

Fonctions génératrices

Corrigé de l'exercice 1 : Fonctions génératrices de lois classiques

1. Ici, $P(X = k) = \frac{1}{n}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La série est un polynôme, donc son rayon est infini. Pour $t \neq 1$, la somme géométrique donne

$$G_X(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n t^k = \frac{t(1-t^n)}{n(1-t)}.$$

Ainsi, $G_X(t) = \frac{t(1-t^n)}{n(1-t)}$ pour $t \neq 1$, $G_X(1) = 1$, et le rayon est infini.

2. D'abord, $P(Y = k) = P(X' = k+1) = q^k p$ pour $k \in \mathbb{N}$. Ensuite, la série $\sum p (qt)^k$ converge si, et seulement si, $|qt| < 1$. Son rayon vaut donc $1/q$. On obtient $G_Y(t) = \frac{p}{1-qt}$ pour $|t| < 1/q$.

3. Les nombres $(k+1) p^2 q^k$ sont positifs. De plus, en dérivant la série géométrique, $\sum_{k \geq 0} (k+1) x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$ pour $|x| < 1$. Avec $x = q$, la somme vaut $p^2 / p^2 = 1$: c'est bien une loi. Par le même calcul avec $x = qt$, on trouve, pour $|t| < 1/q$:

$$G_Z(t) = p^2 \sum_{k \geq 0} (k+1)(qt)^k = \frac{p^2}{(1-qt)^2}.$$

Par ailleurs, $(k+1) q^k |t|^k$ ne tend pas vers 0 si $|t| \geq 1/q$. Le rayon vaut donc $1/q$, et $G_Z(t) = \frac{p^2}{(1-qt)^2}$.

Point de méthode : pour une loi à support infini, on se ramène presque toujours à une série géométrique, exponentielle ou à leurs dérivées.

Corrigé de l'exercice 2 : Lire une loi sur sa fonction génératrice

- On développe : $(1+t)^2(2+t) = (1+2t+t^2)(2+t) = 2+5t+4t^2+t^3$. Par unicité des coefficients d'un polynôme, $P(X=0) = \frac{1}{6}$, $P(X=1) = \frac{5}{12}$, $P(X=2) = \frac{1}{3}$, $P(X=3) = \frac{1}{12}$. On vérifie que la somme vaut $\frac{2+5+4+1}{12} = 1$.
- On écrit $t e^{2(t-1)} = e^{-2} \sum_{k \geq 0} \frac{2^k}{k!} t^{k+1}$. Le coefficient de t^n , pour $n \geq 1$, vaut donc $e^{-2} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$. Ainsi, $P(X-1=k) = e^{-2} \frac{2^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. **Par conséquent,** $X-1 \sim \mathcal{P}(2)$.
- Pour $|t| < 2$, $\frac{1}{2-t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-t/2} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{2^{n+1}}$. Donc $P(X=n) = \frac{1}{2^{n+1}}$, puis $P(X+1=k) = \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{2}$ pour $k \geq 1$. **Ainsi,** $X+1 \sim \mathcal{G}(1/2)$.
- Une fonction génératrice vérifie $G(1) = 1$ et a des coefficients positifs. Or la première fonction vaut $\frac{2}{3}$ en 1. Quant à la seconde, elle vaut bien 1 en 1, mais son coefficient de t^2 est $-\frac{1}{2} < 0$. **Aucune des deux n'est donc une fonction génératrice.**

Corrigé de l'exercice 3 : Espérance et variance par dérivation en 1

Dans les trois cas, le rayon est strictement supérieur à 1. Par conséquent, G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 1, et l'on peut utiliser $E = G'(1)$ et $V = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2$.

- Ici, $G_X(t) = (q+pt)^n$. D'abord, $G'_X(t) = np(q+pt)^{n-1}$, donc $E(X) = np$.

Ensuite, $G_X''(1) = n(n-1)p^2$. Ainsi, $V(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2$.
On trouve $E(X) = np$ **et** $V(X) = npq$.

2. On a $G_Y'(t) = \frac{pq}{(1-qt)^2}$ et $G_Y''(t) = \frac{2pq^2}{(1-qt)^3}$. En $t = 1$, comme $1 - q = p$, on obtient $E(Y) = \frac{q}{p}$ et $G_Y''(1) = \frac{2q^2}{p^2}$. Ensuite, $V(Y) = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q^2 + pq}{p^2}$.
Donc $E(Y) = \frac{q}{p}$ **et** $V(Y) = \frac{q}{p^2}$.

3. De même, $G_Z'(t) = \frac{2p^2q}{(1-qt)^3}$ et $G_Z''(t) = \frac{6p^2q^2}{(1-qt)^4}$. Ainsi, $E(Z) = \frac{2q}{p}$ et $G_Z''(1) = \frac{6q^2}{p^2}$. Par conséquent, $V(Z) = \frac{6q^2}{p^2} + \frac{2q}{p} - \frac{4q^2}{p^2} = \frac{2q(q+p)}{p^2}$. **On obtient**
 $E(Z) = \frac{2q}{p}$ **et** $V(Z) = \frac{2q}{p^2}$.

4. On constate que $E(Z) = 2E(Y)$ et $V(Z) = 2V(Y)$. En effet, $G_Z = G_Y^2$. **Donc**
 Z a la loi de $Y_1 + Y_2$, où Y_1 et Y_2 sont indépendantes de même loi que Y :
 c'est le nombre d'échecs avant le deuxième succès. L'additivité de l'espérance, et celle de la variance pour des variables indépendantes, expliquent le facteur 2.

Corrigé de l'exercice 4 : Transformations d'une variable

- Pour $|t| \leq 1$, on a aussi $|t^a| \leq 1$. La formule de transfert donne alors
 $E(t^{aX+b}) = t^b E((t^a)^X)$. **Ainsi**, $G_{aX+b}(t) = t^b G_X(t^a)$.
- D'après la question précédente, $G_{2X+1}(t) = t(q + pt^2)^n$. Ensuite, pour $t \neq 0$,
 $E(t^n - X) = t^n E((1/t)^X) = t^n (q + p/t)^n = (qt + p)^n$. C'est licite, car X est bornée : la somme est finie. En $t = 0$, les deux membres valent $P(X = n) = p^n$. **Par caractérisation**, $n - X \sim \mathcal{B}(n, q)$. C'est naturel : $n - X$ compte les échecs.
- La loi de Poisson a un rayon infini. Donc la série $\sum 2^n P(X = n)$ converge, et le théorème de transfert donne $E(2^X) = G_X(2)$. **On obtient** $E(2^X) = e^{\lambda(2-1)} = e^\lambda$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$. Par ailleurs, la série $\sum P(X = n) t^n$ converge normalement sur $[0, 1]$. On peut donc intégrer terme à terme :

$$\int_0^1 G_X(t) dt = \sum_{n \geq 0} \frac{P(X = n)}{n+1} = E\left(\frac{1}{X+1}\right).$$

Enfin, $\int_0^1 e^{\lambda(t-1)} dt = \frac{1}{\lambda} [e^{\lambda(t-1)}]_0^1 = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$. **Donc** $E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$.

Corrigé de l'exercice 5 : Rayon égal à 1 et espérance infinie

1. Les termes sont positifs. De plus, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. La somme partielle télescopique vaut $1 - \frac{1}{N+1}$, qui tend vers 1. **C'est donc bien une loi de probabilité.**

2. Posons $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2}$ tend vers 1. D'après la règle de d'Alembert, **le rayon de convergence vaut 1.**

3. Pour $|t| < 1$, on connaît $\sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$. Ensuite, pour $t \neq 0$:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n+1} = \frac{1}{t} \sum_{m \geq 2} \frac{t^m}{m} = \frac{-\ln(1-t) - t}{t}.$$

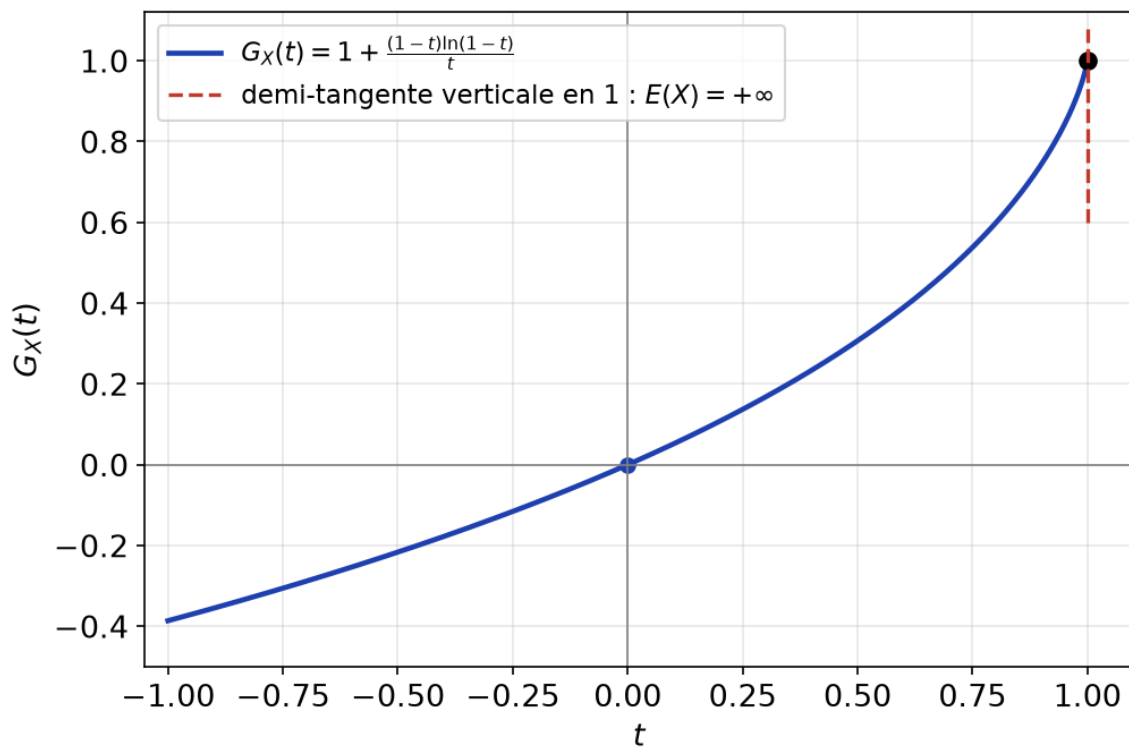
Les deux séries convergent, donc on peut soustraire. Ainsi,

$$G_X(t) = -\ln(1-t) + \frac{\ln(1-t) + t}{t}. \text{ On obtient } G_X(t) = 1 + \frac{(1-t)\ln(1-t)}{t}.$$

4. Pour $t \in]0, 1[$, on calcule le taux d'accroissement en 1 :

$$\frac{G_X(1) - G_X(t)}{1-t} = -\frac{\ln(1-t)}{t} \left[t \rightarrow 1^- \right] + \infty.$$

Donc G_X n'est pas dérivable en 1, et X n'est pas d'espérance finie. Directement, $n P(X = n) = \frac{1}{n+1}$, terme général d'une série divergente. La figure ci-dessous montre la demi-tangente verticale en 1.



5. Pour $\mathcal{G}(p)$, le rayon vaut $1/q > 1$: les probabilités décroissent géométriquement. Pour $\mathcal{P}(\lambda)$, la série exponentielle a un rayon infini. **Un rayon strictement supérieur à 1 garantit tous les moments, ce qui n'est pas le cas ici.**

Corrigé de l'exercice 6 : Variance de la loi uniforme

1. On a $G_X(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n t^k$. Pour $t \neq 1$, la somme géométrique vaut $\frac{1-t^{n+1}}{1-t}$. Ainsi,
- $$G_X(t) = \frac{1-t^{n+1}}{(n+1)(1-t)}.$$

2. On dérive l'écriture polynomiale, plus commode qu'un quotient qui n'est pas défini en 1 :

$$G'_X(1) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k = \frac{n}{2}, \quad G''_X(1) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k(k-1).$$

Or $k(k-1) = 2\binom{k}{2}$, et la formule de sommation sur une colonne du triangle de Pascal donne

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}. \text{ Donc } \sum k(k-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}. \text{ On obtient } G'_X(1) = \frac{n}{2} \text{ et } G''_X(1) = \frac{n(n-1)}{3}.$$

3. D'abord, $E(X) = \frac{n}{2}$. Ensuite :

$$V(X) = \frac{n(n-1)}{3} + \frac{n}{2} - \frac{n^2}{4} = \frac{4n^2 - 4n + 6n - 3n^2}{12} = \frac{n^2 + 2n}{12}.$$

Ainsi, $E(X) = \frac{n}{2}$ et $V(X) = \frac{n(n+2)}{12}$. Pour un dé à faces $0, \dots, 5$, on retrouve $V = \frac{35}{12}$.

Corrigé de l'exercice 7 : Sommes de binomiales et de variables de Poisson

1. Les variables sont indépendantes, donc

$G_{X+Y}(t) = (q + pt)^n (q' + p't)^m = (q + pt)^{n+m}$. La fonction génératrice caractérise la loi. **Donc** $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

2. Par l'absurde, supposons $X + Y \sim \mathcal{B}(N, r)$. Comme $X + Y$ prend les valeurs 0 à $n + m$, avec $P(X + Y = n + m) = p^n p'^m > 0$, on a $N = n + m$ et

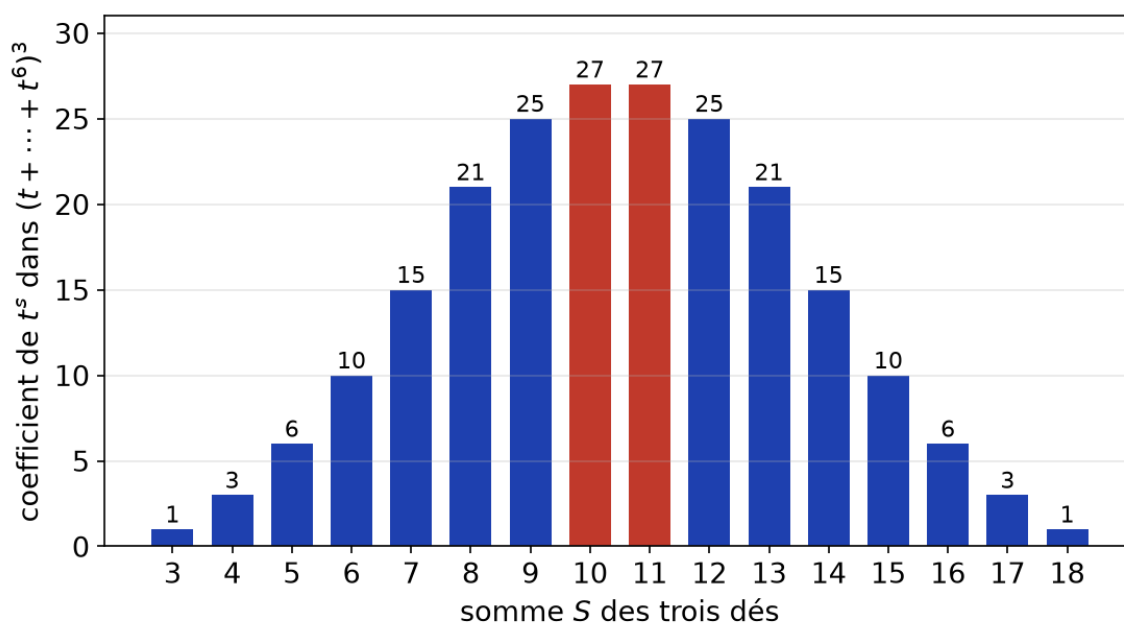
$r \in]0, 1[$. Ainsi, pour tout t , $(q + pt)^n (q' + p't)^m = (1 - r + rt)^{n+m}$. Le membre de droite a une seule racine. En revanche, le membre de gauche a les racines $-\frac{q}{p}$ et $-\frac{q'}{p'}$. Elles sont distinctes, car $x \rightarrow \frac{1-x}{x}$ est strictement décroissante sur $]0, 1[$. **C'est absurde : $X + Y$ n'est pas binomiale.**

3. Par indépendance mutuelle, $G_S(t) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i(t-1)} = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)(t-1)}$. **Donc** $S \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.

4. Le nombre total d'appels suit donc la loi $\mathcal{P}(5)$. Ainsi, $P(S \leq 2) = e^{-5} \left(1 + 5 + \frac{25}{2} \right)$. **On obtient** $P(S \leq 2) = \frac{37}{2} e^{-5} \approx 0,125$.

Corrigé de l'exercice 8 : Somme de trois dés

- Chaque dé a pour fonction génératrice $\frac{1}{6}(t + \dots + t^6) = \frac{t(1-t^6)}{6(1-t)}$ pour $t \neq 1$. Les trois dés sont indépendants, donc on multiplie. **Ainsi,** $G_S(t) = \frac{t^3(1-t^6)^3}{216(1-t)^3}$.
- On a $(1-t^6)^3 = 1 - 3t^6 + 3t^{12} - t^{18}$. Donc $\frac{1}{216} P(S=s)$ est le coefficient de t^{s-3} dans $(1 - 3t^6 + 3t^{12} - t^{18}) \sum_k \binom{k+2}{2} t^k$. Pour $s=10$, on cherche le coefficient de t^7 : $\binom{9}{2} - 3\binom{3}{2} = 36 - 9 = 27$. Pour $s=11$, celui de t^8 vaut $\binom{10}{2} - 3\binom{4}{2} = 45 - 18 = 27$. **Donc** $P(S=10) = P(S=11) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$. La figure ci-dessous donne tous les coefficients.



- Notons G_1 la fonction génératrice d'un dé. Pour $t \neq 0$, $t^7 G_1(1/t) = \frac{1}{6}(t^6 + t^5 + \dots + t) = G_1(t)$. En élevant au cube, $t^{21} G_S(1/t) = G_S(t)$. Or le membre de gauche a pour coefficient de t^s le nombre $P(S = 21 - s)$. **Par unicité des coefficients,** $P(S = s) = P(S = 21 - s)$: la loi est **symétrique par rapport à 10,5**.
- Pour un dé, $G_1'(1) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$ et $G_1''(1) = \frac{1}{6}(0 + 2 + 6 + 12 + 20 + 30) = \frac{35}{3}$. Comme $G_S = G_1^3$, on a $G_S' = 3G_1^2 G_1'$ et $G_S'' = 6G_1 G_1'^2 + 3G_1^2 G_1''$. En $t=1$, où $G_1(1) = 1$:

$$G'_S(1) = \frac{21}{2}, \quad G''_S(1) = 6 \cdot \frac{49}{4} + 3 \cdot \frac{35}{3} = \frac{217}{2}.$$

Ainsi, $V(S) = \frac{217}{2} + \frac{21}{2} - \frac{441}{4} = \frac{476 - 441}{4}$. On trouve $E(S) = \frac{21}{2}$ et $V(S) = \frac{35}{4}$.

Corrigé de l'exercice 9 : Rang du r-ième succès

1. Les X_i sont mutuellement indépendantes, de fonction génératrice $\frac{pt}{1-qt}$. **Donc**

$$G_{T_r}(t) = \left(\frac{pt}{1-qt} \right)^r \quad \text{pour } |t| < 1/q.$$

2. Avec $u = qt$, on a $G_{T_r}(t) = p^r t^r \sum_{k \geq 0} \binom{r-1}{k} q^k t^k$. Le coefficient de t^n correspond à $k = n - r$. Il est nul si $n < r$. **Pour $n \geq r$, on obtient**
 $P(T_r = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}$. Interprétation : le n -ième essai est un succès, et il y a $r - 1$ succès parmi les $n - 1$ premiers.

3. Sur $]0, 1/q[$, on a $\ln G_{T_r}(t) = r \ln(pt) - r \ln(1-qt)$. En dérivant,
 $\frac{G'}{G}(t) = \frac{r}{t} + \frac{rq}{1-qt}$. En $t = 1$, comme $G(1) = 1$, il vient $E(T_r) = r + \frac{rq}{p} = \frac{r}{p}$.
 Ensuite, $\left(\frac{G'}{G} \right)' = \frac{G''}{G} - \left(\frac{G'}{G} \right)^2$. Or $\left(\frac{G'}{G} \right)'(1) = -r + \frac{rq^2}{p^2}$. Donc
 $G''(1) = -r + \frac{rq^2}{p^2} + \frac{r^2}{p^2}$. Enfin :

$$V(T_r) = -r + \frac{rq^2}{p^2} + \frac{r^2}{p^2} + \frac{r}{p} - \frac{r^2}{p^2} = \frac{r(q^2 - p^2 + p)}{p^2} = \frac{r(q^2 + pq)}{p^2}.$$

Ainsi, $E(T_r) = \frac{r}{p}$ et $V(T_r) = \frac{rq}{p^2}$.

4. On prend $r = 2$, $p = q = \frac{1}{2}$ et $n = 5$. **La probabilité vaut** $\binom{4}{1} \frac{1}{2^5} = \frac{1}{8}$.

Point de méthode : pour une fonction génératrice qui est un produit ou une puissance, la dérivée logarithmique évite de longs calculs de quotients.

Corrigé de l'exercice 10 : Décomposition en éléments simples

1. Une fonction génératrice vaut 1 en 1. Or $G(1) = \frac{c}{2}$. **Donc** $c = 2$.
2. On cherche $\frac{2}{(2-t)(3-t)} = \frac{a}{2-t} + \frac{b}{3-t}$. En multipliant par $2-t$ puis en faisant $t = 2$, on obtient $a = 2$. De même, $b = -2$. Ensuite, pour $|t| < 2$:

$$\frac{2}{2-t} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{2^n}, \quad \frac{2}{3-t} = \sum_{n \geq 0} \frac{2 t^n}{3^{n+1}}.$$

Donc $P(X = n) = \frac{1}{2^n} - \frac{2}{3^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ces nombres sont positifs, car $3^{n+1} > 2^{n+1}$. Par exemple, $P(X = 0) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = G(0)$.

3. D'après l'exercice 2, $G_U(t) = \frac{1}{2-t}$. De même, $G_{V+1}(t) = \frac{(2/3)t}{1-t/3} = \frac{2t}{3-t}$, donc $G_V(t) = \frac{2}{3-t}$. Par indépendance, $G_{U+V} = G_U G_V = G$. **Par caractérisation de la loi, X a même loi que $U + V$.**

4. Première méthode : $E(U) = 2 - 1 = 1$ et $V(U) = \frac{1/2}{1/4} = 2$. Ensuite, $E(V) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ et $V(V) = \frac{1/3}{4/9} = \frac{3}{4}$. Par indépendance, les variances s'ajoutent.
- Seconde méthode : $\frac{G'}{G}(t) = \frac{1}{2-t} + \frac{1}{3-t}$ vaut $\frac{3}{2}$ en 1. Puis $\left(\frac{G'}{G}\right)'(1) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, d'où $G''(1) = \frac{5}{4} + \frac{9}{4} = \frac{7}{2}$ et $V = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} - \frac{9}{4}$. **Dans les deux cas, $E(X) = \frac{3}{2}$ et $V(X) = \frac{11}{4}$.**

Corrigé de l'exercice 11 : Probabilité d'une valeur paire

1. La série converge en -1 , car le rayon est au moins 1. Ainsi,
- $$G_X(-1) = \sum (-1)^n P(X = n) = P(X \text{ pair}) - P(X \text{ impair}).$$
- Par ailleurs, $P(X \text{ pair}) + P(X \text{ impair}) = 1$. En additionnant, $P(X \text{ pair}) = \frac{1 + G_X(-1)}{2}$.

2. Pour $\mathcal{P}(\lambda)$, $G_X(-1) = e^{-2\lambda}$, donc $P(X \text{ pair}) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2} > \frac{1}{2}$. Pour $\mathcal{B}(n, p)$, $G_X(-1) = (1 - 2p)^n$, donc $P(X \text{ pair}) = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}$. **Cette probabilité vaut $1/2$ si, et seulement si, $p = 1/2$; pour la loi de Poisson, jamais.**
3. Pour $\mathcal{G}(p)$, $G_X(-1) = \frac{-p}{1+q}$. Donc $P(X \text{ pair}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+q-p}{1+q} = \frac{q}{1+q}$, car $1 - p = q$. Directement, $\sum_{k \geq 1} q^{2k-1} p = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{pq}{(1-q)(1+q)}$. **Les deux calculs donnent $P(X \text{ pair}) = \frac{q}{1+q}$.**

Corrigé de l'exercice 12 : Moments factoriels de la loi de Poisson

1. Le rayon de G_X est infini. On peut donc dériver k fois terme à terme en 1, qui est intérieur à l'intervalle de convergence :

$$G_X^{(k)}(1) = \sum_{n \geq k} n(n-1)\dots(n-k+1) P(X = n).$$

Cette série converge absolument, et c'est $E(X(X-1)\dots(X-k+1))$ par la formule de transfert. Or $G_X^{(k)}(t) = \lambda^k e^{\lambda(t-1)}$. **Ainsi, $E(X(X-1)\dots(X-k+1)) = \lambda^k$.**

2. On développe : $X(X-1)(X-2) = X^3 - 3X^2 + 2X$ et $3X(X-1) = 3X^2 - 3X$.
Donc $X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X$. Par linéarité,
 $E(X^3) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$.

3. D'abord, $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$. Ensuite, par linéarité :

$$E((X - \lambda)^3) = E(X^3) - 3\lambda E(X^2) + 3\lambda^2 E(X) - \lambda^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda^3 - \lambda^3.$$

On obtient $E((X - \lambda)^3) = \lambda$.

Corrigé de l'exercice 13 : Loi conditionnelle sachant la somme

1. Par indépendance, $G_S(t) = e^{\lambda(t-1)} e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda + \mu)(t-1)}$. **Donc** $S \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

2. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $(X = k) \cap (S = n) = (X = k) \cap (Y = n - k)$. Par indépendance, sa probabilité vaut $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}$. On divise par

$$P(S = n) = e^{-(\lambda + \mu)} \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!} :$$

$$P(X = k \mid S = n) = \frac{n!}{k! (n-k)!} \cdot \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{(\lambda + \mu)^n}.$$

Sachant $S = n$, la loi de X est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$.

3. Ici, $\lambda = 3$, $\mu = 1$, $n = k = 4$. La probabilité vaut $\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256} \approx 0,316$.

Corrigé de l'exercice 14 : Payer avec des pièces de 1 et de 2

1. Pour $|t| < 1$, les séries $\sum t^x$ et $\sum t^{2y}$ convergent absolument. Leur produit de Cauchy s'écrit donc

$$\frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{1-t^2} = \sum_{x, y \geq 0} t^{x+2y} = \sum_{n \geq 0} \#\{(x, y) : x + 2y = n\} t^n.$$

C'est exactement $\sum a_n t^n$.

2. On a $(1-t)(1-t^2) = (1-t)^2(1+t)$. On cherche

$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{\alpha}{(1-t)^2} + \frac{\beta}{1-t} + \frac{\gamma}{1+t}$. En $t = 1$ après multiplication par $(1-t)^2$, on trouve $\alpha = \frac{1}{2}$. De même, $\gamma = \frac{1}{4}$. Enfin, $t = 0$ donne $1 = \alpha + \beta + \gamma$, d'où $\beta = \frac{1}{4}$. Ensuite, $\frac{1}{(1-t)^2} = \sum (n+1) t^n$. En identifiant :

$$a_n = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{4}.$$

Ainsi, $a_n = \frac{2n+3+(-1)^n}{4}.$

3. Directement, y peut prendre toute valeur de 0 à $\lfloor n/2 \rfloor$, et $x = n - 2y$ est alors imposé. Donc $a_n = \lfloor n/2 \rfloor + 1$. Si $n = 2m$, la formule donne $\frac{4m+4}{4} = m+1$; si $n = 2m+1$, elle donne $\frac{4m+4}{4} = m+1$. **Les deux résultats concordent, et $a_{100} = 51$.**

Corrigé de l'exercice 15 : Dérivabilité en 1 et formule de la queue

1. Pour $t \in [0, 1[$, on a $1 - G(t) = \sum_{n \geq 0} P(X = n)(1 - t^n)$, car $\sum P(X = n) = 1$.

Or $1 - t^n = (1 - t) \sum_{k=0}^{n-1} t^k$. La famille $(P(X = n) t^k)_{0 \leq k < n}$ est positive. On peut donc sommer par paquets dans l'ordre de son choix :

$$\frac{1 - G(t)}{1 - t} = \sum_{k \geq 0} t^k \sum_{n > k} P(X = n) = \sum_{k \geq 0} P(X > k) t^k.$$

C'est l'égalité demandée. Elle est finie, car le membre de gauche l'est.

2. Notons $H(t)$ ce taux d'accroissement. Chaque terme $P(X > k) t^k$ est croissant en t sur $[0, 1[$, donc H est croissante. Elle admet ainsi une limite $L \in [0, +\infty]$ en 1^- . De plus, $H(t) \leq \sum_{k=0}^K P(X > k) = E(X)$, donc $L \leq E(X)$. Inversement, pour tout K , $H(t) \geq \sum_{k=0}^K P(X > k) t^k$, d'où $L \geq \sum_{k=0}^K P(X > k)$. En faisant tendre K vers l'infini, $L \geq E(X)$. **Donc $L = E(X)$: G est dérivable à gauche en 1 si, et seulement si, $E(X)$ est finie, et alors $G'(1) = E(X)$.**

3. D'abord, $P(X > 0) = 1$, donc $P(X = 0) = 0$. Ensuite, pour $n \geq 1$, $P(X = n) = P(X > n-1) - P(X > n)$. Ainsi, $P(X = n) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, et

$$E(X) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. On calcule $n^2 P(X = n) = n^2 \cdot \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2 (n+1)^2} = \frac{2n+1}{(n+1)^2}$. Ce terme est équivalent à $\frac{2}{n}$, terme d'une série divergente. **Donc** $E(X^2) = +\infty$: **X n'a pas de variance.** D'après le cours, G est dérivable en 1, mais pas deux fois dérivable en 1.

Corrigé de l'exercice 16 : Collectionneur de trois vignettes

1. Les trois termes 1 , T_2 et T_3 sont indépendants. Donc, pour $|t| < 3/2$:

$$G_T(t) = t \cdot \frac{(2/3)t}{1-t/3} \cdot \frac{(1/3)t}{1-2t/3} = \frac{2t^3}{9(1-t/3)(1-2t/3)}.$$

C'est la fonction génératrice cherchée.

2. Par additivité, $E(T) = 1 + \frac{3}{2} + 3 = \frac{11}{2}$. Par indépendance,

$$V(T) = 0 + \frac{1/3}{4/9} + \frac{2/3}{1/9} = \frac{3}{4} + 6. \text{ On le retrouve avec la dérivée logarithmique :}$$

$$\frac{G'}{G}(1) = 3 + \frac{1/3}{2/3} + \frac{2/3}{1/3} = \frac{11}{2}. \text{ De même, } \left(\frac{G'}{G}\right)'(1) = -3 + \frac{1/9}{4/9} + \frac{4/9}{1/9} = \frac{5}{4}. \text{ Donc}$$

$$G''(1) = \frac{5}{4} + \frac{121}{4} = \frac{63}{2}, \text{ puis } V(T) = \frac{63}{2} + \frac{11}{2} - \frac{121}{4} = \frac{27}{4}. \text{ Ainsi, } E(T) = \frac{11}{2} \text{ et } V(T) = \frac{27}{4}.$$

3. On décompose $\frac{1}{(1-t/3)(1-2t/3)} = \frac{-1}{1-t/3} + \frac{2}{1-2t/3}$; on le vérifie en $t = 0$, où l'on trouve 1. Le coefficient de t^k vaut donc $2\left(\frac{2}{3}\right)^k - \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{2^{k+1}-1}{3^k}$. Avec $k = n-3$:

$$P(T = n) = \frac{2}{9} \cdot \frac{2^{n-2}-1}{3^{n-3}} = \frac{2(2^{n-2}-1)}{3^{n-1}}.$$

La formule est établie. Pour $n = 3$, elle donne $\frac{2}{9}$. Directement, les trois premiers paquets doivent donner trois modèles distincts : $\frac{3!}{3^3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

Corrigé de l'exercice 17 : Somme d'un nombre aléatoire de variables

1. Notons $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Les événements $(N = n)$ forment un système complet. Sur $(N = n)$, on a $S = S_n$. Par le lemme des coalitions, N et S_n sont indépendantes. La formule des probabilités totales donne donc $P(S = k) = \sum_n P(N = n) P(S_n = k)$. Ensuite, pour $t \in [-1, 1]$, la famille $(P(N = n) P(S_n = k) t^k)_{n, k}$ est sommable, car la somme des modules est au plus 1. Le théorème de Fubini donne alors :

$$G_S(t) = \sum_{n \geq 0} P(N = n) G_{S_n}(t) = \sum_{n \geq 0} P(N = n) G_{X_1}(t)^n.$$

Enfin, $|G_{X_1}(t)| \leq 1$, point où la série de G_N converge. **Donc** $G_S(t) = G_N(G_{X_1}(t))$. Remarquez que ce résultat vaut pour toute loi de N à valeurs dans $\mathbb{N}$: l'hypothèse de Poisson ne sert qu'aux questions suivantes.

2. Ici, $G_S(t) = e^{\lambda(q + pt - 1)} = e^{\lambda p(t - 1)}$. **Donc** $S \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.
3. Le nombre d'œufs éclos suit la loi $\mathcal{P}(3)$. **La probabilité qu'aucun n'écloie vaut** $e^{-3} \approx 0,050$.
4. Sur $[-1, 1]$, $G_S(t) = \exp\left(\lambda\left(\frac{pt}{1-qt} - 1\right)\right)$. Cette expression est dérivable sur $] -1/q, 1/q[$, qui contient 1. Donc G_S est dérivable à gauche en 1, et S est d'espérance finie. De plus, $G'_S(t) = G_S(t) \cdot \frac{\lambda p}{(1-qt)^2}$. **Ainsi**, $E(S) = \frac{\lambda}{p}$, soit le produit $E(N) E(X_1)$.

Corrigé de l'exercice 18 : Des dés pipés à somme uniforme ?

1. Posons $a_k = P(X_1 = k)$. Alors

$$G_{X_1}(t) = \sum_{k=1}^6 a_k t^k = t(a_1 + a_2 t + \dots + a_6 t^5). \text{ On pose}$$

$$P_1(t) = \sum_{k=1}^6 a_k t^{k-1}, \text{ de degré au plus 5 ; de même pour } P_2.$$

- Les dés sont indépendants, donc $G_S = G_{X_1} G_{X_2} = t^2 P_1 P_2$. Par hypothèse, $G_S(t) = \frac{1}{11}(t^2 + \dots + t^{12})$. Pour $t \neq 0$, on simplifie par t^2 . Les deux membres sont des polynômes égaux sur $\mathbb{R}^*$, donc égaux partout. **Ainsi**, $P_1 P_2 = \frac{1}{11}(1 + t + \dots + t^{10})$.
- Le degré d'un produit est la somme des degrés. Donc $\deg P_1 + \deg P_2 = 10$, avec $\deg P_i \leq 5$. **Par conséquent**, $\deg P_1 = \deg P_2 = 5$.
- Pour $t \neq 1$, $1 + t + \dots + t^{10} = \frac{1-t^{11}}{1-t}$. Une racine réelle vérifierait $t^{11} = 1$, donc $t = 1$, car $t \rightarrow t^{11}$ est injective sur $\mathbb{R}$. Or le polynôme vaut 11 en 1. Il n'a donc aucune racine réelle. Cependant, P_1 est réel de degré impair : ses limites en $\pm\infty$ sont de signes opposés. Le théorème des valeurs intermédiaires lui donne une racine réelle r , qui serait racine de $P_1 P_2$. **C'est absurde : on ne peut pas piper deux dés pour que la somme soit uniforme.**

Corrigé de l'exercice 19 : Attendre deux piles consécutifs

- On ne peut pas avoir deux piles en un lancer, donc $p_1 = 0$. Ensuite, $T = 2$ signifie PP, donc $p_2 = p^2$. Enfin, $T = 3$ signifie FPP, car PPP donnerait $T = 2$. **Ainsi**, $p_1 = 0$, $p_2 = p^2$ et $p_3 = qp^2$.
- Soit $n \geq 3$. On distingue selon les premiers lancers. Si le premier est F, l'attente recommence à zéro à partir du deuxième lancer. Par indépendance des lancers, la probabilité de $(T = n)$ et F au premier lancer vaut $q p_{n-1}$. Si les deux premiers sont PF, l'attente recommence au troisième : cela donne $p q p_{n-2}$. Enfin, si les deux premiers sont PP, alors $T = 2 \neq n$. Ces trois cas forment un système complet. **Donc** $p_n = q p_{n-1} + p q p_{n-2}$ pour $n \geq 3$.
- Comme $\sum p_n \leq 1$, la série $G(t)$ converge normalement sur $[-1, 1]$. On multiplie la relation par t^n et on somme pour $n \geq 3$:

$$G(t) - p^2 t^2 = q t (G(t) - p_1 t) + p q t^2 G(t) = q t G(t) + p q t^2 G(t).$$

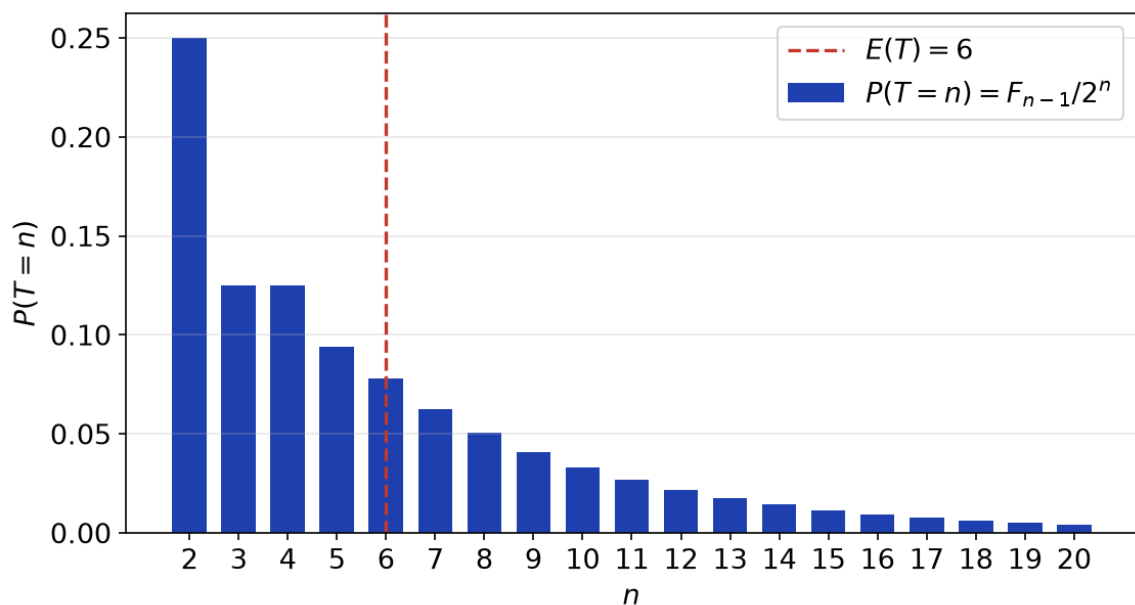
Par ailleurs, pour $|t| \leq 1$, $|q t + p q t^2| \leq q + p q = 1 - p^2 < 1$, donc $1 - q t - p q t^2 \neq 0$. **On obtient** $G(t) = \frac{p^2 t^2}{1 - q t - p q t^2}$.

4. D'abord, $P(T < +\infty) = \sum p_n = G(1) = \frac{p^2}{1-q-pq} = \frac{p^2}{p(1-q)} = 1$. Donc T est fini presque sûrement. Ensuite, G coïncide sur $[-1, 1]$ avec une fraction rationnelle dérivable en 1. Donc T est d'espérance finie et $E(T) = G'(1)$. Posons $D(t) = 1 - qt - pqt^2$: $D(1) = p^2$ et $D'(1) = -q - 2pq$. Alors :

$$G'(1) = \frac{2p^2 D(1) - p^2 D'(1)}{D(1)^2} = \frac{2p^4 + p^2(q + 2pq)}{p^4} = \frac{2p^2 + 2pq + q}{p^2}.$$

Or $2p^2 + 2pq = 2p(p + q) = 2p$, et $2p + q = 1 + p$. **Ainsi**, $E(T) = \frac{1+p}{p^2}$.

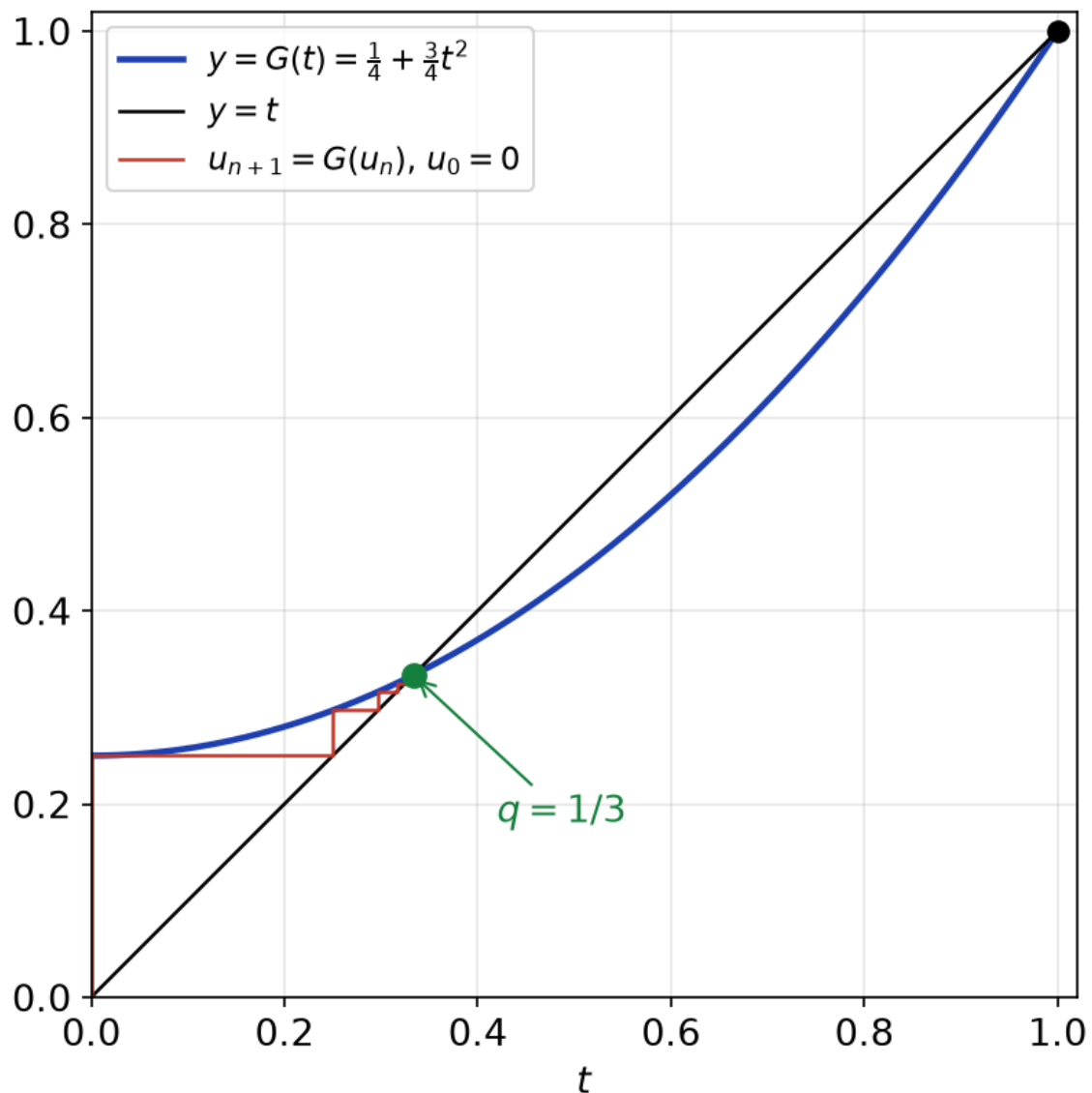
5. Pour $p = \frac{1}{2}$, posons $v_n = 2^n p_n$. La relation devient $v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$, avec $v_1 = 0$ et $v_2 = 1$. Ce sont les conditions de F_{n-1} , avec $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. **Donc** $P(T = n) = \frac{F_{n-1}}{2^n}$, **et** $E(T) = 6$. La figure ci-dessous représente cette loi.



Point de méthode : on conditionne par le début de l'expérience, on obtient une récurrence sur p_n , puis on la traduit en une équation sur G .

Corrigé de l'exercice 20 : Problème, extinction d'une population

1. On a $G(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}t^2$. Donc $G'(t) = \frac{3}{2}t$. **Ainsi**, $m = G'(1) = \frac{3}{2}$.
2. Le raisonnement est celui de l'exercice 17, avec Z_n à la place de N . Pour $t \in [-1, 1]$, la formule des probabilités totales et le théorème de Fubini donnent
$$G_{Z_{n+1}}(t) = \sum_k P(Z_n = k) G(t)^k.$$
Comme $|G(t)| \leq 1$, cela vaut $G_{Z_n}(G(t))$.
Ensuite, $G_{Z_0}(t) = t$. Une récurrence immédiate donne le résultat. **Donc**
$$G_{Z_n} = G \circ \dots \circ G \text{ (} n \text{ fois).}$$
3. On a $Z_n \leq 2^n$, donc G_{Z_n} est un polynôme. On dérive la composée en 1, avec $G(1) = 1$: $E(Z_{n+1}) = G'_{Z_n}(G(1)) G'(1) = m E(Z_n)$. Comme $E(Z_0) = 1$, **on obtient**
$$E(Z_n) = m^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$
4. D'abord, $u_0 = P(Z_0 = 0) = 0$. Ensuite, $u_n = G_{Z_n}(0)$. Or $G_{Z_{n+1}} = G \circ G_{Z_n}$, car les $n+1$ copies de G peuvent se regrouper dans l'autre sens. **Donc** $u_{n+1} = G(u_n)$.
5. La fonction G est croissante sur $[0, 1]$. De plus, $u_1 = \frac{1}{4} \geq u_0$. Par récurrence, si $u_n \geq u_{n-1}$, alors $G(u_n) \geq G(u_{n-1})$: la suite est croissante. Ensuite,
$$G\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$
Donc si $u_n \leq \frac{1}{3}$, alors $u_{n+1} \leq G\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$. La suite converge vers $\ell \in [0, 1/3]$. Par continuité de G , $G(\ell) = \ell$, c'est-à-dire $3\ell^2 - 4\ell + 1 = 0$. Les racines sont $\frac{1}{3}$ et 1. **Par conséquent**, u_n **tend vers** $\frac{1}{3}$. La figure ci-dessous montre l'escalier de cette suite.



6. Si $Z_n = 0$, alors Z_{n+1} est une somme vide, donc nulle. Les événements $(Z_n = 0)$ forment ainsi une suite croissante, de réunion l'extinction. Par continuité croissante, **la probabilité d'extinction vaut** $\lim u_n = \frac{1}{3}$. Malgré $m > 1$, la population s'éteint donc une fois sur trois.
7. Désormais, $G(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}t^2$. L'équation $G(t) = t$ s'écrit $t^2 - 4t + 3 = 0$, de racines 1 et 3. Comme précédemment, (u_n) est croissante et majorée par 1, car $G(1) = 1$. Sa limite est un point fixe dans $[0, 1]$, donc vaut 1. **L'extinction est alors presque sûre** ; ici, $m = \frac{1}{2} < 1$.

Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [fonctions génératrices, cours de maths spé](#)
- Les énoncés : [exercices de maths spé sur fonctions génératrices](#)
- À maîtriser avant : [Espérance, variance et loi faible des grands nombres](#), [Séries entières](#)
- Chapitre précédent : [Espérance, variance et loi faible des grands nombres](#)
- Chapitre suivant : [Adjoint et isométries d'un espace euclidien](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)