

Fonctions de deux variables

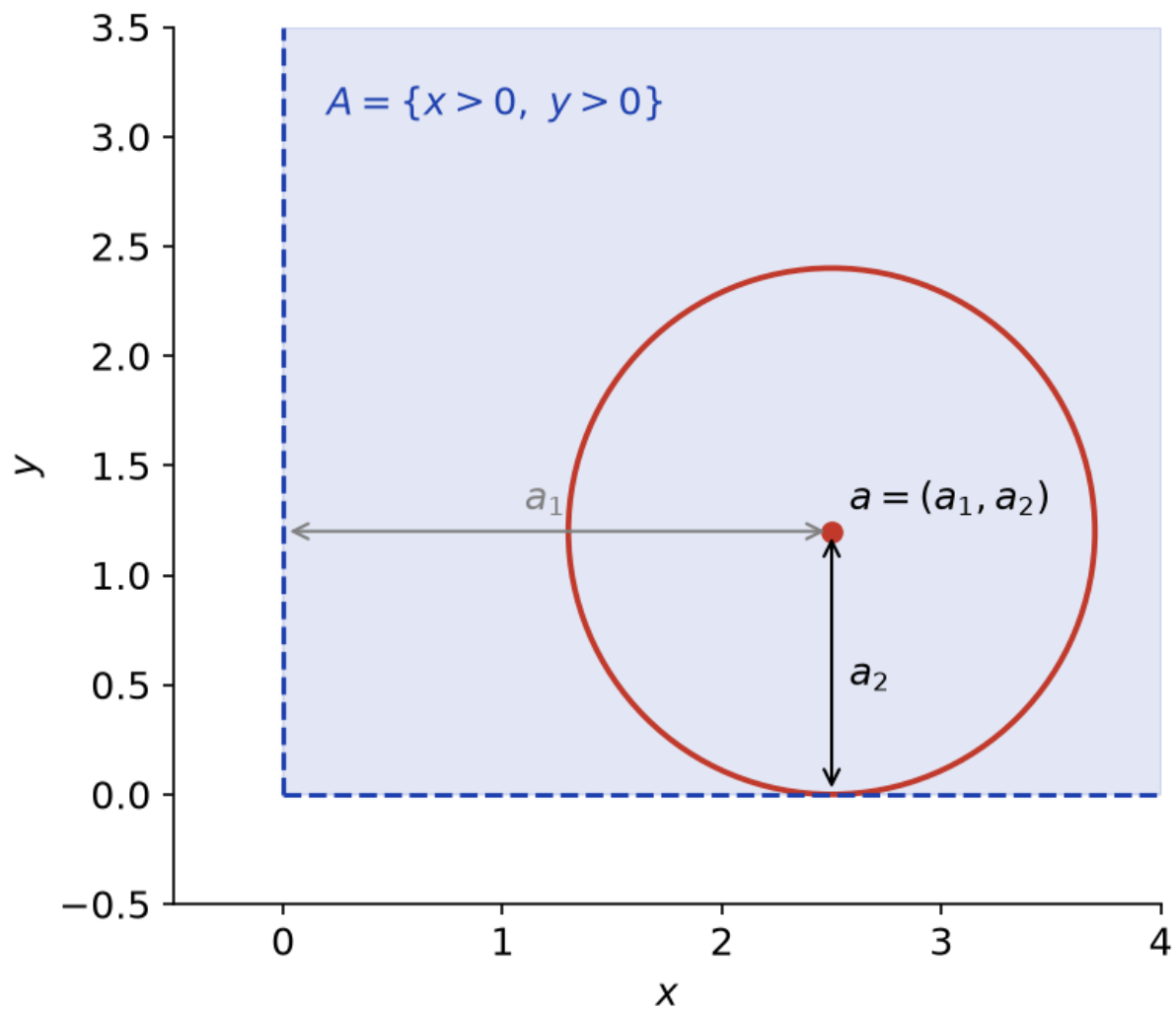
Exercice 1 : Calcul de dérivées partielles et de gradients

Pour chacune des fonctions suivantes, justifiez qu'elle est de classe C^1 sur l'ouvert indiqué. Calculez ensuite ses dérivées partielles, puis son gradient au point donné.

1. $f(x, y) = x^2 y^3 + e^{xy}$ sur $\mathbb{R}^2$, au point $(1, 0)$.
2. $g(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ sur $\mathbb{R}^2$, au point $(1, 1)$.
3. $h(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ sur $U = \{(x, y) : x > 0\}$, au point $(1, 1)$.
4. $k(x, y) = x^y = e^{y \ln x}$ sur $U = \{(x, y) : x > 0\}$, au point $(e, 1)$.

Exercice 2 : Ouverts du plan

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne. Pour chaque partie, dites si elle est ouverte et justifiez votre réponse. La figure donne une indication pour la première partie.



1. $A = \{(x, y) : x > 0 \text{ et } y > 0\}$. On pourra poser $r = \min(a_1, a_2)$ pour $a = (a_1, a_2) \in A$.
2. $B = \{(x, y) : y \geq 0\}$.
3. $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$. On pourra utiliser l'inégalité triangulaire.
4. $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Exercice 3 : Continuité en l'origine

On pose, pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

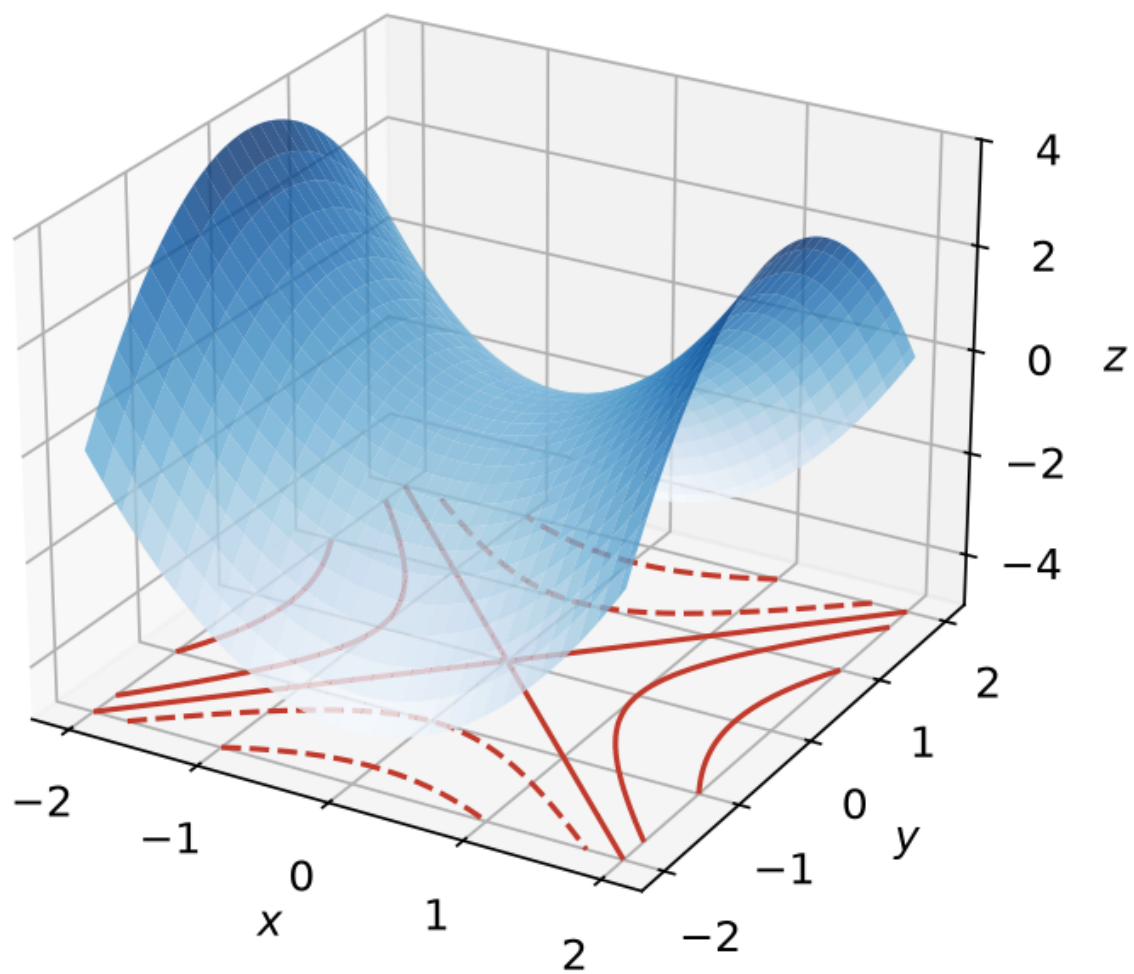
$$f_1(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad f_3(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4},$$

et $f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = f_3(0, 0) = 0$.

1. Calculez $f_1(x, mx)$ pour $x \neq 0$ et $m \in \mathbb{R}$. La fonction f_1 est-elle continue en $(0, 0)$?
2. Montrez que f_1 admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et calculez-les. Que retenir-vous ?
3. Montrez que f_2 est continue en $(0, 0)$.
4. Montrez que f_3 tend vers 0 le long de toute droite passant par l'origine. Calculez ensuite $f_3(y^2, y)$ pour $y \neq 0$ et concluez sur la continuité de f_3 en $(0, 0)$.

Exercice 4 : Lignes de niveau et surface en selle

On considère $f(x, y) = x^2 - y^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Sa surface représentative est dessinée ci-dessous, avec quelques lignes de niveau projetées sur le plan horizontal.



1. Décrivez la ligne de niveau c de f selon que $c > 0$, $c = 0$ ou $c < 0$.
2. Décrivez les sections de la surface par les plans $y = 0$ et $x = 0$.
3. Calculez $\nabla f(0, 0)$. L'origine est-elle un extremum local de f ?
4. On pose $x = \frac{u-v}{\sqrt{2}}$ et $y = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$. Exprimez xy en fonction de u et v . Qu'en déduisez-vous pour la surface $z = 2xy$?

1. Soit $f(x, y) = x e^y$. Écrivez le développement limité à l'ordre 1 de f en $(2, 0)$, puis l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $(2, 0, 2)$.
2. Déduisez-en une valeur approchée de $2,01 e^{-0,02}$.
3. Soit $g(x, y) = x^2 + 2y^2$. Déterminez l'équation du plan tangent P à la surface $z = g(x, y)$ au point d'abscisse 1 et d'ordonnée 1.
4. Montrez que la surface $z = g(x, y)$ est entièrement située au-dessus de P . En quels points touche-t-elle P ?

Exercice 6 : Dérivée selon un vecteur

Soit $f(x, y) = x^2 - xy + 3y^2$ et $a = (1, 2)$.

1. Calculez directement, à partir de la définition, la dérivée de f en a selon le vecteur $w = (1, 1)$.
2. Calculez $\nabla f(a)$ et retrouvez le résultat précédent.
3. Calculez la dérivée de f en a selon le vecteur unitaire $v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.
4. Dans quelle direction unitaire la dérivée de f en a est-elle maximale ? Quelle est cette valeur maximale ? Dans quelles directions unitaires est-elle nulle ?

Exercice 7 : Dérivation le long d'un cercle

Soit $f(x, y) = x^2 y$ et $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$. On pose $g = f \circ \gamma$.

1. Calculez $g'(t)$ à l'aide de la règle de la chaîne, puis vérifiez le résultat en dérivant directement

$$g(t).$$

- Déterminez les valeurs de t pour lesquelles $g'(t) = 0$.
- Déduisez-en la plus grande et la plus petite valeur de $x^2 y$ lorsque le point (x, y) décrit le cercle unité. Précisez les points où elles sont atteintes.

Exercice 8 : Un minimum global par complétion du carré

Soit $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2x$ sur $\mathbb{R}^2$.

- Déterminez les points critiques de f .
- Pour le point critique a trouvé, calculez $f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a)$.
- Montrez que f admet en a un minimum global. Ce minimum est-il atteint en un seul point ?
- La fonction f admet-elle un maximum global ?

Exercice 9 : Dérivées partielles de composées

Dans cet exercice, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 .

- Soit $F(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$. Calculez $\nabla F(x, y)$. Montrez qu'il est colinéaire au vecteur (x, y) .
- Soit $G(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ sur $U = \{x > 0\}$. Montrez que $x \frac{\partial G}{\partial x} + y \frac{\partial G}{\partial y} = 0$ sur U .
- Soit $H(x, y) = g(x + y, xy)$. Exprimez $\frac{\partial H}{\partial x}$ et $\frac{\partial H}{\partial y}$ à l'aide des dérivées partielles de g .

4. Vérifiez ces formules lorsque $g(u, v) = u^2 - 2v$, en calculant H explicitement.

Exercice 10 : Gradient orthogonal aux lignes de niveau

Soit $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ et E la ligne de niveau 4 de f .

1. Montrez que E est une ellipse, paramétrée par $\gamma(t) = (2\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
2. À l'aide de la règle de la chaîne, montrez que $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$ pour tout t .
3. Vérifiez que $M = \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ appartient à E . Déterminez une équation de la tangente à E en M en utilisant le gradient.
4. Plus généralement, soit f de classe C^1 et γ un arc C^1 tracé sur une ligne de niveau de f . Montrez que $\nabla f(\gamma(t))$ est orthogonal à $\gamma'(t)$.

Exercice 11 : Équation de transport et changement de variables linéaire

On cherche les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (E)$$

1. Montrez que $\Phi : (x, y) \rightarrow (x + 2y, y)$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et donnez sa réciproque.
2. Pour f de classe C^1 , on pose $g(u, v) = f(u - 2v, v)$, de sorte que $f(x, y) = g(x + 2y, y)$. Exprimez $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ à l'aide des dérivées partielles de g .

3. Résolvez (E) .

4. Déterminez la solution de (E) qui vérifie $f(x, 0) = \sin x$ pour tout réel x .

Exercice 12 : Coordonnées polaires et équations aux dérivées partielles

Soit $U = \{(x, y) : x > 0\}$ et $V =]0, +\infty[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On admet que $(r, \theta) \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta)$ est une bijection de V sur U , de réciproque $(x, y) \rightarrow (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x})$. Pour f de classe C^1 sur U , on pose $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

1. Exprimez $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ à l'aide de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

2. Montrez que $r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y)$ et que $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = \left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y)$, où $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

3. Déterminez les fonctions f de classe C^1 sur U telles que $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

4. Déterminez les fonctions f de classe C^1 sur U telles que $x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

5. Déterminez les fonctions f de classe C^1 sur U telles que $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 13 : Points critiques d'une fonction cubique

Soit $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminez les points critiques de f .
2. En étudiant $f(t, 0)$, montrez que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.
3. Montrez que $f(1+h, 1+k) + 1 = 3(h^2 - hk + k^2) + h^3 + k^3$.
4. Établissez $h^2 - hk + k^2 \geq \frac{1}{2}(h^2 + k^2)$, puis $|h^3 + k^3| \leq \rho(h^2 + k^2)$ lorsque $h^2 + k^2 \leq \rho^2$.
5. Concluez : f admet-elle un minimum local en $(1, 1)$? Ce minimum est-il global ?

Exercice 14 : Extremums sur un disque fermé

Soit $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$.

1. Déterminez les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$. Lequel appartient à l'intérieur de D ?
2. Montrez que $f(x, y) \geq -\frac{1}{4}$ sur $\mathbb{R}^2$. Précisez le cas d'égalité.
3. Montrez que $f(x, y) \leq 2 - x^2 - x$ sur D , puis que $f \leq \frac{9}{4}$ sur D . Déterminez les points de D où f vaut $\frac{9}{4}$.
4. Calculez le gradient de f en ces points. Pourquoi cela ne contredit-il pas le théorème sur les points critiques ?

Exercice 15 : Droite des moindres carrés

On dispose des quatre points $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$ et $(3, 4)$, notés (x_i, y_i) pour $1 \leq i \leq 4$.
On cherche la droite $y = ax + b$ qui minimise

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^4 (y_i - a x_i - b)^2.$$

1. Calculez les dérivées partielles de F et montrez que tout point critique vérifie $14a + 6b = 18$ et $6a + 4b = 9$.
2. Déterminez l'unique point critique (a_0, b_0) .
3. Montrez que $F(a_0 + h, b_0 + k) = F(a_0, b_0) + \sum_{i=1}^4 (h x_i + k)^2$. Concluez.
4. Calculez la valeur minimale de F .

Exercice 16 : Boîte sans couvercle de volume imposé

On fabrique une boîte parallélépipédique sans couvercle, de volume $\frac{32}{3} \text{ dm}^3$. Sa base mesure x sur y , et sa hauteur vaut z , en décimètres. On veut minimiser l'aire totale S de carton.

1. Montrez que $S = xy + \frac{64}{x} + \frac{64}{y}$, où (x, y) décrit l'ouvert $]0, +\infty[^2$.
2. Déterminez les points critiques de S .
3. À l'aide de l'inégalité arithmético-géométrique $\frac{p+q+s}{3} \geq \sqrt[3]{pqs}$, valable pour $p, q, s > 0$, montrez que $S \geq 48$.
4. Donnez les dimensions de la boîte optimale.

Exercice 17 : Dérivées selon un vecteur sans classe C1

Soit $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

1. Montrez que $|x^3 + y^3| \leq (|x| + |y|)(x^2 + y^2)$, puis que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculez $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
3. Soit $v = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Montrez que $D_v f(0, 0)$ existe et vaut $\cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha$.
4. Comparez $D_v f(0, 0)$ et $\langle \nabla f(0, 0), v \rangle$ pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Que peut-on en conclure sur f ?

Exercice 18 : Relation d'Euler pour les fonctions homogènes

Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est dite homogène de degré α si $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ pour tout $t > 0$ et tout $(x, y) \in U$.

1. Soit f de classe C^1 , homogène de degré α . En dérivant $t \rightarrow f(tx, ty)$, montrez la relation d'Euler : $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$ sur U .
2. Montrez que $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ est homogène de degré 1. Vérifiez la relation d'Euler par un calcul direct.
3. Réciproquement, soit f de classe C^1 sur U vérifiant la relation d'Euler. Pour $(x, y) \in U$ fixé, on pose $\varphi(t) = f(tx, ty)$ sur $]0, +\infty[$. Montrez que $t\varphi'(t) = \alpha \varphi(t)$.
4. Étudiez la dérivée de $t \rightarrow t^{-\alpha} \varphi(t)$ et concluez que f est homogène de degré α .

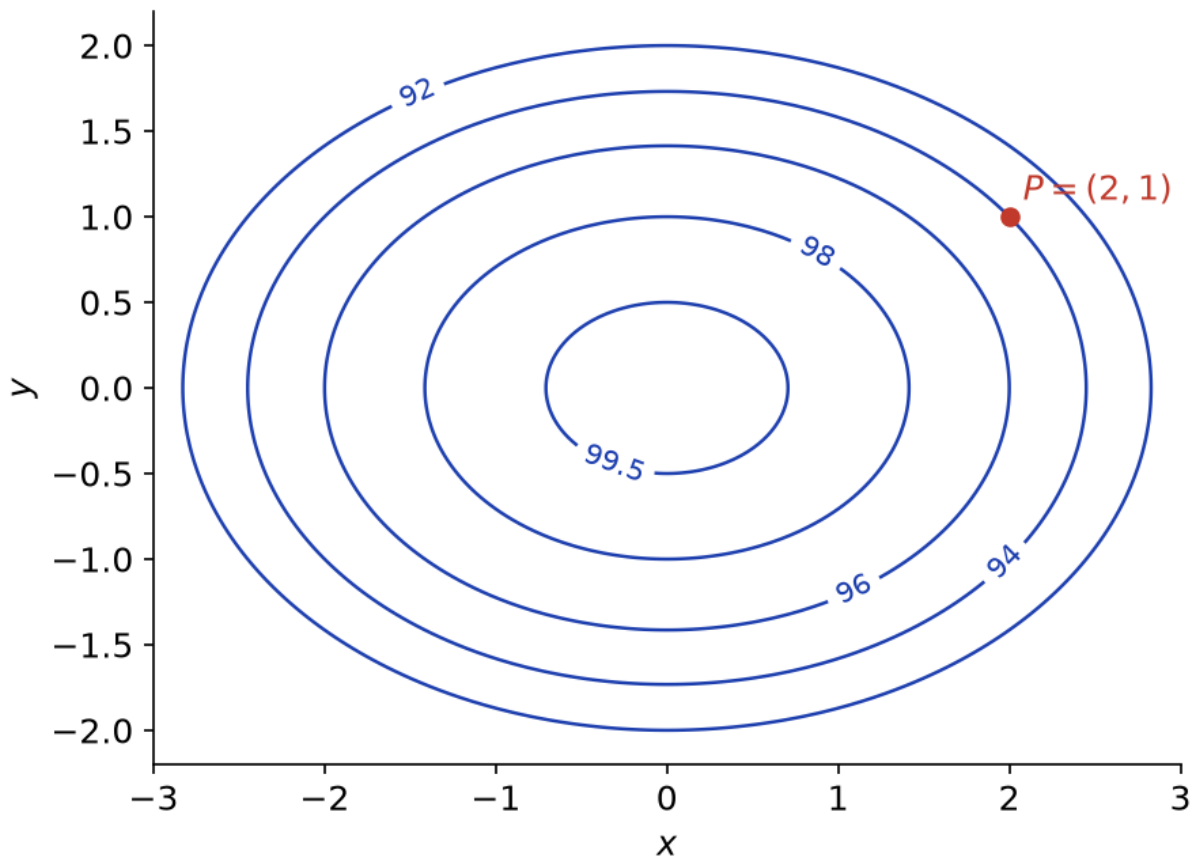
Exercice 19 : Minimum global d'une fonction quartique

Soit $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrez que les points critiques de f vérifient $x^3 + y^3 = 0$, puis $y = -x$. Déterminez-les tous.
2. En étudiant $f(t, t)$ et $f(t, 0)$, montrez que $(0, 0)$ n'est pas un extremum local.
3. Montrez que $(x - y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ et que $x^4 + y^4 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2$.
4. En posant $s = x^2 + y^2$, déduisez-en que $f(x, y) \geq -8$ sur $\mathbb{R}^2$. Déterminez le minimum global de f et les points où il est atteint.
5. La fonction f admet-elle un maximum global ?

Exercice 20 : Chemin de plus forte pente

La température d'une plaque est donnée par $T(x, y) = 100 - x^2 - 2y^2$. Un insecte part du point $P = (2, 1)$ et cherche à se réchauffer le plus vite possible. La figure montre quelques isothermes, c'est-à-dire des lignes de niveau de T .



1. Calculez $\nabla T(P)$. Dans quelle direction unitaire l'insecte doit-il partir ? Quel est alors le taux de variation de la température ?
2. Dans quelles directions unitaires la température ne varie-t-elle pas au premier ordre ? Quelle est l'équation de l'isotherme passant par P ?
3. L'insecte suit un arc $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ tel que $\gamma(0) = P$ et $\gamma'(t) = \nabla T(\gamma(t))$ pour tout $t \geq 0$. Déterminez $x(t)$ et $y(t)$.
4. Montrez que la trajectoire est portée par la parabole $y = \frac{x^2}{4}$. Vers quel point l'insecte se dirige-t-il ?
5. Montrez que $t \rightarrow T(\gamma(t))$ est croissante.

Exercice 21 : Problème : étude complète d'une fonction à cinq points critiques

Soit $f(x, y) = (x^2 - y^2) e^{-(x^2 + y^2)}$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Justifiez que f est de classe C^1 . Comparez $f(-x, y)$, $f(x, -y)$ et $f(y, x)$ avec $f(x, y)$.
2. Calculez les dérivées partielles de f . Mettez-les sous forme factorisée.
3. Montrez que f possède exactement cinq points critiques.
4. Déterminez l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point d'abscisse 1 et d'ordonnée 1, puis au point d'abscisse 1 et d'ordonnée 0.
5. En passant en coordonnées polaires, montrez que $|f(x, y)| \leq (x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)} \leq \frac{1}{e}$.
6. Déduisez-en le maximum et le minimum globaux de f et les points où ils sont atteints.
7. L'origine est-elle un extremum local ? Déterminez la limite de $f(x, y)$ lorsque $|(x, y)| \rightarrow +\infty$.
8. Donnez la direction unitaire de plus forte croissance de f au point $(1, 1)$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [fonctions de deux variables, cours de maths sup](#)

- À maîtriser avant : [Dérivabilité et convexité](#), [Espaces préhilbertiens réels](#)
- Chapitre précédent : [Espaces préhilbertiens réels](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)