

Fonctions génératrices

Dans toute la fiche, $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. La loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ est la loi sur $\mathbb{N}^*$ définie par $P(X = k) = q^{k-1} p$. Toutes les variables sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Exercice 1 : Fonctions génératrices de lois classiques

Pour chacune des variables suivantes, calculez la fonction génératrice et donnez le rayon de convergence de la série entière correspondante.

1. X suit la loi uniforme sur $[[1, n]]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $Y = X' - 1$, où $X' \sim \mathcal{G}(p)$: Y compte les échecs avant le premier succès.
3. Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec $P(Z = k) = (k + 1) p^2 q^k$. Vérifiez d'abord que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité.

Exercice 2 : Lire une loi sur sa fonction génératrice

Dans chaque cas, déterminez la loi de la variable X , à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la fonction génératrice est donnée.

1. $G_X(t) = \frac{(1+t)^2(2+t)}{12}$.

2. $G_X(t) = t e^{2(t-1)}$. Reconnaissez la loi de $X - 1$.
3. $G_X(t) = \frac{1}{2-t}$ pour $|t| < 2$. Reconnaissez la loi de $X + 1$.
4. Expliquez pourquoi $t \rightarrow \frac{1+t}{3}$ et $t \rightarrow \frac{3t-t^2}{2}$ ne sont pas des fonctions génératrices.

Exercice 3 : Espérance et variance par dérivation en 1

À l'aide de la fonction génératrice, calculez l'espérance et la variance des variables suivantes.

1. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
2. Y , de fonction génératrice $G_Y(t) = \frac{p}{1-qt}$ (exercice 1).
3. Z , de fonction génératrice $G_Z(t) = \frac{p^2}{(1-qt)^2}$ (exercice 1).
4. Comparez $E(Z)$ et $V(Z)$ avec $E(Y)$ et $V(Y)$. Proposez une explication.

Exercice 4 : Transformations d'une variable

1. Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{N}$. Exprimez G_{aX+b} à l'aide de G_X .
2. Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Calculez G_{2X+1} , puis montrez que $n - X$ suit une loi binomiale que l'on précisera.
3. Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Calculez $E(2^X)$.
4. Toujours avec $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, montrez que $E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \int_0^1 G_X(t) dt$, puis calculez cette espérance.

Exercice 5 : Rayon égal à 1 et espérance infinie

Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Vérifiez que l'on définit bien une loi de probabilité.
2. Déterminez le rayon de convergence de la série entière $\sum P(X = n) t^n$.
3. Montrez que, pour $t \in]-1, 1[$ non nul, $G_X(t) = 1 + \frac{(1-t)\ln(1-t)}{t}$.
4. Étudiez la dérivabilité de G_X en 1. Que peut-on en déduire sur $E(X)$? Vérifiez directement ce résultat.
5. À titre de comparaison, donnez le rayon de convergence pour la loi $\mathcal{G}(p)$ et pour la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 6 : Variance de la loi uniforme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X de loi uniforme sur $[[0, n]]$.

1. Montrez que $G_X(t) = \frac{1-t^{n+1}}{(n+1)(1-t)}$ pour $t \neq 1$.
2. Calculez $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$ en partant de l'écriture polynomiale de G_X .
3. Déduisez-en $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 7 : Sommes de binomiales et de variables de Poisson

1. Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ indépendantes. Déterminez la loi de $X + Y$.
2. Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p')$ indépendantes, avec $n, m \geq 1$ et $p \neq p'$. Montrez que $X + Y$ ne suit pas une loi binomiale.
3. Soit $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes, avec $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$. Déterminez la loi de $S = X_1 + \dots + X_n$.
4. Un standard reçoit en une heure un nombre d'appels de loi $\mathcal{P}(2)$ sur sa première ligne et $\mathcal{P}(3)$ sur sa seconde, indépendamment. Calculez la probabilité qu'il reçoive au plus deux appels en une heure.

Exercice 8 : Somme de trois dés

On lance trois dés équilibrés indépendants et on note S la somme des trois faces.

1. Montrez que $G_S(t) = \frac{t^3 (1 - t^6)^3}{216 (1 - t)^3}$ pour $t \neq 1$.
2. On admet que $(1 - t)^{-3} = \sum_{k \geq 0} \binom{k+2}{2} t^k$ pour $|t| < 1$. Calculez $P(S = 10)$ et $P(S = 11)$.
3. Montrez que $G_S(t) = t^{21} G_S(1/t)$ pour $t \neq 0$. Qu'en déduit-on sur la loi de S ?
4. Calculez $E(S)$ et $V(S)$ à l'aide des dérivées de G_S en 1.

Exercice 9 : Rang du r-ième succès

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_r$ mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$. On pose $T_r = X_1 + \dots + X_r$: dans une suite d'épreuves de Bernoulli, c'est le rang du r -ième succès.

1. Calculez $G_{T_r}(t)$ pour $|t| < 1/q$.
2. On admet que $(1-u)^{-r} = \sum_{k \geq 0} \binom{r-1}{k} u^k$ pour $|u| < 1$. Montrez que $P(T_r = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}$ pour $n \geq r$.
3. Calculez $E(T_r)$ et $V(T_r)$ à l'aide de la dérivée logarithmique G'_{T_r}/G_{T_r} .
4. On lance une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité que le deuxième pile apparaisse au cinquième lancer ?

Exercice 10 : Décomposition en éléments simples

Soit c un réel et $G(t) = \frac{c}{(2-t)(3-t)}$. On suppose que G est la fonction génératrice d'une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Déterminez c .
2. Décomposez G en éléments simples, puis déterminez la loi de X . Vérifiez que les probabilités obtenues sont positives.
3. Montrez que X a même loi que $U + V$, où U et V sont indépendantes, $U + 1 \sim \mathcal{G}(1/2)$ et $V + 1 \sim \mathcal{G}(2/3)$.
4. Calculez $E(X)$ et $V(X)$ de deux façons.

Exercice 11 : Probabilité d'une valeur paire

Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrez que $P(X \text{ pair}) = \frac{1 + G_X(-1)}{2}$.
2. Calculez $P(X \text{ pair})$ lorsque $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, puis lorsque $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Dans quel cas cette probabilité vaut-elle exactement $1/2$?
3. Calculez $P(X \text{ pair})$ lorsque $X \sim \mathcal{G}(p)$, et vérifiez le résultat par un calcul direct.

Exercice 12 : Moments factoriels de la loi de Poisson

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

1. Justifiez que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E(X(X-1)\dots(X-k+1)) = G_X^{(k)}(1)$, puis calculez cette quantité.
2. Écrivez X^3 comme combinaison de $X(X-1)(X-2)$, $X(X-1)$ et X . Déduisez-en $E(X^3)$.
3. Calculez $E((X - \lambda)^3)$.

Exercice 13 : Loi conditionnelle sachant la somme

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes, et $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminez la loi de $S = X + Y$ à l'aide des fonctions génératrices.
2. Montrez que, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$P(X = k | S = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{n-k}.$$

3. Un site reçoit des visites françaises selon $\mathcal{P}(3)$ et étrangères selon $\mathcal{P}(1)$ par minute, indépendamment. Sachant qu'il y a eu 4 visites en une minute, quelle est la probabilité qu'elles soient toutes françaises ?

Exercice 14 : Payer avec des pièces de 1 et de 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x + 2y = n$: c'est le nombre de façons de payer n euros avec des pièces de 1 et de 2 euros.

- Montrez que, pour $|t| < 1$, $\sum_{n \geq 0} a_n t^n = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)}$.
- Décomposez cette fraction en éléments simples. Déduisez-en que $a_n = \frac{2n+3+(-1)^n}{4}$.
- Retrouvez ce résultat par un dénombrement direct, puis calculez a_{100} .

Exercice 15 : Dérivabilité en 1 et formule de la queue

Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}$, de fonction génératrice G .

- Montrez que, pour $t \in [0, 1[$, $\frac{1-G(t)}{1-t} = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) t^k$.
- Déduisez-en, sans utiliser le théorème du cours, que X est d'espérance finie si, et seulement si, G est dérivable à gauche en 1, et qu'alors $G'(1) = E(X)$.
- On suppose désormais que $P(X > k) = \frac{1}{(k+1)^2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Déterminez la loi de X .

, puis $E(X)$.

4. Montrez que, dans ce cas, X n'admet pas de moment d'ordre 2. Que peut-on dire de G en 1 ?

Exercice 16 : Collectionneur de trois vignettes

Un paquet contient une vignette parmi trois modèles, chacun avec probabilité $1/3$, indépendamment des autres paquets. Soit T le nombre de paquets achetés pour obtenir les trois modèles. On admet que $T = 1 + T_2 + T_3$, où $T_2 \sim \mathcal{G}(2/3)$ et $T_3 \sim \mathcal{G}(1/3)$ sont indépendantes : T_2 est le nombre d'achats pour obtenir un deuxième modèle, puis T_3 pour le troisième.

1. Calculez $G_T(t)$.
2. Calculez $E(T)$ et $V(T)$.
3. Montrez que $P(T = n) = \frac{2(2^{n-2} - 1)}{3^{n-1}}$ pour tout $n \geq 3$. Vérifiez $P(T = 3)$ par un dénombrement direct.

Exercice 17 : Somme d'un nombre aléatoire de variables

Soit $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi, telles que $N, X_1, X_2, \dots$ soient mutuellement indépendantes. On pose $S = \sum_{i=1}^N X_i$, avec $S = 0$ si $N = 0$.

1. Montrez que, pour $t \in [-1, 1]$, $G_S(t) = G_N(G_{X_1}(t))$.
2. On suppose $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. Déterminez la loi de S .
3. Une tortue pond un nombre d'œufs de loi $\mathcal{P}(10)$. Chaque œuf éclore avec probabilité $0,3$,

indépendamment. Quelle est la probabilité qu'aucun œuf n'éclore ?

4. On suppose maintenant $X_i \sim \mathcal{G}(p)$. Justifiez que S est d'espérance finie et calculez $E(S)$.

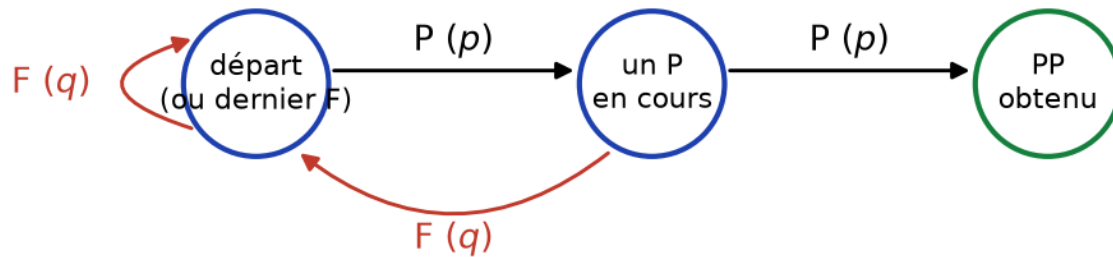
Exercice 18 : Des dés pipés à somme uniforme ?

On se demande s'il est possible de piper deux dés à six faces, indépendamment, de sorte que la somme S suive la loi uniforme sur $[[2, 12]]$. On note X_1 et X_2 les résultats des deux dés, à valeurs dans $[[1, 6]]$.

1. Montrez que $G_{X_i}(t) = t P_i(t)$, où P_i est un polynôme réel de degré au plus 5.
2. On suppose S uniforme sur $[[2, 12]]$. Montrez que $P_1(t) P_2(t) = \frac{1}{11}(1 + t + \dots + t^{10})$ pour tout réel t .
3. Déduisez-en que P_1 et P_2 sont de degré exactement 5.
4. Montrez que le polynôme $1 + t + \dots + t^{10}$ n'a aucune racine réelle, puis concluez.

Exercice 19 : Attendre deux piles consécutifs

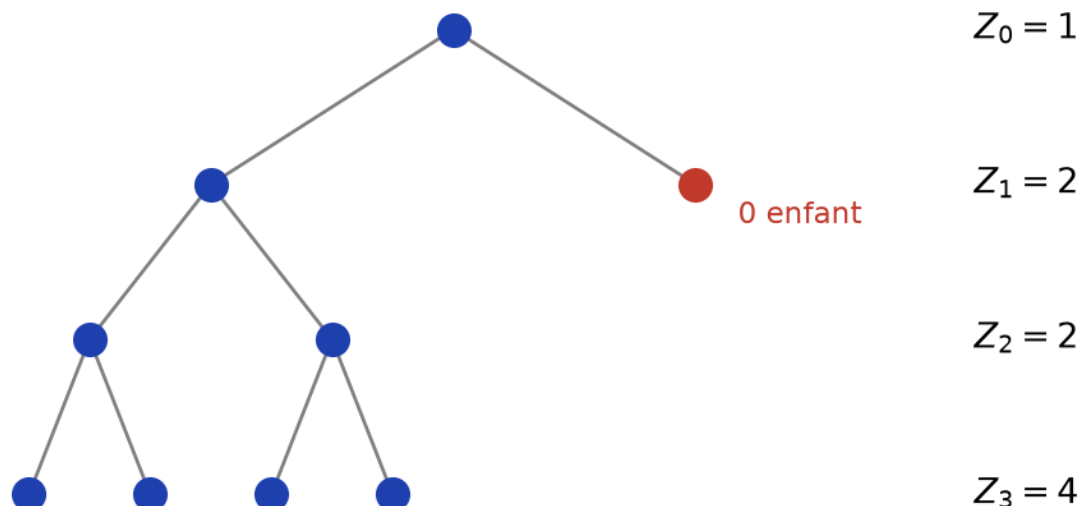
On lance indéfiniment une pièce qui donne pile avec probabilité p , les lancers étant indépendants. Soit T le rang du lancer où l'on obtient, pour la première fois, deux piles consécutifs. On pose $p_n = P(T = n)$ pour $n \geq 1$. Le schéma ci-dessous résume l'évolution de l'expérience.



1. Calculez p_1 , p_2 et p_3 .
2. Montrez que, pour $n \geq 3$, $p_n = q p_{n-1} + pq p_{n-2}$.
3. On pose $G(t) = \sum_{n \geq 1} p_n t^n$ pour $t \in [-1, 1]$. Montrez que $G(t) = \frac{p^2 t^2}{1 - qt - pq t^2}$.
4. Dédisez-en que T est fini presque sûrement, puis que $E(T) = \frac{1+p}{p^2}$.
5. On prend $p = 1/2$. Exprimez $P(T = n)$ à l'aide de la suite de Fibonacci $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$.

Exercice 20 : Problème, extinction d'une population

Une population part d'un individu. Chaque individu a, indépendamment des autres, un nombre d'enfants ξ de loi $P(\xi = 0) = \frac{1}{4}$ et $P(\xi = 2) = \frac{3}{4}$, puis disparaît. On note Z_n l'effectif de la génération n , avec $Z_0 = 1$. Ainsi, $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{n,i}$, où les $\xi_{n,i}$ ont la loi de ξ . On admet que $Z_n, \xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \dots$ sont mutuellement indépendantes. La figure montre une réalisation possible. On note $G = G_\xi$.



1. Calculez G et $m = E(\xi)$.
2. Montrez que $GZ_{n+1} = GZ_n \circ G$ sur $[-1, 1]$. Déduisez-en que $GZ_n = G \circ \dots \circ G$ (n fois).
3. Montrez que $E(Z_n) = m^n$.
4. On pose $u_n = P(Z_n = 0)$. Montrez que $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = G(u_n)$.
5. Montrez que (u_n) est croissante, majorée par $1/3$, et déterminez sa limite.
6. Déduisez-en la probabilité que la population s teigne.
7. Reprenez la question précédente lorsque $P(\xi = 0) = \frac{3}{4}$ et $P(\xi = 2) = \frac{1}{4}$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [fonctions génératrices, cours de maths spé](#)
- À maîtriser avant : [Espérance, variance et loi faible des grands nombres](#), [Séries entières](#)
- Chapitre précédent : [Espérance, variance et loi faible des grands nombres](#)
- Chapitre suivant : [Adjoint et isométries d'un espace euclidien](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)