

## Fonctions holomorphes

### Corrigé de l'exercice 1 : Conditions de Cauchy-Riemann

- On lit directement : pour  $f_1$ ,  $P = x^2 - y^2$  et  $Q = 2xy$  ; pour  $f_2$ ,  $P = x$  et  $Q = -y$  ; pour  $f_3$ ,  $P = x^2 + y^2$  et  $Q = 0$  ; pour  $f_4$ ,  $P = x^2$  et  $Q = y^2$ .  
**Les quatre fonctions sont polynomiales en  $(x,y)$ , donc de classe  $C^1$  et différentiables partout.**
- Pour  $f_1$  :  $P_x = 2x = Q_y$  et  $P_y = -2y = -Q_x$ . Les conditions sont vraies partout. Pour  $f_2$  :  $P_x = 1$  et  $Q_y = -1$ , donc la première condition n'est jamais vraie. Pour  $f_3$  :  $P_x = 2x$ ,  $Q_y = 0$ ,  $P_y = 2y$ ,  $Q_x = 0$ . Les conditions donnent  $x = 0$  et  $y = 0$ . Enfin, pour  $f_4$  :  $P_x = 2x$ ,  $Q_y = 2y$ ,  $P_y = 0 = -Q_x$ . La seule condition est  $x = y$ . **Ensembles :  $\mathbb{C}$  pour  $f_1$ ,  $\emptyset$  pour  $f_2$ ,  $\{0\}$  pour  $f_3$ , la droite  $y = x$  pour  $f_4$ .**
- Les fonctions sont différentiables. D'après le théorème de Cauchy-Riemann, elles sont donc  $\mathbb{C}$ -dérivables exactement aux points trouvés, avec  $f' = P_x + iQ_x$ . Ainsi  $f'_1(z) = 2x + 2iy = 2z$  : en fait  $f'_1(z) = z^2$ . Ensuite,  $f'_3(0) = 0$ . Enfin, en  $a = x_0(1+i)$ ,  $f'_4(a) = 2x_0$ .  $f'_1(z) = 2z$  sur  $\mathbb{C}$  ;  $f'_3(0) = 0$  ;  $f'_4(x_0 + ix_0) = 2x_0$  ;  $f_2$  n'est dérivable nulle part.
- Être holomorphe sur un ouvert  $V$  exige la  $\mathbb{C}$ -dérivabilité en tout point de  $V$ . Or  $\{0\}$  et la droite  $y = x$  sont d'intérieur vide. **Seule  $f_1$  est holomorphe sur un ouvert non vide (sur  $\mathbb{C}$  tout entier).**

**Point de méthode :** la  $\mathbb{C}$ -dérivabilité en un point isolé, ou le long d'une droite, ne suffit jamais pour être holomorphe. Il faut un ouvert.

## Corrigé de l'exercice 2 : Fonction harmonique conjuguée

---

1. On a  $u_x = 3x^2 - 3y^2 + 2$ , donc  $u_{xx} = 6x$ . De plus,  $u_y = -6xy$ , donc  $u_{yy} = -6x$ . Ainsi  $\Delta u = 6x - 6x = 0$  :  $u$  est harmonique.
2. On cherche  $v$  avec  $v_y = u_x$  et  $v_x = -u_y$ . La première condition donne  $v_y = 3x^2 - 3y^2 + 2$ . En intégrant en  $y$ , on obtient  $v(x,y) = 3x^2 y - y^3 + 2y + \varphi(x)$ . Ensuite,  $v_x = 6xy + \varphi'(x)$  doit valoir  $-u_y = 6xy$ . Donc  $\varphi' = 0$  et  $\varphi$  est constante. Enfin,  $v(0,0) = 0$  impose  $\varphi = 0$ . Réciproquement,  $u + iv$  est de classe  $C^1$  et vérifie Cauchy-Riemann, donc elle est holomorphe.  $v(x,y) = 3x^2 y - y^3 + 2y$ .
3. Développons  $z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$ . Ainsi  $\operatorname{Re}(z^3) = x^3 - 3xy^2$  et  $\operatorname{Im}(z^3) = 3x^2y - y^3$ . Par conséquent,  $u + iv = z^3 + 2z$ .  
 $f(z) = z^3 + 2z$ .
4. Supposons que  $x^2 + y^2 = \operatorname{Re} g$  sur un ouvert  $V$ , avec  $g$  holomorphe. D'après le cours,  $g$  est de classe  $C^\infty$  et sa partie réelle est harmonique. Or  $\Delta(x^2 + y^2) = 2 + 2 = 4 \neq 0$ . C'est absurde :  $x^2 + y^2$  n'est partie réelle d'aucune fonction holomorphe.

## Corrigé de l'exercice 3 : Séries entières et fonctions analytiques

---

1. Pour  $\sum n^2 z^n$ , le rapport  $\frac{(n+1)^2}{n^2}$  tend vers 1. D'après la règle de d'Alembert, le rayon vaut 1. Ensuite,  $\sum 2^n z^{2n} = \sum_{n \geq 0} (2z^2)^n$  est géométrique. Elle converge si et seulement si  $|2z^2| < 1$ , c'est-à-dire  $|z| < 1/\sqrt{2}$ . Rayons : 1 et  $1/\sqrt{2}$ .
2. On écrit  $1 - z = (1-a) - (z-a) = (1-a)\left(1 - \frac{z-a}{1-a}\right)$ . Pour  $|z-a| < |1-a|$ , la série géométrique donne

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z-a}{1-a}\right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}.$$

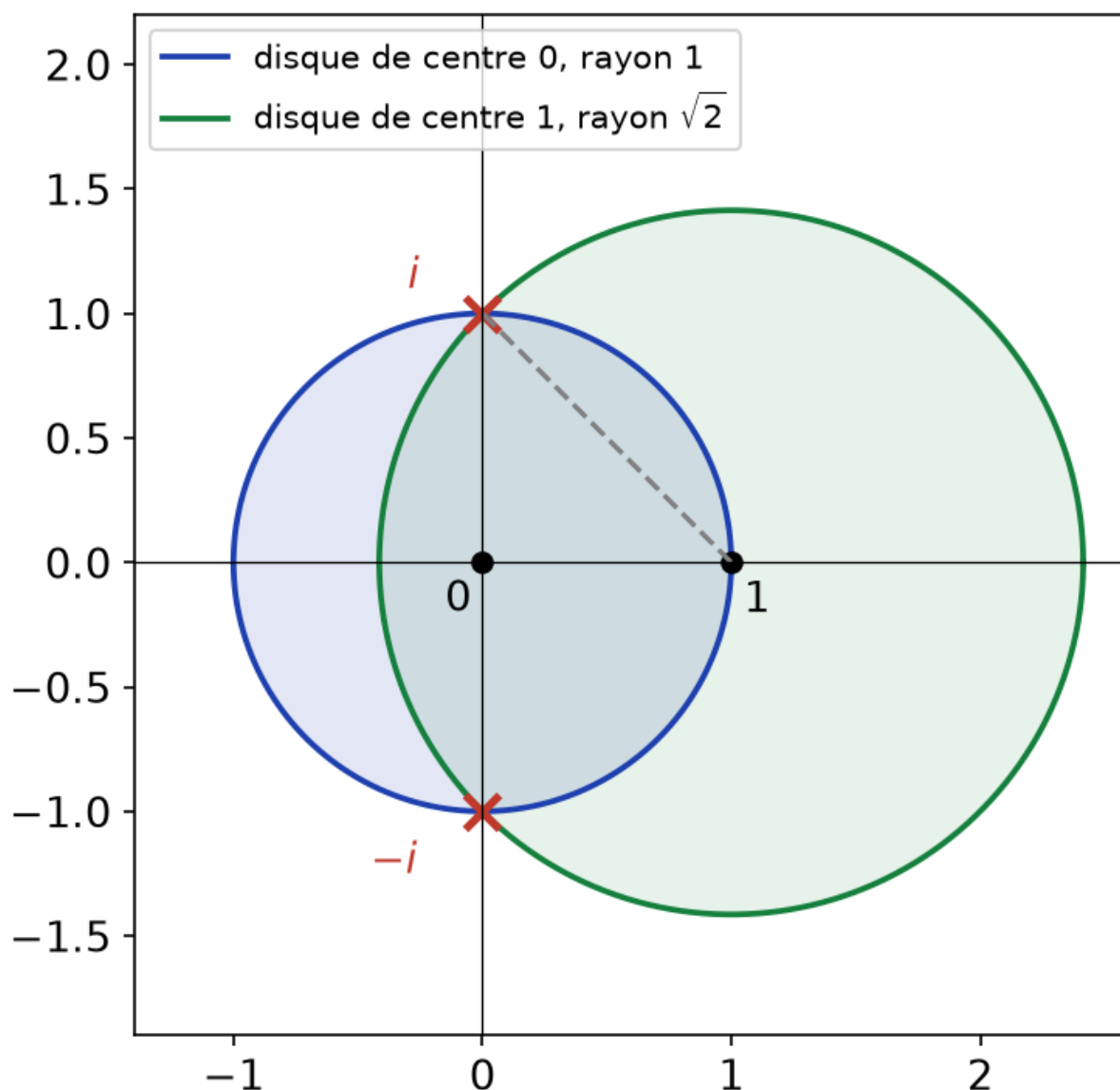
Le rayon est exactement  $|1 - a|$ , car la série géométrique diverge dès que sa raison est de module au moins 1. Ainsi, autour de chaque point  $a \neq 1$ , la fonction est somme d'une série entière sur  $D(a, |1-a|) \subset \mathbb{C} \setminus \{1\}$ . **La fonction  $z \mapsto \frac{1}{1-z}$  est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ , avec un rayon  $|1 - a|$  en  $a$ .**

3. Pour  $|z| < 1$ , on a  $|-z^2| < 1$ , donc  $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^{2n}$ . Cette série diverge pour  $|z| \geq 1$ , car son terme général ne tend pas vers 0. **Rayon : 1.**

4. La fonction  $g$  est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ . La distance de 1 à  $\pm i$  vaut  $\sqrt{2}$ . Donc  $D(1, \sqrt{2})$  est inclus dans l'ouvert d'holomorphic, et le rayon  $\rho$  de la série de Taylor en 1 vérifie  $\rho \geq \sqrt{2}$ . Supposons  $\rho > \sqrt{2}$ . La somme  $S$  serait holomorphe, donc continue, sur  $D(1, \rho)$ , qui contient  $i$ . De plus,  $S = g$  sur  $D(1, \sqrt{2})$ . Or  $|g(z)| \rightarrow +\infty$  quand  $z \rightarrow i$  dans ce disque, ce qui contredit la continuité de  $S$  en  $i$ . **Le rayon en 1 vaut  $\sqrt{2}$ .**

5. La série de Taylor réelle en 0 est la restriction à  $\mathbb{R}$  de la série complexe de la question 3. Son rayon est donc 1. L'obstruction ne se voit pas sur  $\mathbb{R}$  : elle vient des pôles complexes  $\pm i$ , situés à distance 1 de l'origine. **La divergence pour  $|x| > 1$  s'explique par les singularités  $\pm i$  du prolongement complexe.**

La figure ci-dessous représente les deux disques de convergence. Chacun est le plus grand disque centré au point considéré qui évite les pôles  $\pm i$ .



## Corrigé de l'exercice 4 : Logarithme complexe et puissances

- On écrit chaque nombre sous la forme  $re^{i\theta}$  avec  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ . D'abord,  $i = e^{i\pi/2}$ . Ensuite,  $-1 + i = \sqrt{2} e^{3i\pi/4}$ . Enfin,  $-\sqrt{3} - i = 2e^{-5i\pi/6}$ , car  $\cos(-5\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\sin(-5\pi/6) = -\frac{1}{2}$ .  $\text{Log}(i) = \frac{i\pi}{2}$ ,  $\text{Log}(-1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3i\pi}{4}$ ,  $\text{Log}(-\sqrt{3} - i) = \ln 2 - \frac{5i\pi}{6}$ .
- On calcule  $z_1 z_2 = (-1+i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i = 2e^{-i\pi/2}$ . Donc  $\text{Log}(z_1 z_2) = \ln 2 - \frac{i\pi}{2}$ . En revanche,  $\text{Log } z_1 + \text{Log } z_2 = \ln 2 + \frac{3i\pi}{2}$ . **Les deux valeurs diffèrent de  $2i\pi$  : Log ne transforme pas les produits en sommes.**

3. On a  $i^i = \exp\left(i \cdot \frac{i\pi}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ .  $i^i = e^{-\pi/2} \approx 0,208$ , **qui est réel.**
4. Comme  $-1 + i = e^{\text{Log}(-1+i)}$ , l'équation s'écrit  $e^z = e^{\text{Log}(-1+i)}$ . Le noyau de l'exponentielle est  $2i\pi\mathbb{Z}$ . **Les solutions sont**  $z = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
5. On pose  $w = e^{iz} \neq 0$ . L'équation  $\cos z = 2$  équivaut à  $w + w^{-1} = 4$ , soit  $w^2 - 4w + 1 = 0$ . Donc  $w = 2 \pm \sqrt{3}$ , deux réels strictement positifs. Ensuite,  $iz = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2ik\pi$ , d'où  $z = 2k\pi - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$ . Or  $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$ , donc  $\ln(2 - \sqrt{3}) = -\ln(2 + \sqrt{3})$ . **Les solutions sont**  $z = 2k\pi \pm i\ln(2 + \sqrt{3})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . **Le cosinus complexe n'est donc pas borné par 1 ; en fait, il n'est pas borné du tout, comme l'impose le théorème de Liouville.**

## Corrigé de l'exercice 5 : Intégrales le long de deux chemins

1. On paramètre  $\gamma_1(t) = (1+i)t$ ,  $t \in [0,1]$ , avec  $\gamma_1'(t) = 1+i$ . Ainsi

$$\int_{\gamma_1} z^2 dz = (1+i)^3 \int_0^1 t^2 dt = \frac{(1+i)^3}{3}. \text{ Or } (1+i)^2 = 2i, \text{ donc}$$

$$(1+i)^3 = 2i(1+i) = -2 + 2i. \text{ Pour } \gamma_2, \text{ le premier segment } t \rightarrow t \text{ donne}$$

$$\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}. \text{ Le second, } t \rightarrow 1 + it, \text{ donne}$$

$$\int_0^1 (1+it)^2 i dt = \left[ \frac{(1+it)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{(1+i)^3 - 1}{3} = \frac{-3+2i}{3}.$$

La somme vaut  $\frac{1-3+2i}{3} = \frac{-2+2i}{3}$ . Par ailleurs,  $z^3/3$  est une primitive holomorphe de  $z^2$  sur  $\mathbb{C}$ . Donc l'intégrale vaut  $\frac{(1+i)^3}{3} - 0$  sur tout chemin de 0 à  $1+i$ . **Les deux intégrales valent**  $\frac{-2+2i}{3}$ .

2. Sur  $\gamma_1$ ,  $\overline{\gamma_1(t)} \gamma_1'(t) = (1-i)t(1+i) = 2t$ , d'où  $\int_{\gamma_1} \bar{z} dz = 1$ . Sur  $\gamma_2$ , le premier segment donne  $\int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$ . Le second donne

$$\int_0^1 (1 - it) i dt = \int_0^1 (i + t) dt = i + \frac{1}{2}. \quad \int_{\gamma_1} \bar{z} dz = 1 \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_2} \bar{z} dz = 1 + i.$$

3. La fonction  $z^2$  possède une primitive holomorphe : son intégrale ne dépend que des extrémités. En revanche,  $\bar{z}$  n'est pas holomorphe (exercice 1). Elle n'a donc pas de primitive, et son intégrale dépend du chemin. **Le résultat dépend du chemin pour  $\bar{z}$ , et pas pour  $z^2$ .**
4. Le bord direct du triangle est  $\gamma_2$  suivi de  $\gamma_1$  parcouru en sens inverse. Son intégrale vaut donc  $(1 + i) - 1 = i$ . L'aire du triangle vaut  $\frac{1}{2}$ . **L'intégrale vaut  $i = 2i \times \text{Aire}$ .** Cette relation est générale : elle découle de la formule de Green-Riemann.

## Corrigé de l'exercice 6 : Intégrales sur un cercle et primitives

1. Avec  $z = re^{it}$ , on a  $dz = ire^{it} dt$ , donc  $\int_{C(0,r)} z^n dz = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt$ . Si  $n \neq -1$ , l'intégrale d'une exponentielle  $e^{ikt}$  avec  $k \neq 0$  sur une période est nulle. Si  $n = -1$ , l'intégrande vaut 1. **L'intégrale vaut 0 pour  $n \neq -1$ , et  $2i\pi$  pour  $n = -1$ .**
2. Si  $F$  était une primitive holomorphe de  $1/z$  sur  $\mathbb{C}^*$ , l'intégrale de  $1/z$  sur le chemin fermé  $C(0,1)$  serait nulle. Or elle vaut  $2i\pi$ . **Il n'existe pas de primitive de  $1/z$  sur  $\mathbb{C}^*$ .**
3. On développe :  $\frac{(z^2+1)^2}{z^3} = \frac{z^4 + 2z^2 + 1}{z^3} = z + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3}$ . D'après la question 1, seul le terme en  $1/z$  contribue. **L'intégrale vaut  $2 \times 2i\pi = 4i\pi$ .**
4. Le disque fermé  $\overline{D}(2,1)$  est contenu dans le demi-plan  $\operatorname{Re} z \geq 1$ , donc dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . Sur cet ouvert,  $\operatorname{Log}$  est une primitive holomorphe de  $1/z$ . Comme  $C(2,1)$  est un chemin fermé de cet ouvert,  $\int_{C(2,1)} \frac{dz}{z} = 0$ .

## Corrigé de l'exercice 7 : Majoration d'une intégrale curviligne

---

1. Pour  $|z| = R$ , l'inégalité triangulaire donne  $|z^2 + 4| \geq |z|^2 - 4 = R^2 - 4 > 0$ . Donc  $\left| \frac{1}{z^2 + 4} \right| \leq \frac{1}{R^2 - 4}$  sur le cercle, dont la longueur vaut  $2\pi R$ . L'inégalité de la longueur donne la majoration annoncée. Enfin,  $\frac{2\pi R}{R^2 - 4} \sim \frac{2\pi}{R}$ . **L'intégrale est majorée par  $\frac{2\pi R}{R^2 - 4}$  et tend vers 0.**
2. On a  $z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$ . On vérifie que  $\frac{1}{z - 2i} - \frac{1}{z + 2i} = \frac{4i}{z^2 + 4}$ . Donc  $\frac{1}{z^2 + 4} = \frac{1}{4i} \left( \frac{1}{z - 2i} - \frac{1}{z + 2i} \right)$ . Pour  $R > 2$ , les points  $\pm 2i$  sont intérieurs au cercle, et  $\int_{C(0,R)} \frac{dz}{z - a} = 2i\pi$  pour  $|a| < R$  (formule de Cauchy avec  $f = 1$ ). Ainsi l'intégrale vaut  $\frac{1}{4i}(2i\pi - 2i\pi)$ . **Elle est nulle pour tout  $R > 2$ , ce qui est cohérent avec la question 1.**
3. Pour  $z = Re^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$ , on a  $|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z} = e^{-R \sin t} \leq 1$ , car  $\sin t \geq 0$ . De plus,  $|z^2 + 1| \geq R^2 - 1$ . La longueur du demi-cercle vaut  $\pi R$ . Donc  $\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1}$ . **Ce majorant tend vers 0, donc l'intégrale aussi.**

**Point de méthode :** sur un grand cercle, minorez le dénominateur par l'inégalité triangulaire renversée  $|z^2 + c| \geq |z|^2 - |c|$ .

## Corrigé de l'exercice 8 : Applications de la formule de Cauchy

---

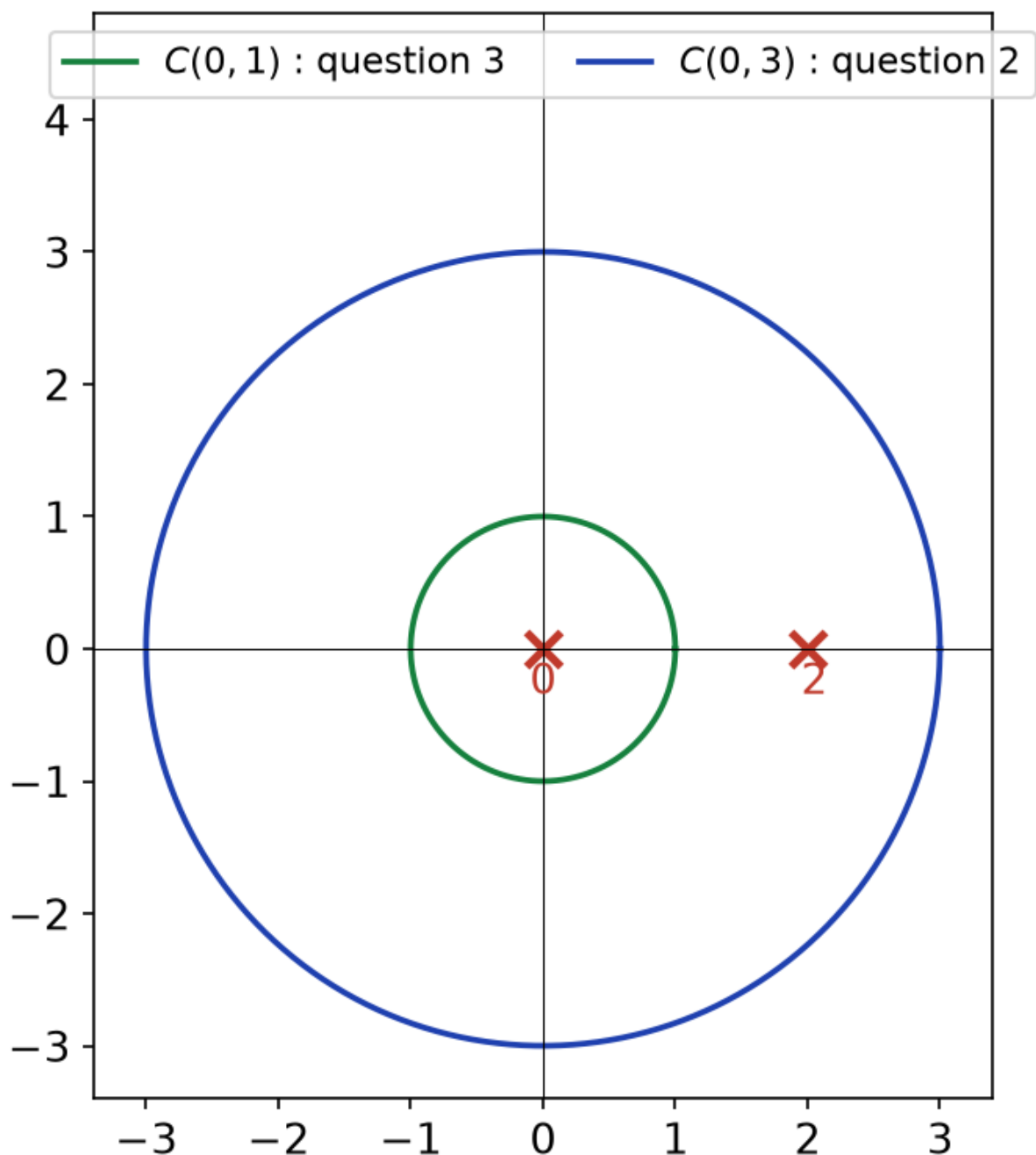
Dans chaque cas, on isole un facteur  $\frac{1}{z-a}$  et on vérifie que le reste est holomorphe sur un disque ouvert contenant le cercle d'intégration. Un point intérieur au cercle a pour indice 1. La figure suit la question 3.

1. La fonction  $\exp$  est entière, et  $|1| < 2$ . La formule de Cauchy sur  $C(0,2)$  donne  $I_1 = 2i\pi e^1$ .  $I_1 = 2i\pi e$ .

2. Les points 0 et 2 sont intérieurs à  $C(0,3)$ . On décompose :  $\frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z}\right)$ .

Ainsi  $I_2 = \frac{1}{2} \int_{C(0,3)} \frac{e^z}{z-2} dz - \frac{1}{2} \int_{C(0,3)} \frac{e^z}{z} dz$ . La formule de Cauchy donne  $2i\pi e^2$  et  $2i\pi e^0$ . Donc  $I_2 = i\pi e^2 - i\pi$ .  $I_2 = i\pi(e^2 - 1)$ .

3. Seul 0 est intérieur à  $C(0,1)$ . La fonction  $g(z) = \frac{e^z}{z-2}$  est holomorphe sur le disque  $D(0,2)$ , qui est étoilé et contient  $C(0,1)$ . La formule de Cauchy donne  $I_3 = 2i\pi g(0) = 2i\pi \cdot \frac{1}{-2}$ .  $I_3 = -i\pi$ .



4. On écrit  $\frac{1}{z^2+1} = \frac{g(z)}{z-i}$  avec  $g(z) = \frac{1}{z+i}$ . Le point  $-i$  est à distance 2 de  $i$ . Donc  $g$  est holomorphe sur  $D(i, 2)$ , qui contient  $C(i, 1)$ , et  $i$  est intérieur à ce cercle. Ainsi  $I_4 = 2i\pi g(i) = \frac{2i\pi}{2i}$ .  $I_4 = \pi$ .

## Corrigé de l'exercice 9 : Formule de Cauchy pour les dérivées

On utilise  $\int_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2i\pi}{n!} f^{(n)}(a)$ , valable pour  $f$  holomorphe sur un ouvert contenant  $\overline{D}(z_0, r)$  et  $|a - z_0| < r$ .

1. On prend  $f(z) = e^{2z}$ , entière,  $a = 0$  et  $n = 3$ . Alors  $f^{(3)}(0) = 8$ . Donc l'intégrale vaut  $\frac{2i\pi}{3!} \cdot 8 = \frac{16i\pi}{6}$ .  $\int_{C(0,1)} \frac{e^{2z}}{z^4} dz = \frac{8i\pi}{3}$ .

2. On prend  $f = \sin$ ,  $a = 0$  et  $n = 1$ . Donc l'intégrale vaut  $2i\pi \sin'(0) = 2i\pi \cos 0$ .  $\int_{C(0,1)} \frac{\sin z}{z^2} dz = 2i\pi$ .

3. On prend  $f(z) = z^3$ ,  $a = 1$ ,  $n = 1$ ; le point 1 est intérieur à  $C(0, 2)$ . Comme  $f'(1) = 3$ , l'intégrale vaut  $2i\pi \cdot 3$ .  $\int_{C(0,2)} \frac{z^3}{(z-1)^2} dz = 6i\pi$ .

4. Avec  $f = \exp$ , on a  $f^{(n)}(0) = 1$ , donc  $\int_{C(0,1)} \frac{e^z}{z^{n+1}} dz = \frac{2i\pi}{n!}$ . Paramétrons ensuite par  $z = e^{it}$ :  $dz = ie^{it} dt$  et  $z^{-(n+1)} = e^{-i(n+1)t}$ . L'intégrale devient  $i \int_0^{2\pi} e^{e^{it}} e^{-int} dt$ . Or  $e^{e^{it}} = e^{\cos t} e^{i \sin t}$ . Donc

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} e^{i(\sin t - nt)} dt = \frac{2\pi}{n!}.$$

En prenant la partie réelle,  $\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t - nt) dt = \frac{2\pi}{n!}$ , et la partie imaginaire donne une intégrale nulle.

## **Corrigé de l'exercice 10 : Intégrales trigonométriques par la formule de Cauchy**

---

1. Posons  $z = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Alors  $dz = iz dt$  et  $\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ . Ainsi  $5 + 4\cos t = 5 + 2z + \frac{2}{z} = \frac{2z^2 + 5z + 2}{z}$ . Par conséquent,

$$\frac{dt}{5 + 4\cos t} = \frac{z}{2z^2 + 5z + 2} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{dz}{i(2z^2 + 5z + 2)}.$$

**Par définition de l'intégrale le long de  $C(0,1)$ , on obtient l'égalité demandée.**

2. On factorise  $2z^2 + 5z + 2 = 2\left(z + \frac{1}{2}\right)(z + 2)$ . Seule la racine  $-\frac{1}{2}$  est intérieure au cercle unité. On écrit l'intégrande sous la forme  $\frac{g(z)}{z + 1/2}$ , avec  $g(z) = \frac{1}{2i(z+2)}$ . Cette fonction est holomorphe sur le disque  $D(0,2)$ , qui contient  $C(0,1)$ . La formule de Cauchy donne donc

$$2i\pi g\left(-\frac{1}{2}\right) = 2i\pi \cdot \frac{1}{2i \cdot \frac{3}{2}} = \frac{2i\pi}{3i} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 4\cos t} = \frac{2\pi}{3}.$$

3. De même,  $a + b\cos t = \frac{bz^2 + 2az + b}{2z}$ , donc l'intégrale vaut  $\int_{C(0,1)} \frac{2 dz}{i(bz^2 + 2az + b)}$ . Le trinôme a pour racines réelles  $z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$  et  $z_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ . Leur produit vaut 1 et  $z_2 < -\frac{a}{b} < -1$ . Donc  $|z_1| < 1 < |z_2|$ . La formule de Cauchy appliquée en  $z_1$  à  $g(z) = \frac{2}{ib(z - z_2)}$ , holomorphe sur  $D(0, |z_2|)$ , donne

$$2i\pi \cdot \frac{2}{ib(z_1 - z_2)} = \frac{4\pi}{b} \cdot \frac{b}{2\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

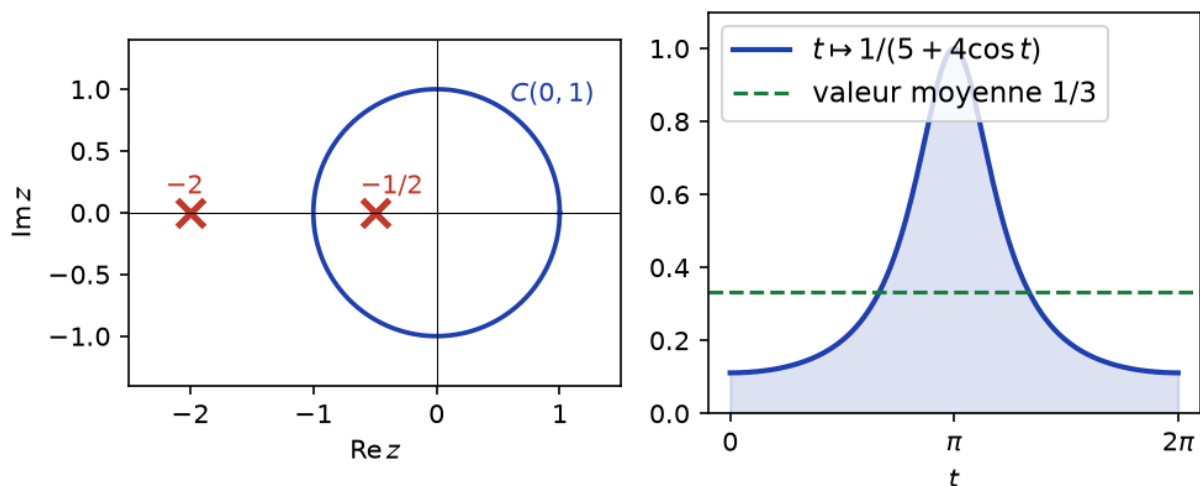
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \text{ ce qui redonne } \frac{2\pi}{3} \text{ pour } a = 5, b = 4.$$

4. La formule de la moyenne pour  $\exp$  en  $0$ , avec  $r = 1$ , donne  $1 = e^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{e^{it}} dt$ .

Or  $e^{e^{it}} = e^{\cos t} (\cos(\sin t) + i \sin(\sin t))$ . En séparant parties réelle et imaginaire :

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) dt = 2\pi \text{ et } \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \sin(\sin t) dt = 0.$$

La figure montre, à gauche, les deux racines du trinôme par rapport au cercle unité. À droite, elle montre la fonction intégrée : sa valeur moyenne sur  $[0, 2\pi]$  vaut bien  $\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3}$ .



## Corrigé de l'exercice 11 : Module constant et rigidité

- Si  $Q$  est constante, alors  $Q_x = Q_y = 0$ . Par Cauchy-Riemann,  $P_x = Q_y = 0$  et  $P_y = -Q_x = 0$ . Donc  $f' = P_x + iQ_x = 0$  sur  $U$ . Comme  $U$  est connexe,  $f$  est constante.
- Si  $f(U) \subset \mathbb{R}$ , alors  $Q = 0$  est constante. D'après la question 1,  $f$  est constante.
- Supposons  $P^2 + Q^2 = c$ . Si  $c = 0$ , alors  $f = 0$ . Sinon, en dérivant, on obtient  $PP_x + QQ_x = 0$  et  $PP_y + QQ_y = 0$ . On remplace  $Q_x = -P_y$  et  $Q_y = P_x$  : cela donne  $PP_x - QP_y = 0$  et  $QP_x + PP_y = 0$ . Ce système en  $(P_x, P_y)$  a pour déterminant  $P^2 + Q^2 = c \neq 0$ . Donc  $P_x = P_y = 0$ , puis  $Q_x = Q_y = 0$  et

$f' = 0$ . Ainsi  $f$  est constante.

4. Si  $f$  et  $\bar{f}$  sont holomorphes, alors  $f + \bar{f} = 2P$  est holomorphe et à valeurs réelles. D'après la question 2,  $P$  est constante. Ensuite, le cours (partie réelle constante) donne la conclusion. **La fonction  $f$  est constante.**
5. La fonction  $\varphi(x,y) = (\cos x, \sin x)$  est  $C^\infty$ , non constante, et de norme 1. **Pour les applications de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , un module constant n'impose rien ; seule l'holomorphic, via Cauchy-Riemann, crée cette rigidité.** On vérifie d'ailleurs que  $\varphi$  ne satisfait pas Cauchy-Riemann :  $P_x = -\sin x$  alors que  $Q_y = 0$ .

## Corrigé de l'exercice 12 : Déterminations du logarithme

---

1. Posons  $w = -iz$ . Si  $z = re^{i\theta}$  avec  $\theta \in ]-\pi/2, 3\pi/2[$ , alors  $w = re^{i(\theta - \pi/2)}$  avec  $\theta - \pi/2 \in ]-\pi, \pi[$ . De plus,  $z \in i\mathbb{R}_-$  si et seulement si  $w \in \mathbb{R}_-$ . Par conséquent, pour  $z \in U$ ,  $L(z) = \text{Log}(-iz) + \frac{i\pi}{2}$ . Cette expression est continue (et même holomorphe), comme composée. Enfin,  $\exp(L(z)) = (-iz) \cdot e^{i\pi/2} = (-iz) \cdot i = z$ . Pour les valeurs :  $-1 = e^{i\pi}$  avec  $\pi \in ]-\pi/2, 3\pi/2[$ , et  $-1 - i = \sqrt{2} e^{5\pi/4}$ .  **$L$  est une détermination continue ;  $L(-1) = i\pi$  et  $L(-1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{5i\pi}{4}$ .**
2. L'ouvert  $U \setminus \mathbb{R}_-$  est formé de deux morceaux. Le premier correspond à  $\theta \in ]-\pi/2, \pi[$  ; là, les deux arguments coïncident et  $L = \text{Log}$ . Le second est le quart de plan ouvert  $\text{Re } z < 0$ ,  $\text{Im } z < 0$ , où  $\theta \in ]\pi, 3\pi/2[$  : l'argument principal vaut alors  $\theta - 2\pi$ . **Donc  $L = \text{Log}$  hors du troisième quadrant, et  $L = \text{Log} + 2i\pi$  dans le troisième quadrant ouvert.** Cela illustre la différence d'une constante  $2ik\pi$  sur chaque composante connexe.
3. Supposons que  $L$  soit une détermination continue sur  $\mathbb{C}^*$ . La fonction  $\psi(t) = \frac{1}{2i\pi}(L(e^{it}) - it)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Elle est à valeurs entières, car  $\exp(L(e^{it})) = e^{it}$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle est constante. Or  $\psi(2\pi) = \frac{L(1) - 2i\pi}{2i\pi} = \psi(0) - 1$ . **C'est une contradiction : aucune détermination continue n'existe sur  $\mathbb{C}^*$ .**
4. La fonction  $f'/f$  est holomorphe sur  $V$ , car  $f$  ne s'annule pas. D'après le théorème de Cauchy dans un ouvert étoilé, elle admet une primitive  $G$ . Alors  $(fe^{-G})' = f'e^{-G} - fG'e^{-G} = 0$ . Un ouvert étoilé est connexe par arcs, donc  $fe^{-G}$  est une constante  $c$ , non nulle car  $f$  ne s'annule pas. On choisit  $\beta$  tel que  $e^\beta = c$  (surjectivité de  $\exp$  sur  $\mathbb{C}^*$ ). **La fonction  $g = G + \beta$  est holomorphe et vérifie  $e^g = e^G c = f$ .**

5. On pose  $h = e^{g/2}$ , holomorphe sur  $V$ . Alors  $h^2 = e^g = f$ .

**Point de méthode :** pour construire un logarithme de  $f$ , intégrez la dérivée logarithmique  $f'/f$  ; c'est ici que sert l'hypothèse « ouvert étoilé ».

## Corrigé de l'exercice 13 : Zéros isolés et suites de valeurs

- La fonction  $z \rightarrow z^2$  convient. Si  $f$  convient, alors  $f - z^2$  est entière et s'annule en tous les  $1/n$ . Cette suite converge vers  $0 \in \mathbb{C}$ , et  $\mathbb{C}$  est connexe. D'après le principe des zéros isolés,  $f - z^2 = 0$ . **La seule solution est  $f(z) = z^2$ .**
- Supposons qu'une telle  $f$  existe. Pour  $n = 2k$ , on a  $f(1/(2k)) = 1/(2k)$ . Donc  $f$  et l'identité coïncident sur une suite qui tend vers  $0 \in D(0,1)$ . Ainsi  $f(z) = z$  sur le disque, qui est connexe. Or, pour  $n = 2k + 1$ , on obtient  $f(1/(2k+1)) = -1/(2k+1) \neq 1/(2k+1)$ . **C'est impossible : une telle  $f$  n'existe pas.**
- On remarque que  $\frac{1}{n+1} = \frac{1/n}{1+1/n}$ . La fonction  $g(z) = \frac{z}{1+z}$  est holomorphe sur  $D(0,1)$ , car son pôle  $-1$  n'est pas dans ce disque, et elle vérifie  $g(1/n) = \frac{1}{n+1}$ . Enfin, deux solutions coïncident sur la suite  $(1/n)$ , qui s'accumule en  $0 \in D(0,1)$ . **Oui :  $f(z) = \frac{z}{1+z}$ , et c'est l'unique solution.**
- Les zéros  $1/n$  de  $f$  s'accumulent en  $0$ , qui appartient à l'ouvert connexe  $\mathbb{C}$ . Ce zéro ne serait pas isolé. Donc  $f$  est identiquement nulle. En revanche,  $\sin(\pi/z)$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$ , et le point d'accumulation  $0$  n'appartient pas à  $\mathbb{C}^*$ . **Le principe exige un point d'accumulation dans l'ouvert ; pour  $\sin(\pi/z)$  sur  $\mathbb{C}^*$ , il ne s'applique pas.**
- Pour tout  $z$ ,  $\sin z - z = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots$ . Le premier coefficient non nul est celui de  $z^3$ . **Le zéro  $0$  est d'ordre 3, et  $g(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k z^{2k-2}}{(2k+1)!}$ , avec  $g(0) = -\frac{1}{6} \neq 0$ .**

## Corrigé de l'exercice 14 : Prolongement analytique d'identités

---

1. Les fonctions  $z \rightarrow \sin^2 z + \cos^2 z - 1$  et  $z \rightarrow \cos(2z) - 1 + 2\sin^2 z$  sont entières. Elles sont nulles sur  $\mathbb{R}$ , par les formules réelles. Or  $\mathbb{R}$  admet des points d'accumulation dans  $\mathbb{C}$ , qui est connexe. **Par prolongement analytique, les deux identités sont vraies sur  $\mathbb{C}$ .**
2. Fixons  $y \in \mathbb{R}$ . La fonction  $z \rightarrow \exp(z+y) - \exp(z)\exp(y)$  est entière et nulle sur  $\mathbb{R}$ , donc nulle sur  $\mathbb{C}$ . Fixons ensuite  $z \in \mathbb{C}$ . La fonction  $w \rightarrow \exp(z+w) - \exp(z)\exp(w)$  est entière. D'après l'étape précédente, elle est nulle sur  $\mathbb{R}$ , donc sur  $\mathbb{C}$ . **Ainsi  $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$  pour tous  $z, w \in \mathbb{C}$ .**
3. L'ensemble  $[0,1]$  est infini et tous ses points sont des points d'accumulation, situés dans  $U$ . Comme  $U$  est connexe, le principe des zéros isolés s'applique. **Donc  $f = 0$  sur  $U$ .**
4. La fonction  $\varphi$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et nulle sur  $[-1, 0]$ . Pourtant, elle n'est pas nulle, puisque  $\varphi(1) = e^{-1}$ . **Une fonction  $C^\infty$  réelle n'est pas déterminée par ses valeurs sur un segment : c'est la rigidité propre aux fonctions holomorphes.** En effet, toutes les dérivées de  $\varphi$  en 0 sont nulles, mais  $\varphi$  n'est pas somme de sa série de Taylor.
5. L'ouvert  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  est connexe (il est étoilé par rapport à 1). Deux prolongements holomorphes de  $\ln$  coïncident sur  $]0, +\infty[$ , qui s'accumule dans l'ouvert. Ils sont donc égaux. De plus,  $\text{Log}(x) = \ln x$  pour  $x > 0$ . **Le seul prolongement est la détermination principale  $\text{Log}$ .**

## Corrigé de l'exercice 15 : Fonctions entières à croissance polynomiale

---

1. La fonction  $f$  est entière, donc  $f(z) = \sum a_n z^n$  sur  $\mathbb{C}$ . Sur  $C(0, r)$ , on a  $|f| \leq A + Br^k$ . Les inégalités de Cauchy donnent  $|a_n| \leq \frac{A + Br^k}{r^n}$  pour tout  $r > 0$ . Si  $n > k$ , ce majorant tend vers 0 quand  $r \rightarrow +\infty$ . Donc  $a_n = 0$  pour  $n > k$ . **Ainsi  $f$  est un polynôme de degré au plus  $k$ .**
2. D'après la question 1 (avec  $A = 0$ ,  $B = 1$ ,  $k = 2$ ),  $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ . D'abord,  $|f(0)| \leq 0$ , donc  $a_0 = 0$ . Ensuite, pour  $z \neq 0$ ,  $|a_1 + a_2 z| \leq |z|$ ; en faisant tendre  $z$  vers 0, on obtient  $a_1 = 0$ . Enfin,  $|a_2 z^2| \leq |z|^2$  impose  $|a_2| \leq 1$ .

Réciproquement, ces fonctions conviennent. **Les solutions sont les**  $f(z) = az^2$  **avec**  $|a| \leq 1$ .

3. La fonction  $f$  est continue sur le carré compact  $K = [0,1] + i[0,1]$ , donc bornée par un réel  $M$ . Tout  $z \in \mathbb{C}$  s'écrit  $z = z_0 + m + ni$  avec  $z_0 \in K$  et  $m, n \in \mathbb{Z}$  (prendre les parties entières). Par périodicité,  $f(z) = f(z_0)$ , donc  $|f(z)| \leq M$ . **D'après le théorème de Liouville,  $f$  est constante.**

## **Corrigé de l'exercice 16 : Variantes du théorème de Liouville**

---

1. La fonction  $e^f$  est entière et  $|e^f| = e^{\operatorname{Re} f} \leq 1$ . D'après Liouville,  $e^f$  est constante. En dérivant,  $f'e^f = 0$ . Comme l'exponentielle ne s'annule pas,  $f' = 0$ . **Donc  $f$  est constante.**
2. On a  $|e^{if}| = e^{\operatorname{Re}(if)} = e^{-\operatorname{Im} f} \leq 1$ . La fonction  $e^{if}$  est donc entière et bornée, puis constante. On en déduit  $if'e^{if} = 0$ , puis  $f' = 0$ . **La fonction  $f$  est constante.**
3. La fonction  $f - 1$  ne s'annule pas, donc  $g = \frac{1}{f-1}$  est entière. De plus,  $|g| \leq 2$ . D'après Liouville,  $g$  est une constante non nulle  $c$ . **Ainsi  $f = 1 + \frac{1}{c}$  est constante.**
4. La fonction  $g(z) = f(z)e^{-z}$  est entière, et  $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|e^z|} \leq 1$ . D'après Liouville,  $g$  est une constante  $c$ , avec  $|c| \leq 1$ . **Donc  $f(z) = ce^z$  avec  $|c| \leq 1$ .**

**Point de méthode :** pour appliquer Liouville à une fonction qui n'est pas bornée, composez-la avec une fonction qui transforme l'hypothèse en borne :  $e^f$ ,  $e^{if}$ ,  $\frac{1}{f-a}$ , ou divisez par une fonction de référence.

## **Corrigé de l'exercice 17 : Théorème de d'Alembert-Gauss par Liouville**

---

1. Soit  $|z| \geq R$ . Comme  $|z| \geq 1$ , on a  $|z|^k \leq |z|^{n-1}$  pour  $0 \leq k \leq n-1$ . Par conséquent,

$$|a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k \leq S|z|^{n-1} \leq \frac{|z|}{2} |z|^{n-1},$$

car  $|z| \geq 2S$ . L'inégalité triangulaire donne alors  $|P(z)| \geq |z|^n - \frac{|z|^n}{2}$ . Ainsi  $|P(z)| \geq \frac{|z|^n}{2}$  pour  $|z| \geq R$ .

2. Si  $P$  ne s'annule pas,  $1/P$  est un quotient de fonctions entières sans pôle, donc entière. Sur le disque compact  $\overline{D}(0, R)$ , elle est continue, donc bornée. En dehors,  $\left| \frac{1}{P(z)} \right| \leq \frac{2}{|z|^n} \leq \frac{2}{R^n}$ . **La fonction  $1/P$  est entière et bornée sur  $\mathbb{C}$ .**

3. D'après Liouville,  $1/P$  est constante, donc  $P$  aussi. Or  $P$  est de degré  $n \geq 1$ . **C'est absurde :  $P$  admet une racine dans  $\mathbb{C}$ .**

4. On raisonne par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$ ,  $P(z) = z - (-a_0)$ . Supposons le résultat vrai au rang  $n-1$ . Soit  $z_1$  une racine de  $P$ . La division euclidienne par  $z - z_1$  donne  $P(z) = (z - z_1)Q(z)$ , avec  $Q$  unitaire de degré  $n-1$ . On applique l'hypothèse à  $Q$ .  
**Donc  $P(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k)$ .**

5. Si les  $a_k$  sont réels, alors  $\overline{P(w)} = P(\overline{w})$ . Donc  $P(w) = 0$  entraîne  $P(\overline{w}) = 0$ . Plus précisément,  $\prod (z - z_k) = P(z) = \overline{P(\overline{z})} = \prod (z - \overline{z_k})$ . Par unicité de la factorisation, les racines non réelles vont par paires conjuguées, avec la même multiplicité. Elles sont donc en nombre pair. **Si  $n$  est impair, il reste au moins une racine réelle.**

## Corrigé de l'exercice 18 : Principe du maximum

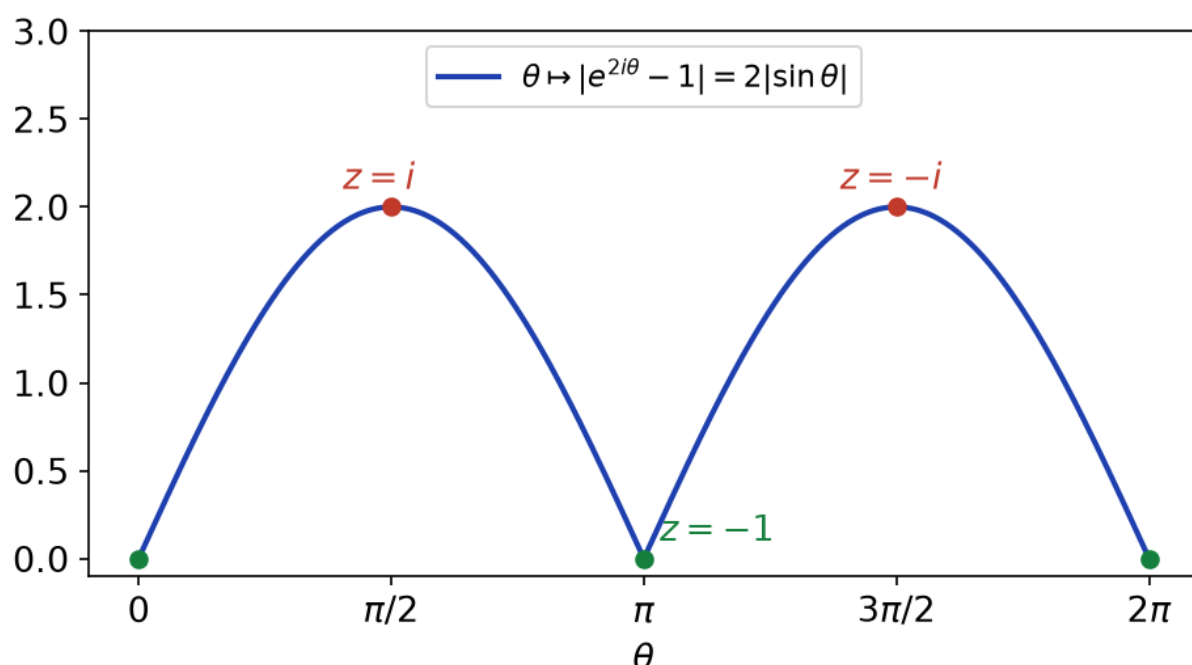
---

1. La fonction  $z^2 - 1$  est un polynôme non constant. D'après le principe du maximum, le maximum de son module sur le disque fermé est atteint sur le cercle. Pour  $z = e^{i\theta}$ , on a  $e^{2i\theta} - 1 = e^{i\theta}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = 2ie^{i\theta}\sin\theta$ . Donc  $|z^2 - 1| = 2|\sin\theta|$ , maximal pour  $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ . **Le maximum vaut 2, atteint en  $z = i$  et  $z = -i$  uniquement.**
2. La fonction  $|z^2 - \frac{1}{4}|$  s'annule en  $z = \pm\frac{1}{2}$ , intérieurs au disque : son minimum sur  $\overline{D}(0,1)$  vaut 0. Sur le cercle,  $w = z^2$  décrit le cercle unité, et  $|w - \frac{1}{4}| \geq 1 - \frac{1}{4}$ , avec égalité pour

$w = 1$ . Le minimum vaut 0 sur le disque,  $\frac{3}{4}$  sur le cercle (en  $z = \pm 1$ ). Le principe du minimum exige que la fonction ne s'annule pas : il ne s'applique pas ici.

3. On a  $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ , et  $\operatorname{Re} z$  varie dans  $[-1, 1]$  sur le disque fermé. Le maximum vaut  $e$ , atteint en  $z = 1$  ; le minimum vaut  $e^{-1}$ , atteint en  $z = -1$ . Les deux sont atteints sur le bord, car  $\exp$  ne s'annule pas.
4. D'abord,  $f$  ne s'annule pas sur le compact  $\overline{D}(0,1)$ . Par continuité, elle ne s'annule pas sur un ouvert  $V$  contenant ce disque. Le principe du maximum appliqué à  $f$  donne  $|f| \leq 1$  sur  $\overline{D}(0,1)$ . Ensuite,  $1/f$  est holomorphe sur  $V$  et de module 1 sur le cercle. Donc  $|1/f| \leq 1$ , soit  $|f| \geq 1$ . Ainsi  $|f| = 1$  sur le disque ouvert, qui est connexe. **D'après l'exercice 11,  $f$  est constante sur  $D(0,1)$ , puis sur le disque fermé par continuité.**
5. La fonction  $f(z) = z$  est holomorphe, de module 1 sur le cercle, et non constante. Elle s'annule en 0, ce qui empêche d'appliquer le principe à  $1/f$ .

La figure ci-dessous trace  $|z^2 - 1|$  sur le cercle unité en fonction de l'angle  $\theta$ . On y lit le maximum 2 en  $\pm i$  et les zéros en  $\pm 1$ .



## Corrigé de l'exercice 19 : Lemme de Schwarz

---

1. La fonction  $f$  est somme de sa série de Taylor  $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$  sur  $\mathbb{D}$ , car  $a_0 = f(0) = 0$ .  
Donc  $g(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^{n-1}$  pour  $z \in \mathbb{D}$ , y compris en  $0$ , où l'on trouve  $a_1 = f'(0)$ .  
Cette série a le même rayon, au moins  $1$ . **La fonction  $g$  est holomorphe sur  $\mathbb{D}$ .**
2. Soit  $r \in ]0,1[$ . Pour  $|z| = r$ , on a  $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{r} < \frac{1}{r}$ . La fonction  $g$  est holomorphe sur un voisinage du disque fermé  $\overline{D}(0,r)$ . D'après le principe du maximum,  $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$  pour  $|z| \leq r$ . Fixons alors  $z \in \mathbb{D}$ . Pour tout  $r \in ]|z|,1[$ , on a  $|g(z)| \leq 1/r$ . En faisant tendre  $r$  vers  $1$ , **on obtient  $|g(z)| \leq 1$  sur  $\mathbb{D}$ .**
3. Pour  $z \neq 0$ ,  $|f(z)| = |z| |g(z)| \leq |z|$ , et l'inégalité est triviale en  $0$ . De plus,  $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$ . **Donc  $|f(z)| \leq |z|$  sur  $\mathbb{D}$  et  $|f'(0)| \leq 1$ .**
4. Dans les deux cas,  $|g|$  atteint la valeur  $1$  en un point de  $\mathbb{D}$  (en  $z_0$ , ou en  $0$ ). Comme  $|g| \leq 1$ , c'est un maximum intérieur. D'après le principe du maximum sur  $\mathbb{D}$  connexe,  $g$  est une constante  $\lambda$ , et  $|\lambda| = 1$ . **Ainsi  $f(z) = \lambda z$  avec  $|\lambda| = 1$ .**
5. Si  $f(1/2) = 1/2$ , alors  $|f(z_0)| = |z_0|$  pour  $z_0 = 1/2$ . D'après la question 4,  $f(z) = \lambda z$ , puis  $\lambda/2 = 1/2$ , donc  $\lambda = 1$ . Réciproquement, l'identité convient. **La seule solution est  $f(z) = z$ .**

## Corrigé de l'exercice 20 : Problème : intégrale de Gauss par le théorème de Cauchy

---

1. La fonction  $f$  est entière, et  $\mathbb{C}$  est un ouvert étoilé. D'après le théorème de Cauchy, l'intégrale de  $f$  sur tout chemin fermé est nulle. **Donc  $\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$ .**
2. On a  $(R + it)^2 = R^2 - t^2 + 2iRt$ , donc  $|f(R + it)| = e^{-(R^2 - t^2)} \leq e^{b^2 - R^2}$  pour  $t \in [0, b]$ . De même,  $(-R + it)^2 = R^2 - t^2 - 2iRt$  donne la même majoration sur  $\gamma_4$ . Chaque côté vertical est de longueur  $b$ . L'inégalité de la longueur donne

$\left| \int_{\gamma_2} f \right| \leq b e^{b^2 - R^2}$ , et de même pour  $\gamma_4$ . **Ces deux intégrales tendent vers 0**  
**quand  $R \rightarrow +\infty$ .**

3. Le côté  $\gamma_3$  va de  $R + ib$  à  $-R + ib$ . On le parcourt en sens inverse avec  $x \rightarrow x + ib$ ,  $x \in [-R, R]$ . Or  $(x + ib)^2 = x^2 - b^2 + 2ibx$ . Ainsi

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz = - \int_{-R}^R e^{-(x+ib)^2} dx = -e^{b^2} \int_{-R}^R e^{-x^2} e^{-2ibx} dx.$$

**C'est l'expression demandée.**

4. La question 1 donne  $\int_{-R}^R e^{-x^2} dx + \int_{\gamma_2} f - e^{b^2} \int_{-R}^R e^{-x^2} e^{-2ibx} dx + \int_{\gamma_4} f = 0$ .

Quand  $R \rightarrow +\infty$ , la première intégrale tend vers  $\sqrt{\pi}$ , et les deux intégrales verticales tendent vers 0. La troisième converge, car  $|e^{-x^2} e^{-2ibx}| = e^{-x^2}$  est intégrable. Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (\cos(2bx) - i \sin(2bx)) dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2}. \text{ En identifiant parties réelle et imaginaire,}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2} \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2bx) dx = 0. \text{ La seconde égalité se}$$

voit aussi par parité.

5. Le changement de variable  $x = \sqrt{2} u$  donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \cos(\xi x) dx = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cos(\sqrt{2} \xi u) du. \text{ Si } \xi \neq 0, \text{ on applique la}$$

question 4 avec  $b = |\xi|/\sqrt{2}$ , car le cosinus est pair. On obtient  $\sqrt{2}\sqrt{\pi} e^{-\xi^2/2}$ . Si  $\xi = 0$ , le calcul direct donne  $\sqrt{2\pi}$ , ce qui est la même formule.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \cos(\xi x) dx = \sqrt{2\pi} e^{-\xi^2/2}.$$

**Point de méthode :** pour déplacer une intégrale réelle vers une droite parallèle, fermez le contour par un rectangle et montrez que les côtés verticaux sont négligeables.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

## Pour aller plus loin en L3

---

- Le cours : [fonctions holomorphes, cours de maths en L3](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L3 sur fonctions holomorphes](#)
- À maîtriser avant : [Compacité et connexité](#)
- Chapitre précédent : [Équations différentielles et théorème de Cauchy-Lipschitz](#)
- Chapitre suivant : [Singularités et théorème des résidus](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)