

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 : Domaine de définition et lignes de niveau

On considère $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ et $g(x, y) = y - x^2$.

1. Déterminer le plus grand domaine D de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est définie. Est-il fermé ? borné ?
2. Pour chaque réel c , décrire la ligne de niveau c de f .
3. Décrire les lignes de niveau de g . Deux lignes de niveau distinctes de g peuvent-elles se couper ?

Exercice 2 : Continuité par les théorèmes généraux

1. Justifier que $f(x, y) = \frac{e^{xy} \cos(x+y)}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier que $F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2, \\ 2xy, \\ \ln(1 + x^2 + y^2) \end{pmatrix}$ définit une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} \frac{x^2 y - 1}{x + y}$.
4. Déterminer le plus grand ouvert sur lequel $h(x, y) = \frac{\ln(x+y)}{x-y}$ est définie, et justifier que h y est continue.

Exercice 3 : Limites différentes selon les droites

Les fonctions suivantes sont définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Pour chacune, calculer la limite en $(0, 0)$ le long de la droite $y = mx$, puis conclure.

1. $f_1(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$

2. $f_2(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$

3. $f_3(x, y) = \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}.$

Exercice 4 : Limites en l'origine par majoration

Montrer que chacune des fonctions suivantes, définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, admet une limite en $(0, 0)$, et la donner. On note $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. $a(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$

2. $b(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

3. $c(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}.$

4. $d(x, y) = (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2).$

5. $e(x, y) = \frac{e^{x^2 + y^2} - 1}{x^2 + y^2}.$

Exercice 5 : Limite nulle sur les droites mais pas sur une parabole

Soit $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

1. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine tend vers 0 en $(0, 0)$.
2. Pour $k \in \mathbb{R}$, calculer $f(x, kx^2)$ pour $x \neq 0$. Que peut-on dire des paraboles $y = kx^2$?
3. En déduire que f n'est pas continue en $(0, 0)$.
4. Montrer que $|f(x, y)| \leq \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}^2$, et que cette borne est atteinte.

Exercice 6 : Continuité de trois fonctions prolongées en l'origine

Les trois fonctions suivantes sont prolongées par 0 en $(0, 0)$. Étudier leur continuité sur $\mathbb{R}^2$.

1. $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.
2. $g(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{x^2 + y^2}$.
3. $h(x, y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}$.

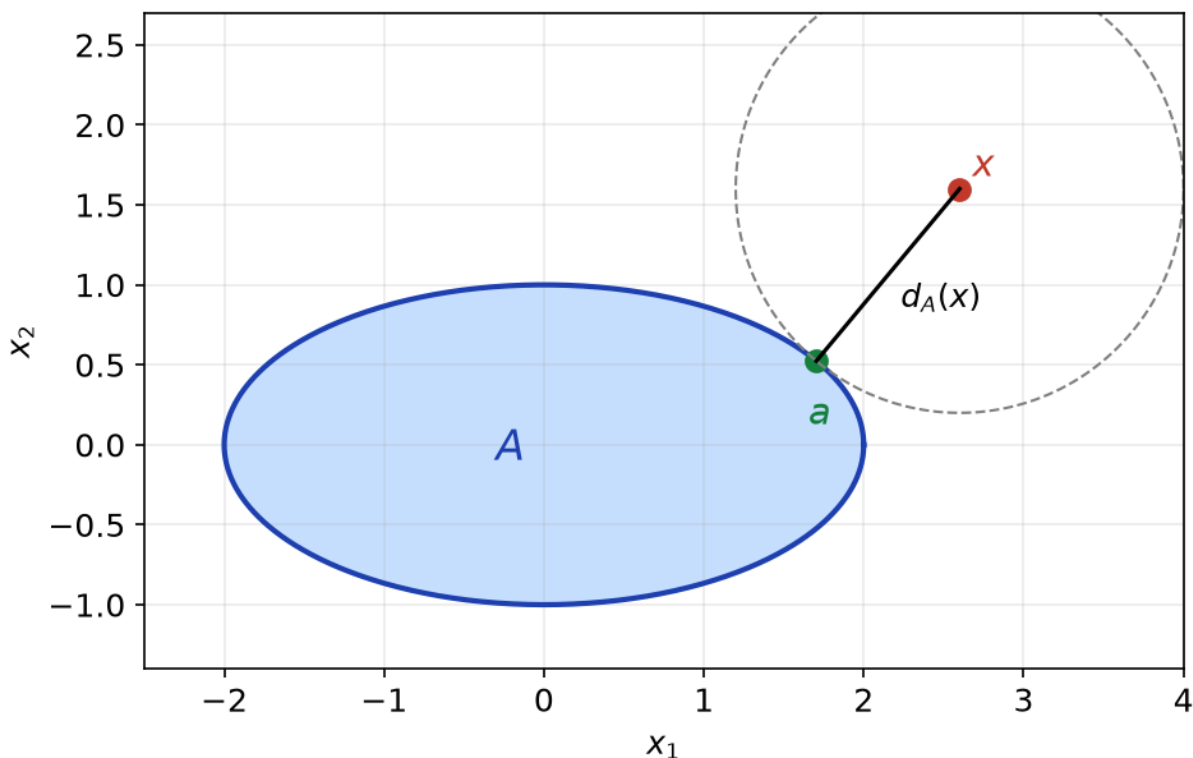
Exercice 7 : Fonctions lipschitziennes

On note $|(x, y)|_1 = |x| + |y|$ et $|(x, y)|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que N est 1-lipschitzienne de $(\mathbb{R}^n, N)$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(x, y) = \sin x + \cos y$ est 1-lipschitzienne pour $\|\cdot\|_1$, puis $\sqrt{2}$ -lipschitzienne pour $\|\cdot\|_2$.
3. Montrer que $g(x, y) = xy$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$.
4. Soit $R > 0$. Montrer que g est R -lipschitzienne sur le carré $[-R, R]^2$ pour $\|\cdot\|_1$.

Exercice 8 : Distance à une partie fermée

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$. La figure ci-dessous représente une partie A , un point x et un point a de A qui réalise la distance.



1. Montrer que d_A est 1-lipschitzienne. En déduire qu'elle est continue.

2. On suppose A fermée. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. En considérant $K = A \cap \overline{B}(x, d_A(x) + 1)$, montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $|x - a| = d_A(x)$.
3. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, on prend pour A le disque fermé de centre O et de rayon 1. Montrer que $d_A(x) = \max(|x|_2 - 1, 0)$ et préciser le point le plus proche lorsque $|x|_2 > 1$.

Exercice 9 : Un maximum atteint sur le plan entier

Soit $f(x, y) = (x + y) e^{-(x^2 + y^2)}$ sur $\mathbb{R}^2$. On note $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. Montrer que $|f(x, y)| \leq \sqrt{2} r e^{-r^2}$.
2. Calculer $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
3. Étudier $\psi(r) = \sqrt{2} r e^{-r^2}$ sur $[0, +\infty[$. En déduire que $|f(x, y)| < f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ dès que $r \geq 2$.
4. Montrer, à l'aide d'un compact, que f admet un maximum sur $\mathbb{R}^2$.
5. Déterminer ce maximum, un point où il est atteint, puis le minimum de f .

Exercice 10 : Calcul de dérivées partielles et de gradients

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes sur l'ouvert indiqué, puis le gradient au point donné.

1. $f(x, y) = x^3 y^2 - 2xy + y$ sur $\mathbb{R}^2$, au point $(1, 1)$.
2. $g(x, y) = e^{xy} \sin y$ sur $\mathbb{R}^2$, au point $(0, \pi)$.

3. $h(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ sur $\{(x, y) : x > 0\}$, au point $(1, 1)$.
4. $k(x, y, z) = xy^2 e^z$ sur $\mathbb{R}^3$, au point $(1, 2, 0)$.

Exercice 11 : Dérivée directionnelle et direction de plus forte pente

Soit $f(x, y) = x^2 + 3xy$ et $a = (1, 2)$.

1. Calculer, à l'aide de la définition, la dérivée de f en a selon $v = (1, -1)$.
2. Calculer $\nabla f(a)$ et retrouver le résultat précédent.
3. Parmi les vecteurs unitaires u pour la norme euclidienne, lequel maximise $D_u f(a)$? Quelle est la valeur maximale ?
4. Déterminer les vecteurs unitaires u tels que $D_u f(a) = 0$. Les relier à la ligne de niveau de f passant par a .

Exercice 12 : Dérivées partielles sans continuité

Soit $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

1. Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.
2. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent et les calculer.
3. Soit $v = (\alpha, \beta)$ avec $\alpha\beta \neq 0$. La dérivée $D_v f(0, 0)$ existe-t-elle ?
4. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$, puis $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ pour $y \neq 0$. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 13 : Toutes les dérivées directionnelles sans continuité

Soit $g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$, et $g(0, 0) = 0$.

1. Calculer $g(t, t^2)$ pour $t \neq 0$. En déduire que g n'est pas continue en $(0, 0)$.
2. Soit $v = (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Montrer que $D_v g(0, 0)$ existe et la calculer, en distinguant $\beta = 0$ et $\beta \neq 0$.
3. Calculer $D_{(1, 0)} g(0, 0)$, $D_{(0, 1)} g(0, 0)$ et $D_{(1, 1)} g(0, 0)$. L'application $v \rightarrow D_v g(0, 0)$ est-elle linéaire ?
4. Expliquer pourquoi g ne peut pas être de classe C^1 au voisinage de $(0, 0)$, de deux façons différentes.

Exercice 14 : Une fonction de classe C^1 sur le plan

Soit $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

1. Montrer que $|f(x, y)| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que, pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

3. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$.
4. Vérifier que $f(y, x) = -f(x, y)$. En déduire une expression de $\frac{\partial f}{\partial y}$ et conclure que f est

de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

5. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ pour x, y non nuls.

Exercice 15 : Fonction continue sans dérivée directionnelle

Soit $g(x, y) = \sqrt{|xy|}$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que les deux dérivées partielles de g en $(0, 0)$ existent et sont nulles.
3. Montrer que g n'admet pas de dérivée en $(0, 0)$ selon le vecteur $(1, 1)$.
4. En déduire que g n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Quelle leçon tirer de cet exemple et de l'exercice 12 ?

Exercice 16 : Dérivée le long du cercle unité

Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $g(t) = f(\cos t, \sin t)$.

1. Justifier que g est dérivable et exprimer $g'(t)$ à l'aide des dérivées partielles de f .
2. Vérifier la formule lorsque $f(x, y) = x^2 - y^2$.
3. On suppose que $x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f est constante sur chaque cercle de centre O .

Exercice 17 : Gradient en coordonnées polaires

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On pose $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\frac{\partial F}{\partial r}$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ en fonction des dérivées partielles de f .
2. En déduire $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ au point $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ en fonction de $\frac{\partial F}{\partial r}$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}$.
3. Montrer que $|\nabla f|_2^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2$.
4. Application : $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Calculer $|\nabla f(x, y)|_2$ par cette méthode, puis directement.

Exercice 18 : Fonctions homogènes et relation d'Euler

Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et f de classe C^1 sur U . On dit que f est homogène de degré α si $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ pour tout $t > 0$ et tout $(x, y) \in U$.

1. On suppose f homogène de degré α . Montrer la relation d'Euler : $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$ sur U .
2. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est alors homogène de degré $\alpha - 1$.
3. Réciproquement, on suppose la relation d'Euler vérifiée sur U . Pour $(x, y) \in U$ fixé, on pose $\varphi(t) = t^{-\alpha} f(tx, ty)$ sur $]0, +\infty[$. Montrer que φ est constante et conclure.
4. Vérifier la relation d'Euler au point $(1, 1)$ pour $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.
5. On suppose f homogène de degré 0 et prolongeable en une fonction continue en $(0, 0)$. Montrer que f est constante.

Exercice 19 : Composée avec l'application carré complexe

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, de variables (u, v) . On pose $g(x, y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$.

1. Justifier que g est de classe C^1 et calculer $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$.
2. Montrer que $|\nabla g(x, y)|_2^2 = 4(x^2 + y^2) |\nabla f(x^2 - y^2, 2xy)|_2^2$.
3. On suppose $\nabla f(0, 2) = (3, -1)$. Calculer $\nabla g(1, 1)$ et vérifier le résultat de la question 2.
4. Vérifier la formule de la question 1 lorsque $f(u, v) = u$.

Exercice 20 : Une équation aux dérivées partielles de transport

On cherche les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (E)$$

1. Soit f une solution. On pose $G(u, v) = f\left(\frac{u-v}{2}, v\right)$. Justifier que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer $\frac{\partial G}{\partial v}$.
2. En déduire qu'il existe h de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = h(2x + y)$.
3. Vérifier réciproquement que toute fonction de cette forme est solution de (E) .
4. Déterminer la solution de (E) qui vérifie $f(x, 0) = \sin x$ pour tout x . Décrire ses lignes de niveau.

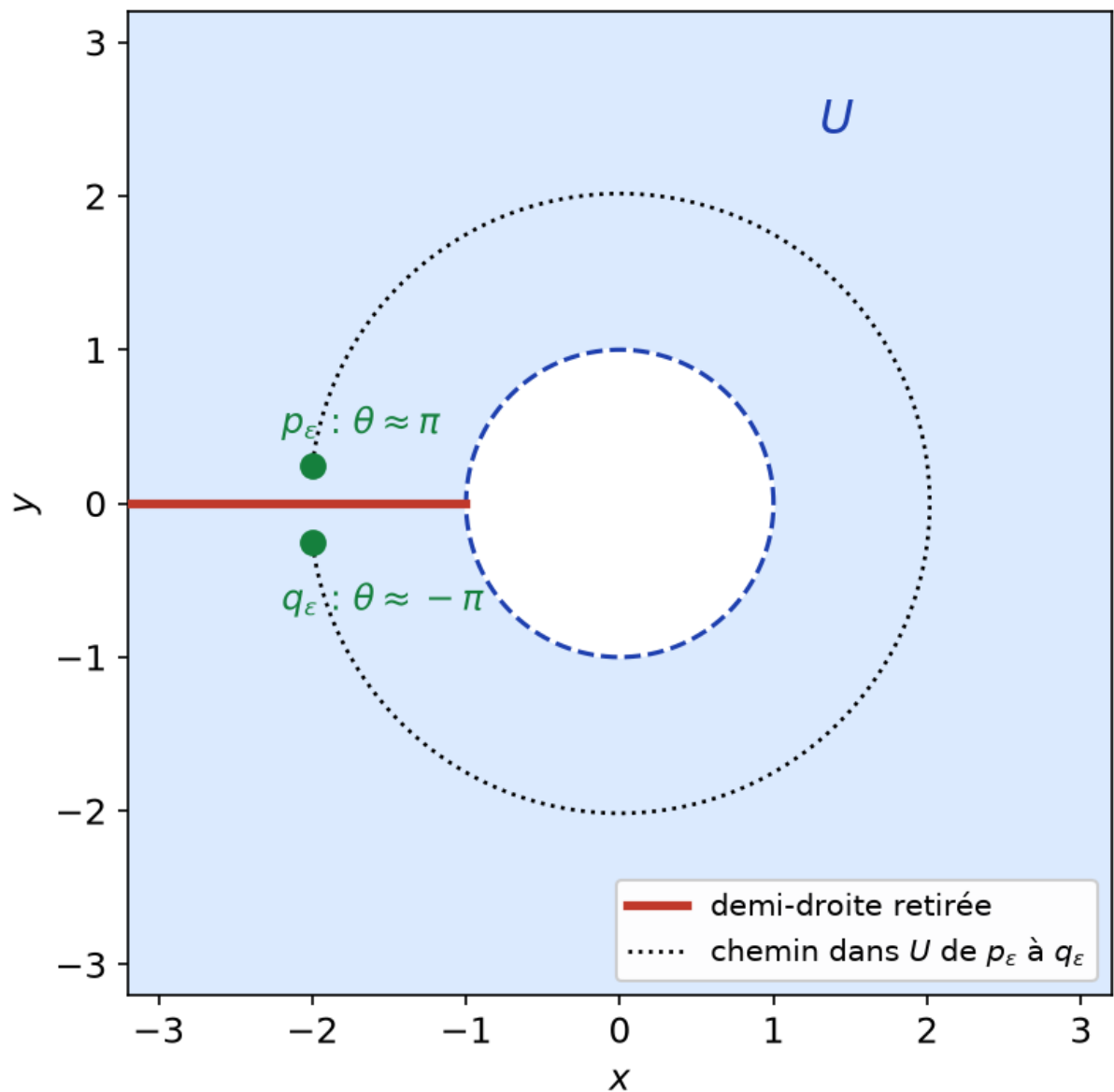
Exercice 21 : Problème : gradient borné et fonctions lipschitziennes

Partie A. Soit U un ouvert **convexe** de $\mathbb{R}^n$, f de classe C^1 sur U et $M \geq 0$ tel que $|\nabla f(x)|_2 \leq M$ pour tout $x \in U$.

1. Soit $a, b \in U$. On pose $\varphi(t) = f(a + t(b - a))$ pour $t \in [0, 1]$. Justifier que φ est bien définie et dérivable, et calculer $\varphi'(t)$.
2. En déduire que $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|_2$.
3. Montrer que $f(x, y) = \sin x \cos y$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$ pour $\|\cdot\|_2$.

Partie B. On montre que l'hypothèse de convexité ne peut pas être supprimée. Soit U l'ouvert formé des points (x, y) tels que $x^2 + y^2 > 1$, privé de la demi-droite $\{(x, 0) : x \leq -1\}$, comme sur la figure ci-dessous. Pour $(x, y) \in U$, on note $\theta(x, y)$ l'unique réel de $] -\pi, \pi[$ tel que $(x, y) = r(\cos \theta, \sin \theta)$, avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. On admet que θ est de classe C^1 sur U , avec

$$\nabla \theta(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$



1. Vérifier la formule du gradient sur le demi-plan $x > 0$, où $\theta(x, y) = \arctan(y / x)$.
2. Montrer que $|\nabla \theta(x, y)|_2 < 1$ sur U .
3. Pour $\epsilon \in]0, 1[$, on pose $p_\epsilon = (-2, \epsilon)$ et $q_\epsilon = (-2, -\epsilon)$. Calculer $\theta(p_\epsilon)$ et $\theta(q_\epsilon)$ à l'aide d'une arctangente.
4. En déduire que θ n'est pas lipschitzienne sur U . Quel argument de la partie A tombe en défaut ?

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [fonctions de plusieurs variables, cours de maths en L2](#)
- À maîtriser avant : [Normes et topologie de \$\mathbb{R}^n\$](#)
- Chapitre précédent : [Normes et topologie de \$\mathbb{R}^n\$](#)
- Chapitre suivant : [Différentiabilité, formule de Taylor et extrema](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)