

Fonctions de deux variables

I. Fonctions de deux variables : ouverts et continuité

Dans tout le chapitre, on travaille dans le plan $\mathbb{R}^2$. Une fonction de deux variables associe à un point (x, y) d'une partie U de $\mathbb{R}^2$ un nombre réel $f(x, y)$. Pour parler de limite, il faut d'abord mesurer la distance entre deux points. On utilise ici la norme euclidienne.

Définition :

La norme euclidienne de $u = (x, y)$ est $|u| = \sqrt{x^2 + y^2}$. La distance entre a et b vaut $|b - a|$. Pour $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, la **boule ouverte** de centre a et de rayon r est

$$B(a, r) = \{ u \in \mathbb{R}^2 : |u - a| < r \}.$$

Une partie U de $\mathbb{R}^2$ est un **ouvert** si, pour tout $a \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$.

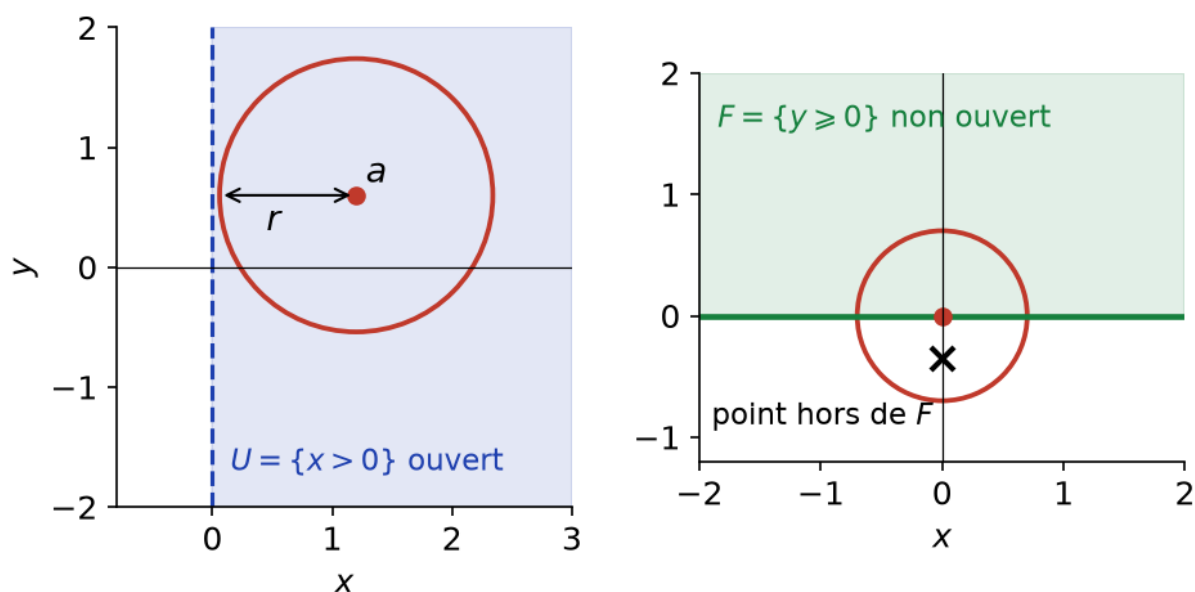
Autrement dit, un ouvert contient, autour de chacun de ses points, un petit disque entier. Ainsi, on peut s'éloigner un peu de a dans toutes les directions sans sortir de U . C'est exactement ce qu'il faut pour dériver dans toutes les directions.

Exemple :

Le demi-plan $U = \{(x, y) : x > 0\}$ est ouvert. En effet, si $a = (a_1, a_2) \in U$, on pose

$r = a_1$. Pour $(x, y) \in B(a, r)$, on a $|x - a_1| \leq |(x, y) - a| < a_1$, donc $x > 0$. En revanche, le demi-plan fermé $F = \{(x, y) : y \geq 0\}$ n'est pas ouvert : toute boule centrée en $(0, 0)$ contient un point $(0, -\epsilon)$ qui n'est pas dans F .

La figure ci-dessous illustre ces deux situations. À gauche, une boule entière tient dans U ; à droite, aucune boule centrée à l'origine ne tient dans F .



Les boules ouvertes, le plan tout entier, $\mathbb{R}^2$ privé d'un point et les produits $I \times J$ d'intervalles ouverts sont des ouverts. De plus, une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

Définition :

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$. On dit que f est **continue en** a si

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \\ &,\exists \delta > 0, \\ &,\forall u \in U, |u - a| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(a)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

La fonction f est continue sur U si elle est continue en tout point de U .

Les théorèmes usuels s'étendent sans peine. Les projections $(x, y) \rightarrow x$ et $(x, y) \rightarrow y$ sont continues. Par conséquent, les sommes, produits, quotients à dénominateur non nul et composées par des fonctions continues d'une variable sont continus. Par exemple, $(x, y) \rightarrow e^{xy} \cos(x + y^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Méthode :

Pour étudier la continuité en $(0, 0)$ d'une fonction définie par un quotient :

1. Pour prouver la continuité, on majore $|f(x, y) - f(0, 0)|$ par une quantité qui tend vers 0, par exemple $|x|$, $|y|$ ou $\sqrt{x^2 + y^2}$. On utilise souvent $|x| \leq |(x, y)|$ et $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. Pour prouver la discontinuité, on trouve deux chemins qui tendent vers $(0, 0)$ le long desquels f a des limites différentes.

Exemple :

Soit $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Sur la droite $y = mx$, on obtient $f(x, mx) = \frac{m}{1 + m^2}$, qui dépend de m . Donc f n'est pas continue en $(0, 0)$. En revanche, $g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ vérifie $|g(x, y)| \leq |y|$, donc g se prolonge par continuité en posant $g(0, 0) = 0$.

Attention :

Tester toutes les droites passant par l'origine ne suffit pas. Par exemple, $\frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ tend vers 0 le long de chaque droite, mais vaut $\frac{1}{2}$ sur la parabole $x = y^2$.

II. Représentation graphique d'une fonction de deux variables

Une fonction d'une variable se représente par une courbe. Pour deux variables, il faut une dimension de plus.

Définition :

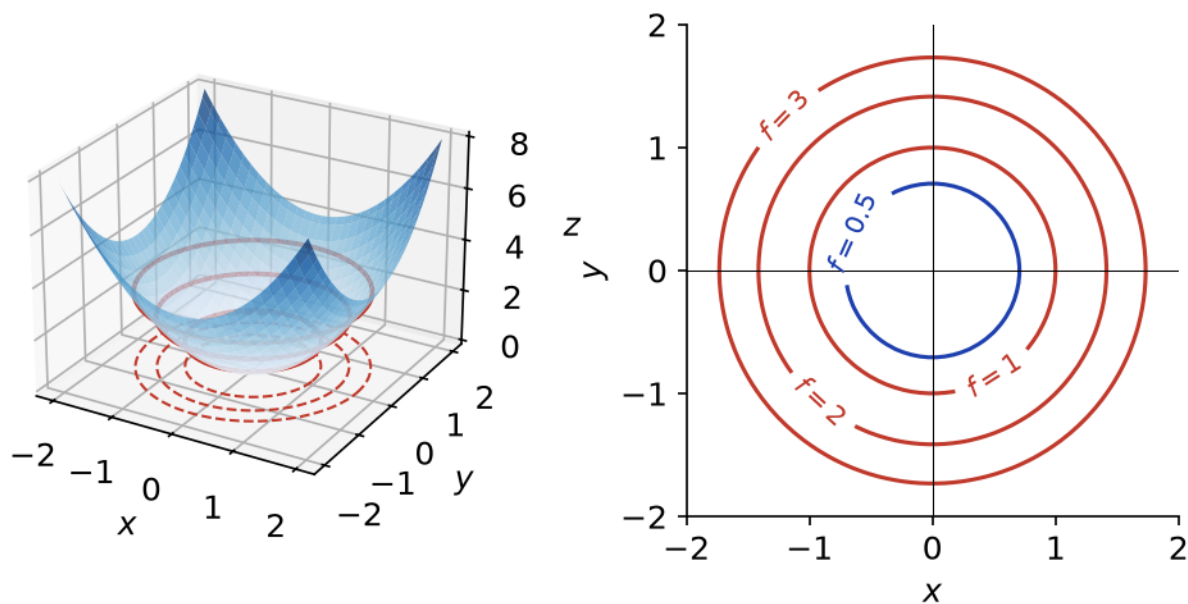
Le **graphe** de $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est la surface $S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in U\}$ de l'espace, d'équation $z = f(x, y)$. Pour $c \in \mathbb{R}$, la **ligne de niveau** c de f est l'ensemble $\{(x, y) \in U : f(x, y) = c\}$.

Une ligne de niveau s'obtient en coupant la surface par le plan horizontal $z = c$, puis en projetant la section sur le plan (xOy) . C'est le principe des courbes de niveau d'une carte topographique. Ainsi, des lignes de niveau serrées signalent une pente forte.

Exemple :

Pour $f(x, y) = x^2 + y^2$, la surface est un paraboloïde de révolution. La ligne de niveau c est vide si $c < 0$, réduite à l'origine si $c = 0$, et c'est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{c}$ si $c > 0$.

Comme le montre la figure ci-dessous, les cercles de niveau s'écartent de moins en moins : en effet, le rayon $\sqrt{c}$ croît de plus en plus lentement, car la pente du paraboloïde augmente quand on s'éloigne de l'origine.



On étudie aussi les **sections verticales**. Par exemple, la section par le plan $y = b$ est la courbe de la fonction partielle $x \rightarrow f(x, b)$. Cette idée conduit directement aux dérivées partielles.

III. Dérivées partielles et fonctions de classe C^1

1. Dérivées partielles en un point

Dans cette partie, U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2) \in U$. Comme U est ouvert, la fonction $t \rightarrow f(a_1 + t, a_2)$ est définie sur un intervalle ouvert contenant 0 .

Définition :

La **dérivée partielle** de f par rapport à x en a est, si elle existe,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}.$$

On définit de même $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t}$.

En pratique, on dérive par rapport à x en traitant y comme une constante. Par exemple, pour $f(x, y) = x^3 y + \sin(xy)$, on trouve $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + y \cos(xy)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + x \cos(xy)$.

Attention :

L'existence des dérivées partielles en un point n'entraîne pas la continuité en ce point. La fonction f de la partie I, égale à $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ hors de l'origine, vérifie $f(t, 0) = f(0, t) = 0$. Ses deux dérivées partielles en $(0, 0)$ existent et valent 0, et pourtant f n'est pas continue en $(0, 0)$.

2. Dérivée selon un vecteur

Définition :

Soit $v \in \mathbb{R}^2$ non nul. La **dérivée de f en a selon le vecteur v** est, si elle existe,

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Les dérivées partielles sont donc les dérivées selon les vecteurs de la base canonique $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Géométriquement, $D_v f(a)$ est la pente de la surface quand on part de a dans la direction v .

3. Fonctions de classe C^1 et développement limité

Définition :

La fonction f est **de classe C^1** sur l'ouvert U si ses deux dérivées partielles existent en tout point de U et sont continues sur U .

Les opérations usuelles conservent le caractère C^1 . Par conséquent, les polynômes en x et y , et plus généralement toutes les expressions construites avec les fonctions usuelles, sont de classe C^1 là où elles sont définies et où les fonctions d'une variable utilisées sont dérivables.

Théorème :

Si f est de classe C^1 sur l'ouvert U et $a \in U$, alors f admet un **développement limité à l'ordre 1** en a : quand $(h, k) \rightarrow (0, 0)$,

$$f(a_1 + h, a_2 + k) = f(a) + h \frac{\partial f}{\partial x}(a) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(|(h, k)|).$$

En particulier, f est continue sur U .

Démonstration :

Soit $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$, et $|(h, k)| < r$. On décompose l'accroissement en deux étapes :

$$f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a) = [f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1, a_2 + k)] + [f(a_1, a_2 + k) - f(a_1, a_2)].$$

D'abord, le théorème des accroissements finis appliqué à $t \rightarrow f(a_1 + t, a_2 + k)$ donne un

$\theta \in]0, 1[$ tel que le premier crochet vaille $h \frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + \theta h, a_2 + k)$. De même, le second crochet vaut $k \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2 + \theta' k)$. Ensuite, par continuité des dérivées partielles en a , ces coefficients s'écrivent $\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \varepsilon_1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \varepsilon_2$, avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$. Enfin, $|h \varepsilon_1 + k \varepsilon_2| \leq |(h, k)| (|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|)$, ce qui est bien un $o(|(h, k)|)$.

4. Plan tangent

Le développement limité dit qu'au voisinage de a , la surface $z = f(x, y)$ est très proche d'un plan. C'est la version à deux variables de la tangente.

Définition :

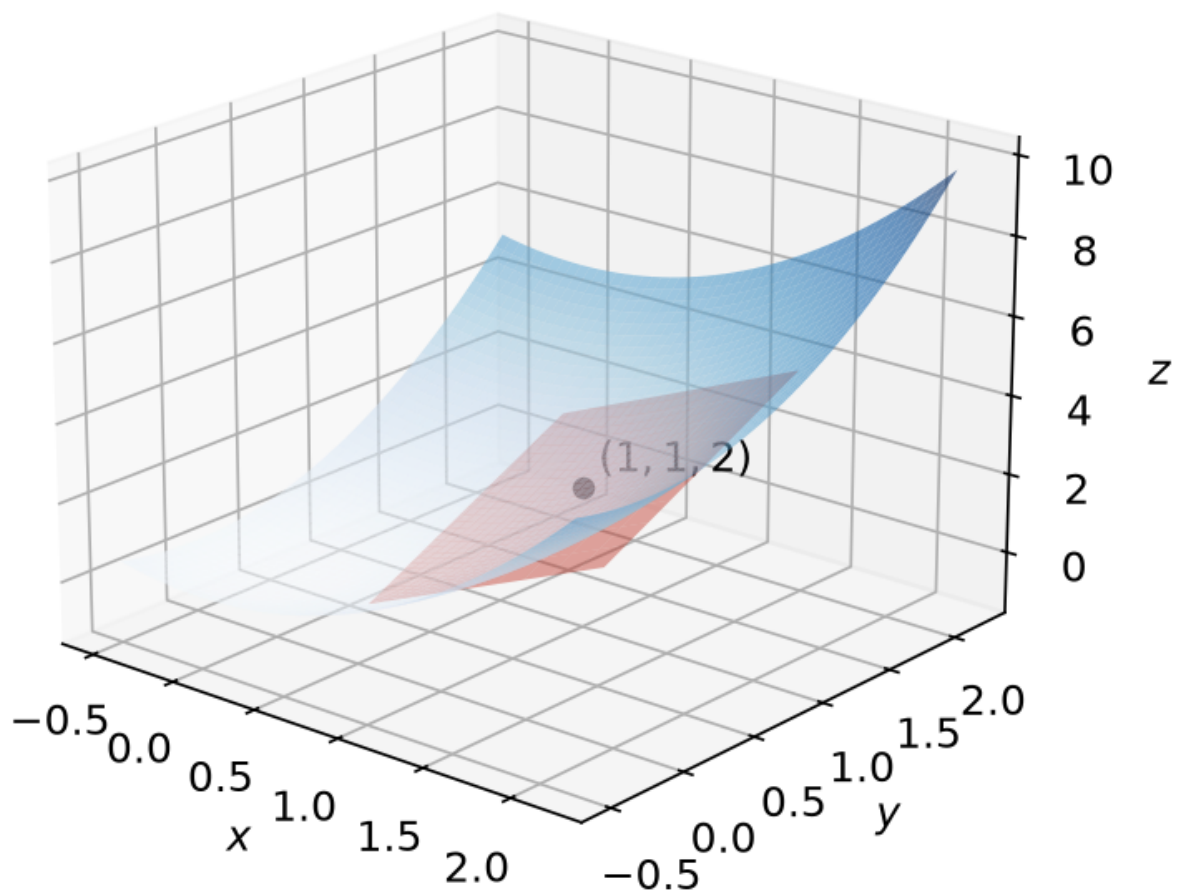
Si f est de classe C^1 , le **plan tangent** à la surface $z = f(x, y)$ au point $(a_1, a_2, f(a))$ a pour équation

$$z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) (x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) (y - a_2).$$

Exemple :

Pour $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $a = (1, 1)$, on a $f(a) = 2$ et les deux dérivées partielles valent 2 . Le plan tangent a donc pour équation $z = 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1)$, c'est-à-dire $z = 2x + 2y - 2$.

La figure suivante montre ce plan tangent. Il touche le paraboloïde au point $(1, 1, 2)$ et reste en dessous de lui, car $f(x, y) - (2x + 2y - 2) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0$.



IV. Gradient et direction de plus forte croissance

Définition :

Si f est de classe C^1 sur U , le **gradient** de f en a est le vecteur

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}.$$

Le développement limité s'écrit alors $f(a + u) = f(a) + \langle \nabla f(a), u \rangle + o(|u|)$.

Proposition :

Si f est de classe C^1 sur U , alors pour tout $a \in U$ et tout vecteur v non nul, la dérivée selon v existe et

$$D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Démonstration :

On applique le développement limité avec $u = tv$:

$f(a + tv) - f(a) = t \langle \nabla f(a), v \rangle + o(t)$. On divise par t , puis on fait tendre t vers 0.

Cette formule a une conséquence géométrique importante. Soit v un vecteur **unitaire**. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|D_v f(a)| \leq |\nabla f(a)|$, avec égalité si et seulement si v est colinéaire au gradient.

Propriété :

Si $\nabla f(a) \neq 0$, alors, parmi les vecteurs unitaires, $D_v f(a)$ est maximale pour $v = \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$.

Ainsi, le gradient indique la **direction de plus forte croissance** de f , et sa norme donne le taux de croissance dans cette direction. De plus, la dérivée est nulle dans les directions orthogonales au gradient.

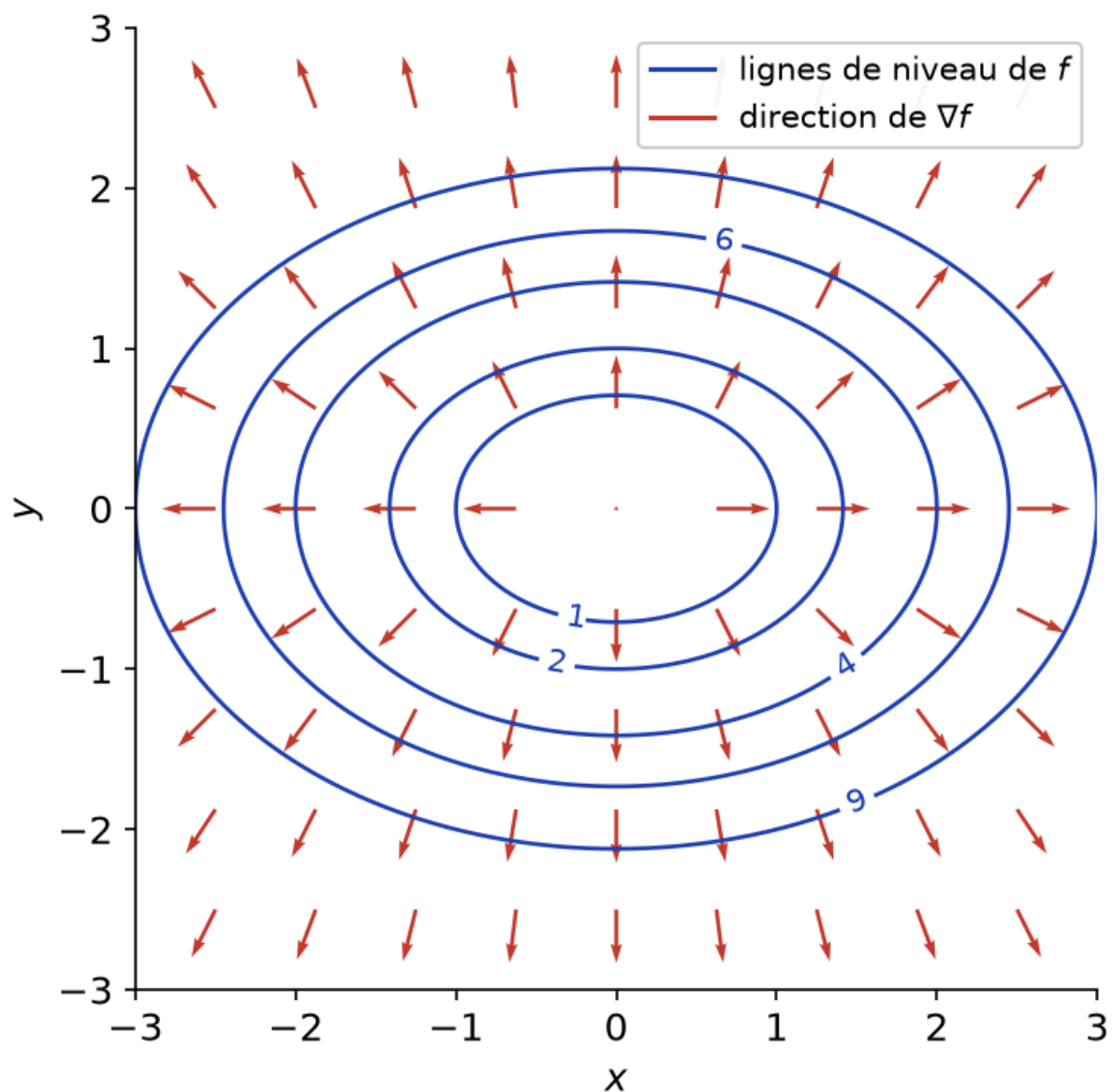
Les directions orthogonales au gradient sont celles où f ne varie pas au premier ordre. Ce sont donc les directions des lignes de niveau. Autrement dit, **le gradient est orthogonal aux lignes de niveau**, ce

que l'on justifiera avec la règle de la chaîne.

Exemple :

Pour $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, on a $\nabla f(x, y) = (2x, 4y)$. En $a = (1, 1)$, le gradient vaut $(2, 4)$ et sa norme vaut $2\sqrt{5}$. Par conséquent, la pente maximale en a vaut $2\sqrt{5}$. Elle est atteinte dans la direction $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$.

Sur la figure ci-dessous, les ellipses sont les lignes de niveau de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$. En chaque point, la flèche rouge indique la direction du gradient : elle coupe les ellipses à angle droit et pointe vers les valeurs croissantes.



V. Règle de la chaîne et changements de variables

1. Dérivation le long d'un arc

Théorème :

Soit f de classe C^1 sur l'ouvert U , et $\gamma : t \rightarrow (x(t), y(t))$ une fonction de classe C^1 d'un intervalle I dans U . Alors $g = f \circ \gamma$ est de classe C^1 sur I et, pour tout $t \in I$,

$$g'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

Démonstration :

Fixons $t \in I$ et notons $u(s) = \gamma(t+s) - \gamma(t)$. Comme γ est dérivable, $u(s) = s\gamma'(t) + o(s)$, donc $|u(s)| = O(s)$. Le développement limité de f en $\gamma(t)$ donne alors $g(t+s) - g(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), u(s) \rangle + o(s)$. Par conséquent, $g(t+s) - g(t) = s \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle + o(s)$. Enfin, l'expression obtenue pour g' est continue par composition, donc g est C^1 .

Cette règle justifie l'orthogonalité annoncée. En effet, si γ parcourt une ligne de niveau, alors $f \circ \gamma$ est constante. Sa dérivée est nulle, donc $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$: le gradient est orthogonal au vecteur tangent.

Exemple :

Soit $f(x, y) = x^2 y$ et $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. La règle de la chaîne donne $g'(t) = -\sin t \cdot 2 \cos t \sin t + \cos t \cdot \cos^2 t = \cos t (\cos^2 t - 2 \sin^2 t)$. On retrouve bien la dérivée de $g(t) = \cos^2 t \sin t$.

2. Dérivées partielles d'une composée

On applique maintenant la règle précédente en fixant une variable. Soit φ et ψ de classe C^1 sur un ouvert V , à valeurs telles que $(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in U$. On pose $g(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$.

Théorème :

La fonction g est de classe C^1 sur V et

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi, \psi) + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi, \psi), \quad \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi, \psi) + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi, \psi).$$

En effet, pour v fixé, $u \rightarrow (\varphi(u, v), \psi(u, v))$ est un arc de classe C^1 , et on applique la règle de la chaîne.

3. Coordonnées polaires

Le changement de variables le plus utilisé est le passage en coordonnées polaires : $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. On pose $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Proposition :

Si f est de classe C^1 , alors, en notant f_x et f_y les dérivées partielles évaluées en $(r \cos \theta, r \sin \theta)$,

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos \theta f_x + \sin \theta f_y, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r \sin \theta f_x + r \cos \theta f_y.$$

Méthode :

Pour résoudre une équation aux dérivées partielles par changement de variables :

1. On pose $f(x, y) = g(u, v)$, où (u, v) sont les nouvelles variables, et on vérifie que le changement est une bijection C^1 de réciproque C^1 entre les ouverts concernés.
2. On exprime les dérivées partielles de f à l'aide de celles de g grâce à la règle de la chaîne.

3. On substitue dans l'équation. On obtient souvent une équation simple, comme $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$.

4. On résout, puis on revient aux variables x et y .

Exemple :

Cherchons les f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$. On pose $u = x + y$, $v = x - y$. Ce changement est bijectif, de réciproque $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$. Avec $f(x, y) = g(x + y, x - y)$, on obtient $f_x = g_u + g_v$ et $f_y = g_u - g_v$. L'équation devient donc $g_v = 0$. Ainsi, $g(u, v) = h(u)$ avec h de classe C^1 , et $f(x, y) = h(x + y)$.

Dans cet exemple, on utilise un fait important. Si $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$, alors, pour u fixé, la fonction $v \rightarrow g(u, v)$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Elle est donc constante, égale à $g(u, 0)$.

VI. Extremums et points critiques

Définition :

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$. On dit que f admet un **maximum local** en a s'il existe $r > 0$ tel que $f(u) \leq f(a)$ pour tout $u \in U \cap B(a, r)$. Le maximum est **global** si $f(u) \leq f(a)$ pour tout $u \in U$. On définit de même les minimums. Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

Définition :

Si f est de classe C^1 sur l'ouvert U , un **point critique** de f est un point $a \in U$ tel que $\nabla f(a) = 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.

Théorème :

Soit f de classe C^1 sur un **ouvert** U . Si f admet un extremum local en $a \in U$, alors a est un point critique de f .

Démonstration :

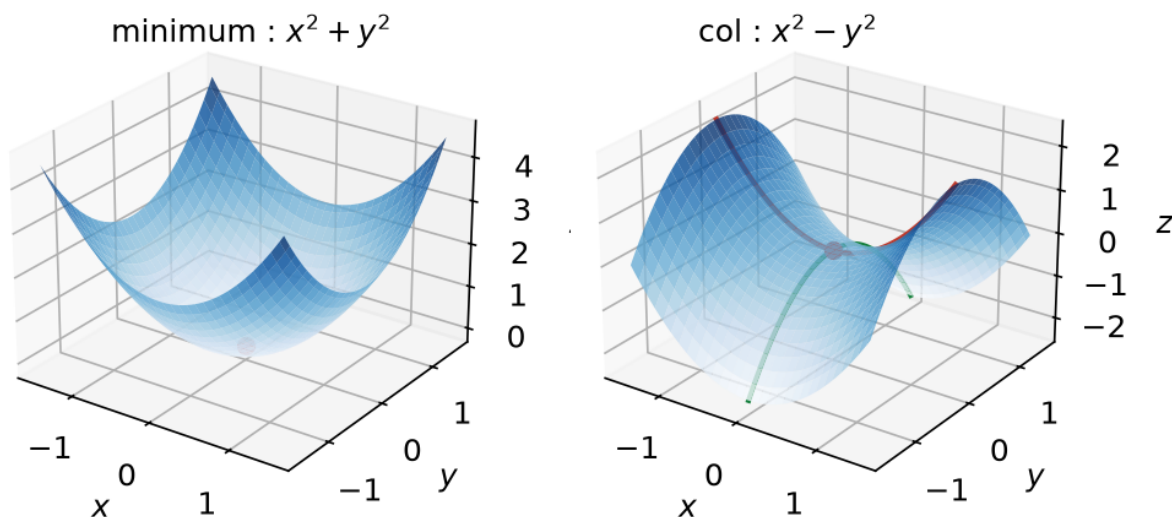
Supposons que f admette un maximum local en a . Comme U est ouvert, la fonction $\varphi : t \rightarrow f(a_1 + t, a_2)$ est définie sur un intervalle ouvert contenant 0 . De plus, elle admet un maximum local en 0 . Or elle est dérivable en 0 , donc $\varphi'(0) = 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$. On raisonne de même avec la seconde variable.

Le plan tangent en un extremum local est donc horizontal. Cependant, la réciproque est fausse, et l'hypothèse d'ouvert est indispensable.

Attention :

1. Un point critique n'est pas toujours un extremum. Pour $f(x, y) = x^2 - y^2$, l'origine est critique. Pourtant, $f(t, 0) = t^2 > 0$ et $f(0, t) = -t^2 < 0$ pour $t \neq 0$: c'est un **point col**.
2. Sur un ensemble qui n'est pas ouvert, un extremum peut être atteint au bord sans que le gradient s'annule. Ainsi, $f(x, y) = x$ sur le disque fermé unité atteint son maximum en $(1, 0)$, alors que $\nabla f = (1, 0)$.

La figure ci-dessous compare un minimum et un col. Dans les deux cas, le plan tangent à l'origine est horizontal. En revanche, la surface du col monte dans la direction de l'axe des abscisses et descend dans la direction de l'axe des ordonnées.



Méthode :

Pour trouver et classer les extremums d'une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert :

1. On résout le système $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$: les extremums locaux sont parmi ses solutions.
2. En chaque point critique a , on étudie le signe de $f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a)$ pour (h, k) petit.
3. Si ce signe est constant, on a un extremum local. S'il change selon la direction, par exemple sur deux droites, ce n'est pas un extremum.
4. Pour un extremum global, on cherche une inégalité valable sur tout U : complétion du carré, majoration, passage en polaires.

Exemple :

Soit $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3y$. Le système s'écrit $2x + y = 0$ et $x + 2y - 3 = 0$. Il donne l'unique point critique $a = (-1, 2)$, avec $f(a) = -3$. De plus, un calcul direct fournit

$$f(-1 + h, 2 + k) - f(a) = h^2 + hk + k^2 = \left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{4} \geq 0.$$

Par conséquent, f admet en a un minimum global, égal à -3 .

Remarque :

La classification systématique des points critiques à l'aide des dérivées secondes sera vue en seconde année. En première année, on conclut sur des exemples, par un calcul direct du signe de l'accroissement.

Ce qu'il faut retenir

- Un ouvert contient une boule autour de chacun de ses points : c'est le cadre naturel de la dérivation.
- Pour la continuité en un point, on majore ; pour la discontinuité, on exhibe deux chemins de limites différentes.
- La surface $z = f(x, y)$ se lit grâce à ses lignes de niveau et à ses sections verticales.
- Une dérivée partielle se calcule en dérivant par rapport à une variable, l'autre étant fixée.
- Une fonction C^1 admet un développement limité à l'ordre 1 :
$$f(a + u) = f(a) + \langle \nabla f(a), u \rangle + o(|u|).$$
- Le plan tangent en a a pour équation $z = f(a) + \partial_x f(a)(x - a_1) + \partial_y f(a)(y - a_2)$.

- Pour f de classe C^1 , $D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle$; le gradient donne la direction de plus forte croissance et il est orthogonal aux lignes de niveau.
- Règle de la chaîne : $(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$, d'où les formules des changements de variables, en particulier en polaires.
- Sur un ouvert, tout extremum local d'une fonction C^1 est un point critique ; la réciproque est fausse (point col).

Questions fréquentes sur fonctions de deux variables

Une fonction qui admet des dérivées partielles en un point est-elle continue en ce point ?

Non. La fonction égale à $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ hors de l'origine et à 0 en l'origine a deux dérivées partielles nulles en $(0, 0)$, mais elle n'y est pas continue. En revanche, une fonction de classe C^1 sur un ouvert est continue, car elle admet un développement limité à l'ordre 1.

Comment montrer qu'une fonction de deux variables n'a pas de limite en l'origine ?

On cherche deux chemins qui mènent à l'origine le long desquels la fonction a des limites différentes, par exemple deux droites $y = mx$. Si toutes les droites donnent la même limite, il faut essayer d'autres courbes, comme une parabole $x = y^2$.

Un point critique est-il toujours un extremum ?

Non. La fonction $x^2 - y^2$ a un gradient nul en $(0, 0)$, mais elle prend des valeurs positives sur l'axe des abscisses et négatives sur l'axe des ordonnées : c'est un point col. Il faut donc étudier le signe de $f(a + h) - f(a)$ pour conclure.

Pourquoi le gradient est-il orthogonal aux lignes de niveau ?

Si un arc γ reste sur une ligne de niveau, la fonction $f \circ \gamma$ est constante. La règle de la chaîne donne alors $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$. Le gradient est donc orthogonal au vecteur tangent à la ligne de niveau.

Pour aller plus loin en maths sup

- Les énoncés : [exercices de maths sup sur fonctions de deux variables](#)
- À maîtriser avant : [Dérivabilité et convexité](#), [Espaces préhilbertiens réels](#)
- Chapitre précédent : [Espaces préhilbertiens réels](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)