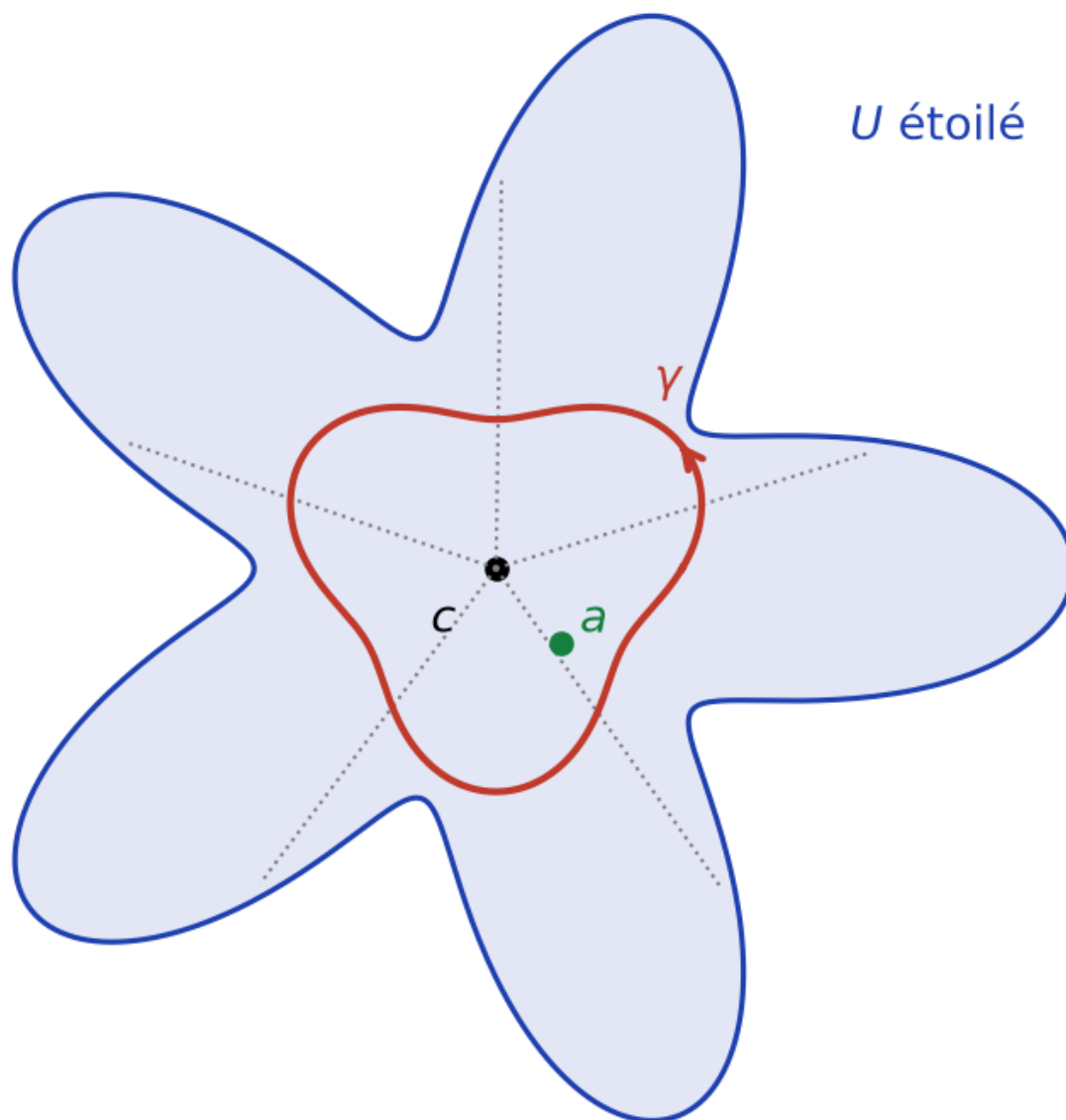
Démonstration :

On pose $g(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z-a}$ pour $z \neq a$ et $g(a) = f'(a)$. La fonction g est continue sur U et holomorphe sur $U \setminus \{a\}$. D'après le théorème de Cauchy, $\int_\gamma g = 0$. Ainsi

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a) \int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2i\pi \text{Ind}_\gamma(a) f(a).$$

Pour le cas du cercle, on applique ce qui précède sur un disque $D(z_0, r')$, avec $r' > r$, contenu dans l'ouvert.

La figure ci-dessous résume la situation : un ouvert étoilé U , un chemin fermé γ de U et un point a entouré une fois par γ . La valeur de f en a est alors entièrement déterminée par les valeurs de f sur γ .



Méthode :

Pour appliquer la formule de Cauchy à $\int_{\gamma} \frac{g(z)}{z-a} dz$: d'abord, repérez les points où l'intégrande n'est pas défini. Ensuite, isolez le facteur $\frac{1}{z-a}$ et vérifiez que le reste g est holomorphe sur un disque (ou un ouvert étoilé) contenant γ^* . Enfin, calculez l'indice de a et concluez : l'intégrale vaut $2i\pi \text{Ind}_{\gamma}(a) g(a)$. Si plusieurs points sont entourés, décomposez d'abord en éléments simples.

Exemple :

Calculons $\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z-1} dz$. La fonction $\exp$ est entière et $|1| < 2$. La formule de Cauchy donne donc $\frac{1}{2i\pi} e$. Avec $a = z_0$ et $z = z_0 + re^{it}$, on obtient aussi la **formule de la moyenne** : $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$.

V. Analyticité, zéros isolés et prolongement analytique

1. Toute fonction holomorphe est analytique

Théorème :

Soit $f \in \mathcal{H}(U)$ et $D(z_0, R) \subset U$. Alors f est somme d'une série entière sur tout ce disque : $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ pour $|z - z_0| < R$, avec, pour tout $r \in]0, R[$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

Démonstration :

Fixons z avec $|z - z_0| < r < R$. Pour $w \in C(z_0, r)$, on a $\frac{1}{w - z} = \sum_{n \geq 0} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}$, série géométrique de raison $q = |z - z_0|/r < 1$. Cette série converge normalement sur le cercle, car son terme général est majoré par q^n/r . On peut donc intervertir somme et intégrale

dans la formule de Cauchy $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w-z} dw$. On obtient le développement annoncé.

Enfin, le coefficient ne dépend pas de r , puisqu'il vaut $f^{(n)}(z_0)/n!$.

Corollaire :

Une fonction holomorphe est de classe C^∞ et sa dérivée est holomorphe. Ses parties réelle et imaginaire sont harmoniques : $\Delta P = \Delta Q = 0$. On a de plus les **inégalités de Cauchy** : si $|f| \leq M(r)$ sur $C(z_0, r)$, alors $|a_n| \leq M(r)/r^n$. Enfin, pour $\text{Ind}_\gamma(a) = 1$,

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

Voici la rigidité annoncée. Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \rightarrow x|x|$ est dérivable sans être deux fois dérivable. De même, la fonction égale à e^{-1/x^2} pour $x \neq 0$ et à 0 en 0 est de classe C^∞ sans être développable en série entière en 0. Rien de tel n'existe pour les fonctions holomorphes : une seule dérivée complexe entraîne toutes les autres.

Remarque :

Le rayon de la série de Taylor en z_0 est au moins la distance de z_0 au bord de U . Par exemple, la série de $\frac{1}{1+z^2}$ en 0 a pour rayon 1, distance de 0 aux points $\pm i$. Cela explique pourquoi la série de $\frac{1}{1+x^2}$ diverge pour $|x| > 1$, alors que cette fonction réelle est très régulière.

2. Principe des zéros isolés

Théorème :

Soit U un ouvert connexe et $f \in \mathcal{H}(U)$ non identiquement nulle. Alors, pour tout zéro a de f , il existe un entier $m \geq 1$ et $g \in \mathcal{H}(U)$ tels que $f(z) = (z-a)^m g(z)$ et $g(a) \neq 0$.

En particulier, les zéros de f sont **isolés** : chaque zéro a un voisinage sans autre zéro.

Démonstration :

Soit A l'ensemble des $z \in U$ tels que $f^{(n)}(z) = 0$ pour tout n . D'abord, A est fermé dans U , comme intersection de fermés. Ensuite, A est ouvert : si $z \in A$, la série de Taylor de f en z est nulle, donc f est nulle sur un disque centré en z . Par connexité, $A = \emptyset$ ou $A = U$. Comme f n'est pas nulle, $A = \emptyset$. Soit alors a un zéro et m le plus petit entier tel que $f^{(m)}(a) \neq 0$. On pose $g(z) = f(z)/(z-a)^m$ pour $z \neq a$ et $g(a) = f^{(m)}(a)/m!$. Le développement en série entière montre que g est holomorphe près de a . Enfin, $g(a) \neq 0$, donc g ne s'annule pas près de a par continuité.

Corollaire :

(Prolongement analytique) Soit U connexe et $f, g \in \mathcal{H}(U)$. Si $f = g$ sur une partie de U qui admet un **point d'accumulation dans** U , alors $f = g$ sur U . En particulier, une fonction holomorphe sur U connexe est déterminée par ses valeurs sur un segment, ou sur une suite convergente dans U .

Méthode :

Pour utiliser le principe des zéros isolés : exhibez une fonction candidate g , puis appliquez le résultat à $f - g$. Vérifiez trois choses : l'ouvert est connexe, l'égalité a lieu sur un ensemble infini, et cet ensemble s'accumule en un point de l'ouvert.

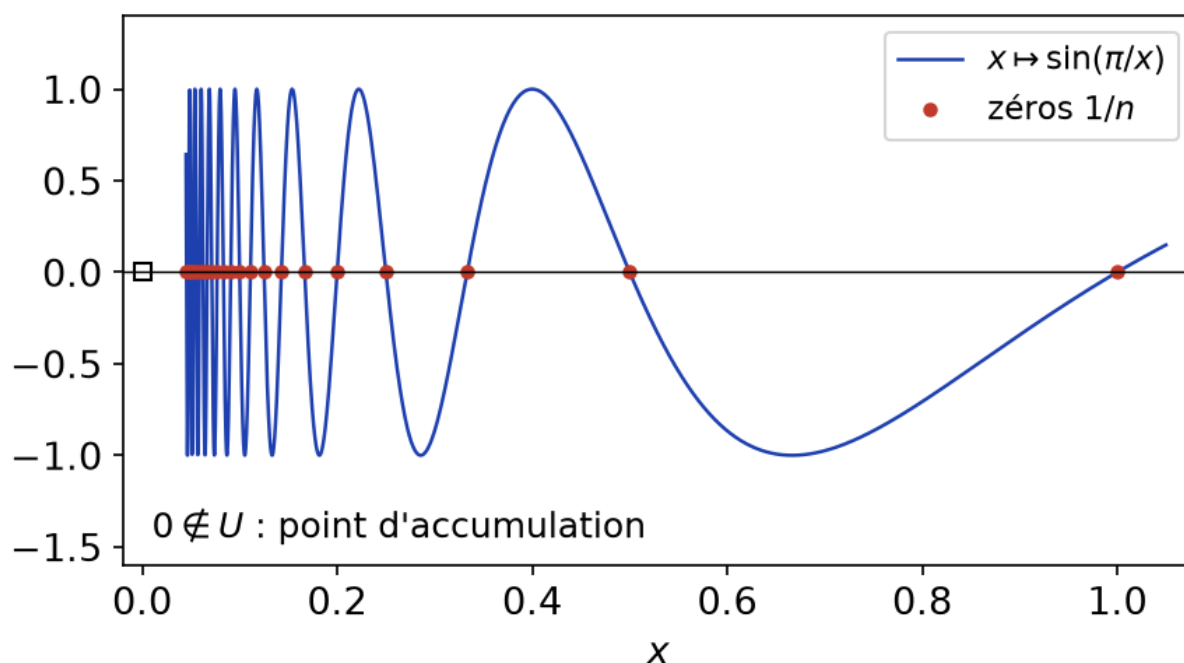
Exemple :

Les fonctions entières $z \rightarrow \sin^2 z + \cos^2 z$ et $z \rightarrow 1$ coïncident sur $\mathbb{R}$. Ainsi, elles sont égales sur $\mathbb{C}$. De même, toute identité algébrique entre fonctions entières vraie sur $\mathbb{R}$ reste vraie

sur $\mathbb{C}$.

Attention :

Le point d'accumulation doit appartenir à U . La fonction $z \rightarrow \sin(\pi/z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et s'annule en tous les $1/n$. Pourtant, elle n'est pas nulle : ses zéros s'accumulent en 0 , qui n'est pas dans $\mathbb{C}^*$. La figure ci-dessous montre sa restriction à $]0, 1]$.



VI. Liouville, d'Alembert-Gauss et principe du maximum

1. Le théorème de Liouville

Théorème :

(Liouville) Toute fonction entière et bornée est constante.

Démonstration :

Soit M un majorant de $|f|$. La fonction f est somme de sa série de Taylor $\sum a_n z^n$ sur $\mathbb{C}$. Les inégalités de Cauchy donnent $|a_n| \leq M/r^n$ pour tout $r > 0$. Pour $n \geq 1$, on fait tendre r vers $+\infty$: $a_n = 0$. Donc $f = a_0$.

Théorème :

(d'Alembert-Gauss) Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration :

Soit P de degré $n \geq 1$ et de coefficient dominant $c \neq 0$. Comme $P(z) \sim c z^n$, il existe $R > 0$ tel que $|P(z)| \geq |c| |z|^n / 2 \geq |c| R^n / 2$ pour $|z| \geq R$. Supposons par l'absurde que P ne s'annule pas. Alors $1/P$ est entière. Elle est bornée sur le disque compact $\overline{D}(0, R)$ par continuité, et par $2/(|c|R^n)$ en dehors. D'après Liouville, $1/P$ est constante, donc P aussi : c'est absurde.

2. Le principe du maximum

Théorème :

(Principe du maximum) Soit U un ouvert connexe et $f \in \mathcal{H}(U)$. Si $|f|$ admet un maximum local en un point $a \in U$, alors f est constante sur U .

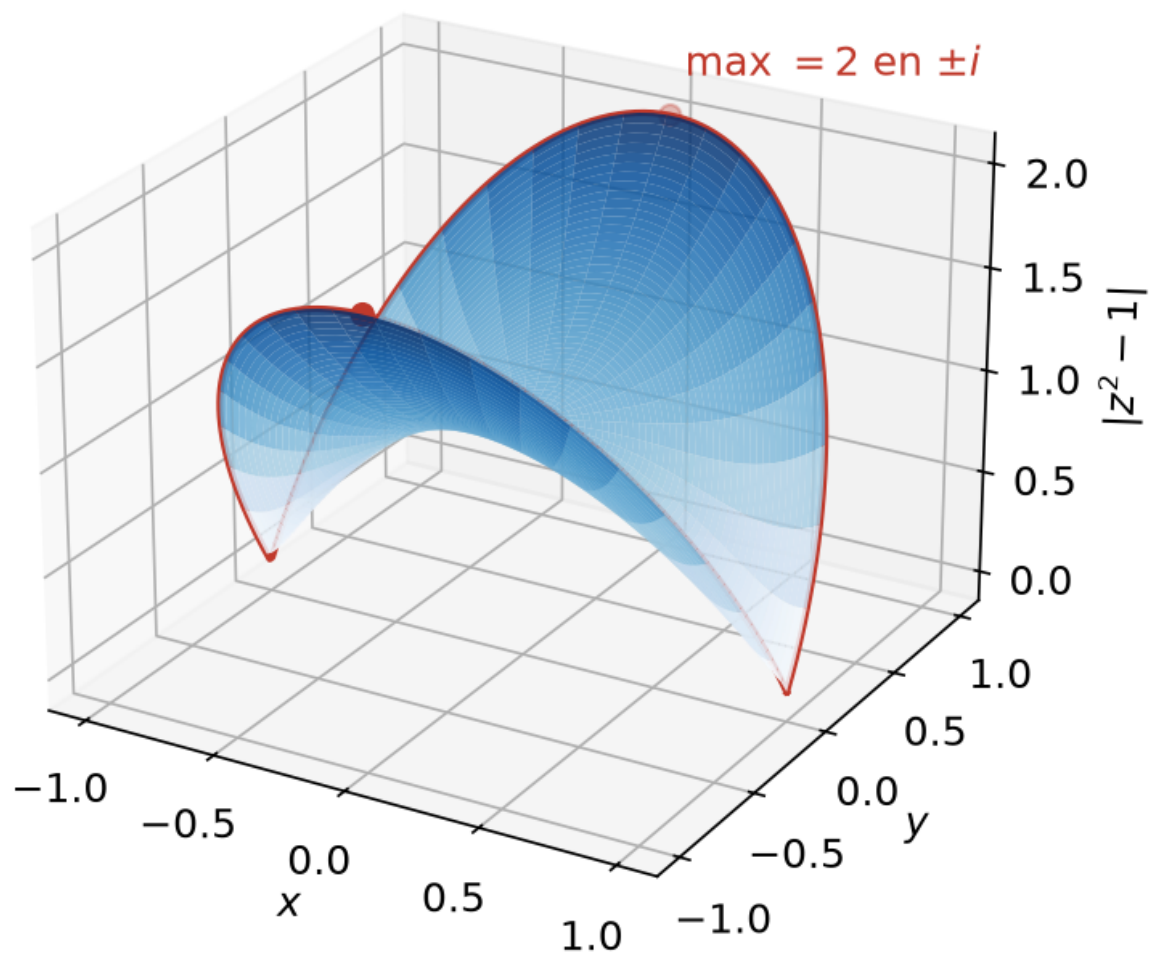
Démonstration :

Soit $r_0 > 0$ tel que $|f| \leq |f(a)|$ sur $D(a, r_0) \subset U$. Pour $0 < r < r_0$, la formule de la moyenne donne $|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{it})| dt \leq |f(a)|$. L'intégrande continu est majoré par $|f(a)|$ et sa moyenne vaut $|f(a)|$: il est donc constant égal à $|f(a)|$. Ainsi $|f|$ est constant sur $D(a, r_0)$, donc f y est constante (partie I). Enfin, le principe du prolongement analytique étend cette égalité à U .

Corollaire :

Soit U un ouvert connexe borné et f continue sur $\overline{U}$, holomorphe sur U . Alors le maximum de $|f|$ sur le compact $\overline{U}$ est atteint sur le bord ∂U . Si de plus f ne s'annule pas, le minimum de $|f|$ est aussi atteint sur le bord (appliquer le résultat à $1/f$).

La figure suivante représente la surface $|z^2 - 1|$ au-dessus du disque unité fermé. Comme le prévoit le principe du maximum, le maximum, égal à 2, est atteint sur le cercle, aux points $\pm i$. En revanche, le minimum 0 est atteint en ± 1 , car la fonction s'annule.



Exemple :

Sur le disque fermé $\overline{D}(0,1)$, on a $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$. Le maximum vaut donc e , atteint en $z = 1$, sur le bord. De même, comme e^z ne s'annule pas, le minimum e^{-1} est atteint en $z = -1$, lui aussi sur le bord.

Ce qu'il faut retenir

- Une fonction est holomorphe si elle est $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point ; cela équivaut à la différentiabilité avec les équations de Cauchy-Riemann $P_x = Q_y$, $P_y = -Q_x$.

- Sur un ouvert connexe, une fonction holomorphe de partie réelle constante, ou de module constant, est constante.
- Une détermination continue du logarithme est holomorphe de dérivée $1/z$; il n'en existe pas sur $\mathbb{C}^*$, et Log est définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.
- $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$, majorée par $\sup_{\gamma} |f| \cdot \ell(\gamma)$; $\int_{C(a,r)} \frac{dz}{z-a} = 2i\pi$.
- Théorème de Cauchy : sur un ouvert étoilé, une fonction holomorphe a une primitive et son intégrale sur tout chemin fermé est nulle.
- Formule de Cauchy : $\text{Ind}_{\gamma}(a) f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$, et sa version pour $f^{(n)}(a)$.
- Holomorphe équivaut à analytique ; la série de Taylor converge sur tout disque inclus dans l'ouvert.
- Sur un ouvert connexe, les zéros d'une fonction holomorphe non nulle sont isolés ; deux fonctions égales sur un ensemble qui s'accumule dans l'ouvert sont égales.
- Liouville : une fonction entière bornée est constante ; on en déduit le théorème de d'Alembert-Gauss.
- Principe du maximum : le module d'une fonction holomorphe non constante n'a pas de maximum local ; sur un compact, il atteint son maximum au bord.

Questions fréquentes sur fonctions holomorphes

Quelle différence entre une fonction holomorphe et une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Une fonction holomorphe est différentiable et sa différentielle est de plus $\mathbb{C}$ -linéaire, ce qui équivaut aux équations de Cauchy-Riemann. Par exemple, la conjugaison est $\mathbb{R}$ -linéaire, donc différentiable, mais elle n'est $\mathbb{C}$ -dérivable nulle part. Cette contrainte supplémentaire entraîne toute la rigidité du chapitre.

Pourquoi faut-il un ouvert étoilé dans le théorème de Cauchy ?

Sur un ouvert étoilé, on construit une primitive en intégrant sur les segments issus du centre, grâce au lemme de Goursat. Sans hypothèse de ce type, le résultat est faux : sur $\mathbb{C}$ privé de 0, l'intégrale de $1/z$ sur

le cercle unité vaut $2i\pi$. Plus tard, on remplace cette hypothèse par la simple connexité.

Comment appliquer la formule de Cauchy à une intégrale sur un cercle ?

Repérez les points où l'intégrande n'est pas défini et gardez ceux qui sont intérieurs au cercle. Écrivez l'intégrande comme $g(z)/(z-a)$, avec g holomorphe sur un disque contenant le cercle. L'intégrale vaut alors $2i\pi g(a)$. S'il y a plusieurs points intérieurs, décomposez d'abord en éléments simples.

Le principe des zéros isolés s'applique-t-il sur n'importe quel ouvert ?

Il faut un ouvert connexe, et le point d'accumulation des zéros doit appartenir à l'ouvert. Par exemple, $\sin(\pi/z)$ s'annule en tous les $1/n$ sur $\mathbb{C}$ privé de 0 sans être nulle, car 0 n'est pas dans l'ouvert. Sur un ouvert non connexe, une fonction peut être nulle sur une composante et pas sur l'autre.

Pour aller plus loin en L3

- Les énoncés : [exercices de maths en L3 sur fonctions holomorphes](#)
- À maîtriser avant : [Compacité et connexité](#)
- Chapitre précédent : [Équations différentielles et théorème de Cauchy-Lipschitz](#)
- Chapitre suivant : [Singularités et théorème des résidus](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)