

Fonctions de deux variables

Corrigé de l'exercice 1 : Calcul de dérivées partielles et de gradients

1. La fonction f est une somme de produits de polynômes et de l'exponentielle d'un polynôme. Elle est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. En dérivant à y fixé, puis à x fixé :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3 + y e^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 + x e^{xy}.$$

En $(1, 0)$, on obtient $0 + 0 = 0$ et $0 + 1 = 1$. **Donc** $\nabla f(1, 0) = (0, 1)$.

2. La fonction $u = 1 + x^2 + y^2$ est polynomiale et strictement positive, et $\ln$ est C^1 sur $]0, +\infty[$. Par composition, g est C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Ensuite,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}.$$

En $(1, 1)$, on trouve $\nabla g(1, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

3. Sur U , le quotient y/x est C^1 et $\arctan$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, donc h est C^1 . Comme $\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, on a

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Donc $\nabla h(1, 1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

4. Sur U , $(x, y) \rightarrow y \ln x$ est C^1 , et l'exponentielle aussi : k est donc C^1 . À y fixé, $\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{y}{x} e^{y \ln x} = y x^{y-1}$. À x fixé, $\frac{\partial k}{\partial y} = \ln x \cdot x^y$. En $(e, 1)$, on obtient $1 \cdot e^0 = 1$ et $1 \cdot e = e$. **Ainsi**, $\nabla k(e, 1) = (1, e)$.

Point de méthode : pour x^y , on revient toujours à la forme exponentielle $e^{y \ln x}$; on évite ainsi de confondre la dérivée d'une puissance et celle d'une exponentielle.

Corrigé de l'exercice 2 : Ouverts du plan

1. Soit $a = (a_1, a_2) \in A$ et $r = \min(a_1, a_2) > 0$. Soit $u = (x, y) \in B(a, r)$. D'abord, $|x - a_1| \leq |u - a| < r \leq a_1$, donc $x > a_1 - a_1 = 0$. De même, $|y - a_2| < r \leq a_2$, donc $y > 0$. Ainsi, $B(a, r) \subset A$. **Donc A est ouvert.**
2. Le point $(0, 0)$ appartient à B . Soit $r > 0$. Le point $(0, -r/2)$ est dans $B((0, 0), r)$, mais pas dans B . Aucune boule centrée en l'origine n'est donc incluse dans B . **Par conséquent, B n'est pas ouvert.**
3. Soit $a \in C$, c'est-à-dire $|a| < 2$. On pose $r = 2 - |a| > 0$. Pour $u \in B(a, r)$, l'inégalité triangulaire donne $|u| \leq |u - a| + |a| < r + |a| = 2$. Donc $u \in C$. **L'ensemble C est ouvert : c'est la boule ouverte $B(0, 2)$.**
4. Soit $a \neq (0, 0)$ et $r = |a| > 0$. Si $(0, 0)$ appartenait à $B(a, r)$, on aurait $|a| < |a|$, ce qui est absurde. Donc $B(a, r) \subset D$. **Ainsi, D est ouvert.**

Point de méthode : pour montrer qu'une partie est ouverte, on fixe un point quelconque et on exhibe un rayon explicite ; pour montrer le contraire, il suffit d'un point dont aucune boule ne tient dans la partie.

Corrigé de l'exercice 3 : Continuité en l'origine

1. Pour $x \neq 0$, $f_1(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$. Cette valeur dépend de m : elle vaut 0 pour $m = 0$ et $\frac{1}{2}$ pour $m = 1$. Or ces deux droites mènent à l'origine. Si f_1 était continue en $(0, 0)$, les deux limites seraient égales à $f_1(0, 0)$. **Donc f_1 n'est pas continue en $(0, 0)$.**

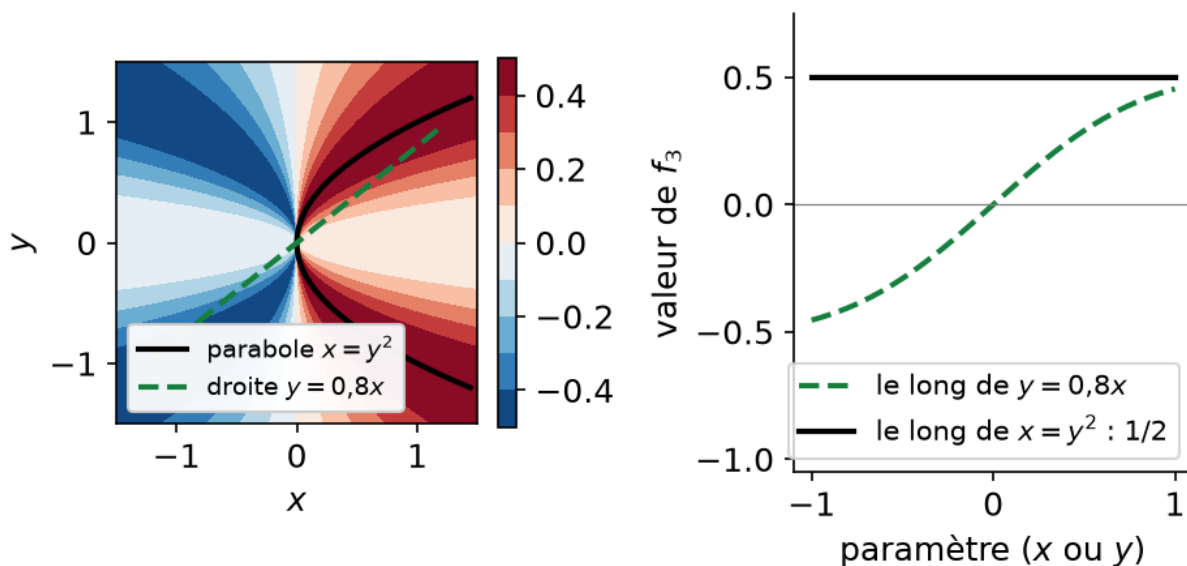
2. Pour $t \neq 0$, on a $f_1(t, 0) = 0$ et $f_1(0, t) = 0$. Les taux d'accroissement $\frac{f_1(t, 0) - f_1(0, 0)}{t}$ et $\frac{f_1(0, t) - f_1(0, 0)}{t}$ sont donc nuls. **Ainsi,**
 $\frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) = 0$. On retient qu'une fonction peut admettre des dérivées partielles en un point sans y être continue : les dérivées partielles ne regardent que deux directions.
3. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a $x^2 \leq x^2 + y^2$, donc $|f_2(x, y)| \leq |y| \leq |(x, y)|$. Soit $\varepsilon > 0$; avec $\delta = \varepsilon$, $|(x, y)| < \delta$ entraîne $|f_2(x, y) - 0| < \varepsilon$. **Donc f_2 est continue en $(0, 0)$.**
4. Sur l'axe $x = 0$, f_3 est nulle. Sur la droite $y = mx$, avec $x \neq 0$,

$$f_3(x, mx) = \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^4 x^4} = \frac{m^2 x}{1 + m^4 x^2} \quad [x \rightarrow 0] 0.$$

Donc f_3 tend vers 0 le long de toute droite. Cependant, pour $y \neq 0$,

$f_3(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}$. Or $(y^2, y) \rightarrow (0, 0)$ quand $y \rightarrow 0$. **Par conséquent, f_3 n'est pas continue en $(0, 0)$.**

La figure ci-dessous représente les valeurs de f_3 . Le long de la droite, les valeurs passent par 0 à l'origine ; en revanche, le long de la parabole, elles restent égales à $\frac{1}{2}$.



Corrigé de l'exercice 4 : Lignes de niveau et surface en selle

1. Si $c > 0$, la ligne de niveau $x^2 - y^2 = c$ est une hyperbole dont les deux branches coupent l'axe des abscisses en $(\pm\sqrt{c}, 0)$. Si $c < 0$, c'est l'hyperbole $y^2 - x^2 = -c$, dont les branches coupent l'axe des ordonnées en $(0, \pm\sqrt{-c})$. Enfin, si $c = 0$, l'équation $(x - y)(x + y) = 0$ donne **la réunion des deux droites $y = x$ et $y = -x$** , qui sont les asymptotes communes de toutes ces hyperboles.
2. Dans le plan $y = 0$, la section a pour équation $z = x^2$: c'est une parabole tournée vers le haut. Dans le plan $x = 0$, on obtient $z = -y^2$, parabole tournée vers le bas. **La surface monte selon l'axe des abscisses et descend selon l'axe des ordonnées : elle a la forme d'une selle de cheval.**
3. On a $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$, donc $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$: l'origine est un point critique. Pourtant, pour $t \neq 0$, $f(t, 0) = t^2 > 0 = f(0, 0)$ et $f(0, t) = -t^2 < 0 = f(0, 0)$. Dans toute boule centrée en l'origine, f prend donc des valeurs plus grandes et plus petites que $f(0, 0)$. **L'origine n'est pas un extremum local : c'est un point col.**
4. On calcule $xy = \frac{(u-v)(u+v)}{2} = \frac{u^2 - v^2}{2}$, d'où $2xy = u^2 - v^2$. Or le passage de (u, v) à (x, y) est la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$. **Ainsi, la surface $z = 2xy$ est la même selle, tournée d'un huitième de tour autour de l'axe vertical.**

Corrigé de l'exercice 5 : Plan tangent et approximation affine

1. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, avec $\frac{\partial f}{\partial x} = e^y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x e^y$. En $(2, 0)$:
 $f(2, 0) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 0) = 2$. Le théorème du développement limité à l'ordre 1 donne

$$f(2 + h, k) = 2 + h + 2k + o(|(h, k)|).$$

Le plan tangent a pour équation $z = 2 + (x - 2) + 2y$, soit $z = x + 2y$.

2. On a $2,01 e^{-0,02} = f(2 + 0,01, -0,02)$. Avec $h = 0,01$ et $k = -0,02$, l'approximation

affine donne $2 + 0,01 - 0,04$. **Donc** $2,01 e^{-0,02} \approx 1,97$. La calculatrice donne d'ailleurs environ $1,9702$.

3. On a $g(1, 1) = 3$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = 4y$, qui valent 2 et 4 en $(1, 1)$. Le plan tangent s'écrit $z = 3 + 2(x - 1) + 4(y - 1)$. **Donc P a pour équation**
 $z = 2x + 4y - 3$.

4. On calcule la différence :

$$g(x, y) - (2x + 4y - 3) = (x^2 - 2x + 1) + 2(y^2 - 2y + 1) = (x - 1)^2 + 2(y - 1)^2.$$

Cette quantité est positive, et elle est nulle si et seulement si $x = 1$ et $y = 1$. **La surface est donc au-dessus de P , et elle ne le touche qu'au point $(1, 1, 3)$.**

Corrigé de l'exercice 6 : Dérivée selon un vecteur

1. On a $f(a) = 1 - 2 + 12 = 11$. Ensuite, on développe :

$$f(1 + t, 2 + t) = (1 + t)^2 - (1 + t)(2 + t) + 3(2 + t)^2 = 11 + 11t + 3t^2.$$

Le taux $\frac{f(a + tw) - f(a)}{t} = 11 + 3t$ tend vers 11 . **Donc** $D_w f(a) = 11$.

2. On a $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 6y$. **Donc** $\nabla f(a) = (0, 11)$. Comme f est polynomiale, elle est C^1 , et la formule du cours donne $D_w f(a) = \langle (0, 11), (1, 1) \rangle = 11$. On retrouve bien le résultat.

3. De même, $D_v f(a) = 0 \times \frac{3}{5} + 11 \times \frac{4}{5}$. **Donc** $D_v f(a) = \frac{44}{5}$.

4. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour v unitaire, $D_v f(a) \leq |\nabla f(a)| = 11$, avec égalité si et seulement si v est le vecteur unitaire du gradient. **La dérivée est maximale dans la direction $(0, 1)$, et elle vaut alors 11 .** Par ailleurs, $D_v f(a) = 11 v_2$ s'annule si et seulement si $v_2 = 0$. **Les directions de dérivée nulle sont donc $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.**

Corrigé de l'exercice 7 : Dérivation le long d'un cercle

1. La fonction f est polynomiale, donc C^1 , avec $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$. De plus, γ est C^1 et $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$. La règle de la chaîne donne

$$g'(t) = -\sin t \cdot 2\cos t \sin t + \cos t \cdot \cos^2 t = \cos t (\cos^2 t - 2\sin^2 t).$$

Directement, $g(t) = \cos^2 t \sin t$, et la dérivée d'un produit donne

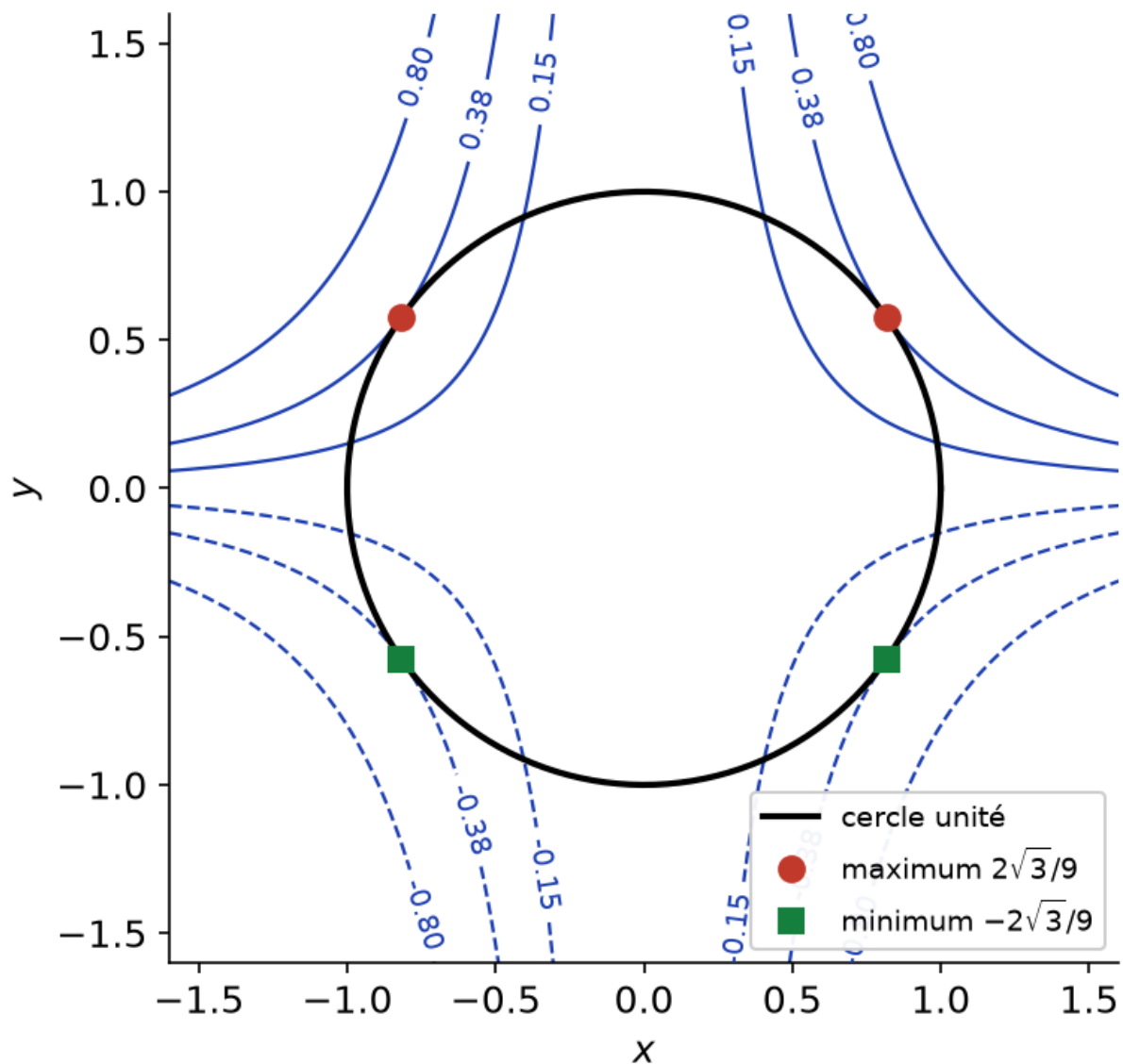
$$-2\cos t \sin^2 t + \cos^3 t. \text{ Les deux calculs coïncident : } g'(t) = \cos t (3\cos^2 t - 2).$$

2. À la question 1, on a remplacé $\sin^2 t$ par $1 - \cos^2 t$. Ainsi, $g'(t) = 0$ si et seulement si $\cos t = 0$ ou $\cos^2 t = \frac{2}{3}$. **Les solutions sont** $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{3\pi}{2}$ **et les quatre réels de** $[0, 2\pi]$ **tels que** $\cos t = \pm\sqrt{2/3}$.

3. La fonction g est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, donc elle y atteint son maximum et son minimum. Un extremum atteint en un point intérieur annule g' . Aux bornes,

$$g(0) = g(2\pi) = 0. \text{ Si } \cos t = 0, \text{ alors } g(t) = 0. \text{ Si } \cos^2 t = \frac{2}{3}, \text{ alors } \sin^2 t = \frac{1}{3} \text{ et } g(t) = \frac{2}{3}\sin t = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}. \text{ Le maximum de } x^2y \text{ sur le cercle vaut } \frac{2\sqrt{3}}{9}, \text{ atteint en } \left(\pm\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right); \text{ le minimum vaut } -\frac{2\sqrt{3}}{9}, \text{ atteint en } \left(\pm\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Comme le montre la figure ci-dessous, en ces quatre points, le cercle est tangent aux lignes de niveau $\pm\frac{2\sqrt{3}}{9}$ de x^2y : le cercle ne peut pas atteindre un niveau plus élevé.



Corrigé de l'exercice 8 : Un minimum global par complétion du carré

1. On a $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 2y - 2$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y$. La seconde équation donne $y = -x$. En reportant dans la première, $4x - 2x - 2 = 0$, donc $x = 1$. **L'unique point critique est $a = (1, -1)$, et $f(a) = 2 - 2 + 1 - 2 = -1$.**

2. On développe $f(1 + h, -1 + k)$:

$$2(1 + h)^2 + 2(1 + h)(-1 + k) + (-1 + k)^2 - 2(1 + h) = -1 + 2h^2 + 2hk + k^2.$$

Les termes du premier degré disparaissent, ce qui est normal en un point critique. **Donc**

$$f(1+h, -1+k) - f(a) = 2h^2 + 2hk + k^2.$$

- On complète le carré : $2h^2 + 2hk + k^2 = h^2 + (h+k)^2 \geq 0$. Donc $f(u) \geq f(a)$ pour tout u , et f admet un minimum global en a . De plus, l'égalité impose $h = 0$ et $h+k = 0$, donc $k = 0$. **Le minimum global vaut -1 et il n'est atteint qu'en $(1, -1)$.**
- On a $f(t, 0) = 2t^2 - 2t \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$. **La fonction n'est pas majorée : elle n'admet pas de maximum global.**

Corrigé de l'exercice 9 : Dérivées partielles de composées

- La fonction F est C^1 comme composée. Par la règle de la chaîne,
 $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \varphi'(x^2 + y^2)$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y \varphi'(x^2 + y^2)$. **Ainsi,**
 $\nabla F(x, y) = 2\varphi'(x^2 + y^2)(x, y)$, **qui est colinéaire à (x, y) .** C'est cohérent : les lignes de niveau de F sont des cercles centrés en l'origine, et le gradient est orthogonal à ces cercles.
- Sur U , on dérive la fonction composée : $\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$ et $\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{x} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$. Par conséquent,

$$x \frac{\partial G}{\partial x} + y \frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{y}{x} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

La relation demandée est vérifiée sur U .

- On pose $u = x + y$ et $v = xy$. D'après le théorème sur les dérivées partielles d'une composée, avec $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial x} = y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$ et $\frac{\partial v}{\partial y} = x$:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}(x+y, xy) + y \frac{\partial g}{\partial v}(x+y, xy), \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}(x+y, xy) + x \frac{\partial g}{\partial v}(x+y, xy).$$

Ce sont les deux formules cherchées.

- Pour $g(u, v) = u^2 - 2v$, on a $\frac{\partial g}{\partial u} = 2u$ et $\frac{\partial g}{\partial v} = -2$. Les formules donnent
 $\frac{\partial H}{\partial x} = 2(x+y) - 2y = 2x$ et $\frac{\partial H}{\partial y} = 2(x+y) - 2x = 2y$. Directement,
 $H(x, y) = (x+y)^2 - 2xy = x^2 + y^2$. **Les dérivées partielles valent bien $2x$ et**

$2y$.

Corrigé de l'exercice 10 : Gradient orthogonal aux lignes de niveau

1. L'équation $x^2 + 4y^2 = 4$ équivaut à $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$: c'est une ellipse de demi-axes 2 et 1. D'une part, $(2\cos t)^2 + 4\sin^2 t = 4$, donc $\gamma(t) \in E$. D'autre part, si $(x, y) \in E$, le point $(\frac{x}{2}, y)$ est sur le cercle unité, donc s'écrit $(\cos t, \sin t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$. **Ainsi, γ paramètre toute l'ellipse E .**
2. La fonction $t \rightarrow f(\gamma(t))$ est constante, égale à 4. Sa dérivée est donc nulle. Or, d'après la règle de la chaîne, cette dérivée vaut $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$. **Donc $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$ pour tout t .** Vérifions-le directement. Comme $\nabla f(x, y) = (2x, 8y)$, on a $\nabla f(\gamma(t)) = (4\cos t, 8\sin t)$. De plus, $\gamma'(t) = (-2\sin t, \cos t)$. Le produit scalaire vaut donc $-8\cos t \sin t + 8\sin t \cos t = 0$, ce qui confirme le résultat.
3. On a $f(M) = 2 + 4 \times \frac{1}{2} = 4$, donc $M \in E$. Ensuite, $\nabla f(M) = (2\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$, vecteur normal à la tangente. La tangente est donc l'ensemble des (x, y) tels que $2\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + 4\sqrt{2}(y - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$. En divisant par $2\sqrt{2}$, on obtient $x - \sqrt{2} + 2y - \sqrt{2} = 0$. **La tangente à E en M a pour équation $x + 2y = 2\sqrt{2}$.**
4. Si γ est tracé sur la ligne de niveau c , alors $f(\gamma(t)) = c$ pour tout t . En dérivant avec la règle de la chaîne, on obtient $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$. **Donc le gradient est orthogonal au vecteur tangent en chaque point de l'arc.**

Point de méthode : l'équation de la tangente à une ligne de niveau en M s'écrit directement $\langle \nabla f(M), (x, y) - M \rangle = 0$, dès que $\nabla f(M) \neq 0$.

Corrigé de l'exercice 11 : Équation de transport et changement de variables linéaire

1. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. L'équation $\Phi(x, y) = (u, v)$ équivaut à $y = v$ et $x = u - 2v$. Elle a donc une unique solution. **Ainsi, Φ est bijective, de réciproque**
 $\Phi^{-1}(u, v) = (u - 2v, v)$. Les deux applications sont linéaires, donc de classe C^1 .

2. La fonction $g = f \circ \Phi^{-1}$ est C^1 comme composée. De plus, $f(x, y) = g(x + 2y, y)$. La règle de la chaîne, avec $u = x + 2y$ et $v = y$, donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u, v), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2 \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, v).$$

Ce sont les expressions demandées.

3. En reportant, (E) devient $2g_u + g_v = 2g_u$, c'est-à-dire $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$ en tout point, car Φ est surjective. Pour u fixé, la fonction $v \rightarrow g(u, v)$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Elle est donc constante, égale à $g(u, 0) = f(u, 0)$. Posons $h(u) = f(u, 0)$: h est de classe C^1 . Alors $f(x, y) = h(x + 2y)$. Réciproquement, pour h de classe C^1 , la fonction $f(x, y) = h(x + 2y)$ vérifie $\frac{\partial f}{\partial y} = 2h'(x + 2y) = 2\frac{\partial f}{\partial x}$. **Les solutions de (E) sont les fonctions $(x, y) \rightarrow h(x + 2y)$, avec h de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.**

4. La condition $f(x, 0) = h(x) = \sin x$ impose $h = \sin$. **La solution cherchée est**
 $f(x, y) = \sin(x + 2y)$. On vérifie : $\frac{\partial f}{\partial y} = 2\cos(x + 2y) = 2\frac{\partial f}{\partial x}$.

Point de méthode : on choisit la nouvelle variable u constante le long des « droites caractéristiques »
 $x + 2y = \text{cte}$; l'équation se réduit alors à une dérivée nulle.

Corrigé de l'exercice 12 : Coordonnées polaires et équations aux dérivées partielles

1. L'application $(r, \theta) \rightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est de classe C^1 sur V , à valeurs dans U . La

règle de la chaîne donne, les dérivées de f étant prises en $(r\cos\theta, r\sin\theta)$:

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ce sont les formules du cours.

- On multiplie la première formule par r . Comme $r\cos\theta = x$ et $r\sin\theta = y$, on obtient $r\frac{\partial g}{\partial r} = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$. De même, la seconde formule s'écrit $\frac{\partial g}{\partial \theta} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$. **Les deux identités sont établies.**
- D'abord, f est C^1 sur U si et seulement si g est C^1 sur V , car les deux changements de variables sont C^1 . L'équation équivaut à $r\frac{\partial g}{\partial r} = 0$, donc à $\frac{\partial g}{\partial r} = 0$ puisque $r > 0$. Pour θ fixé, $r \rightarrow g(r, \theta)$ est alors constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Ainsi, $g(r, \theta) = k(\theta)$, où $k(\theta) = g(1, \theta)$ est C^1 . Réciproquement, ces fonctions conviennent. **Les solutions sont les $f(x, y) = k\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$, avec k de classe C^1 sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: ce sont les fonctions constantes sur chaque demi-droite issue de l'origine.**
- L'équation équivaut à $\frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$. Pour r fixé, $\theta \rightarrow g(r, \theta)$ est constante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc $g(r, \theta) = \ell(r)$, avec $\ell(r) = g(r, 0) = f(r, 0)$ de classe C^1 . **Les solutions sont les $f(x, y) = \ell(\sqrt{x^2 + y^2})$, avec ℓ de classe C^1 sur $]0, +\infty[$: ce sont les fonctions radiales.**
- L'équation devient $r\frac{\partial g}{\partial r} = r$, donc $\frac{\partial g}{\partial r} = 1$. Posons $G(r, \theta) = g(r, \theta) - r$: alors $\frac{\partial G}{\partial r} = 0$. D'après la question 3, $G(r, \theta) = k(\theta)$ avec k de classe C^1 . Réciproquement, $x\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2} + y\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, qui vaut bien $\sqrt{x^2 + y^2}$. **Les solutions sont les $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + k\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$, avec k de classe C^1 .**

Corrigé de l'exercice 13 : Points critiques d'une fonction cubique

- On a $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$. Les points critiques vérifient donc $y = x^2$ et $x = y^2$. Ainsi, $x = x^4$, soit $x(x^3 - 1) = 0$, d'où $x = 0$ ou $x = 1$. **Les points critiques sont $(0, 0)$ et $(1, 1)$, avec $f(0, 0) = 0$ et $f(1, 1) = -1$.**

2. On a $f(t, 0) = t^3$, qui est strictement positif pour $t > 0$ et strictement négatif pour $t < 0$. Toute boule centrée en l'origine contient de tels points. **Donc $(0, 0)$ n'est pas un extremum local.**

3. On développe :

$$\begin{aligned} f(1+h, 1+k) &= 1 + 3h + 3h^2 + h^3 + 1 + 3k + 3k^2 + k^3 - 3(1+h+k+hk) \\ &= -1 + 3h^2 - 3hk + 3k^2 + h^3 + k^3. \end{aligned}$$

Donc $f(1+h, 1+k) + 1 = 3(h^2 - hk + k^2) + h^3 + k^3$.

4. D'une part, $h^2 - hk + k^2 - \frac{1}{2}(h^2 + k^2) = \frac{1}{2}(h - k)^2 \geq 0$. D'autre part, si $h^2 + k^2 \leq \rho^2$, alors $|h| \leq \rho$ et $|k| \leq \rho$. Par conséquent, $|h^3 + k^3| \leq |h| h^2 + |k| k^2 \leq \rho(h^2 + k^2)$. **Les deux inégalités sont prouvées.**

5. Pour $h^2 + k^2 \leq \rho^2$, les résultats précédents donnent

$$f(1+h, 1+k) + 1 \geq \frac{3}{2}(h^2 + k^2) - \rho(h^2 + k^2) = \left(\frac{3}{2} - \rho\right)(h^2 + k^2).$$

Avec $\rho = 1$, cette quantité est positive sur la boule fermée de centre $(1, 1)$ et de rayon 1.

Donc f admet en $(1, 1)$ un minimum local, égal à -1 . Cependant,

$f(t, 0) = t^3 \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow -\infty$. **Ce minimum n'est donc pas global.**

Corrigé de l'exercice 14 : Extremums sur un disque fermé

1. On a $\nabla f(x, y) = (2x - 1, 4y)$. Il s'annule seulement en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. **C'est l'unique point critique, et il est à l'intérieur de D , car $\frac{1}{4} < 1$.**

2. On complète le carré : $x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. Donc

$f(x, y) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2y^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$. **L'égalité a lieu seulement en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$: c'est le minimum global de f , sur $\mathbb{R}^2$ comme sur D .**

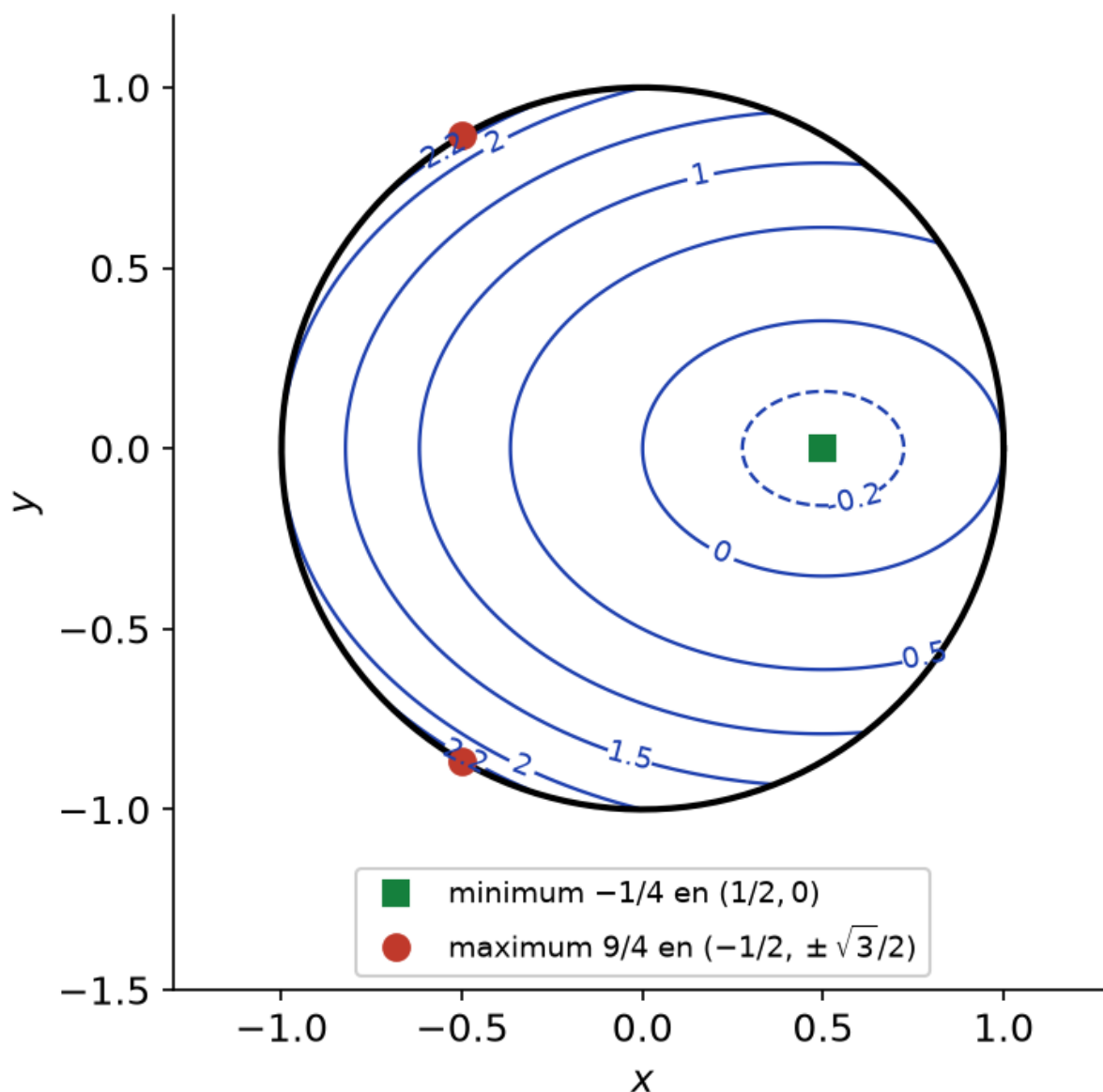
3. Sur D , on a $y^2 \leq 1 - x^2$, donc $f(x, y) \leq x^2 + 2(1 - x^2) - x = 2 - x^2 - x$.

Ensuite, $2 - x^2 - x = \frac{9}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$. Pour avoir $f(x, y) = \frac{9}{4}$, il faut que les deux inégalités soient des égalités : $x = -\frac{1}{2}$ et $y^2 = 1 - x^2 = \frac{3}{4}$. Réciproquement,

$f\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$. Le maximum de f sur D vaut $\frac{9}{4}$, atteint en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. En ces points, $\nabla f = (-2, \pm 2\sqrt{3}) \neq (0, 0)$. Cela ne contredit pas le théorème. En effet, celui-ci concerne un extremum atteint en un point d'un ouvert. Or ces points sont sur le cercle, bord de D : aucune boule centrée en eux n'est incluse dans D . **Le maximum est atteint au bord, où le gradient n'a aucune raison de s'annuler.**

La figure ci-dessous montre les lignes de niveau de f dans le disque. Le minimum est au centre des ellipses de niveau ; en revanche, les maximums sont sur le cercle, là où la ligne de niveau $\frac{9}{4}$ le touche.



Corrigé de l'exercice 15 : Droite des moindres carrés

1. La fonction F est polynomiale, donc C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Ensuite,

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^4 x_i (y_i - a x_i - b), \quad \frac{\partial F}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^4 (y_i - a x_i - b).$$

Or $\sum x_i = 6$, $\sum x_i^2 = 14$, $\sum y_i = 9$ et $\sum x_i y_i = 0 + 2 + 4 + 12 = 18$.
Les points critiques vérifient donc $14a + 6b = 18$ et $6a + 4b = 9$.

2. La seconde équation donne $b = \frac{9-6a}{4}$. En reportant, $14a + \frac{3(9-6a)}{2} = 18$, soit
 $28a + 27 - 18a = 36$, donc $a = 0,9$. Puis $b = \frac{9-5,4}{4} = 0,9$. **L'unique point critique est $(a_0, b_0) = (0,9; 0,9)$.**

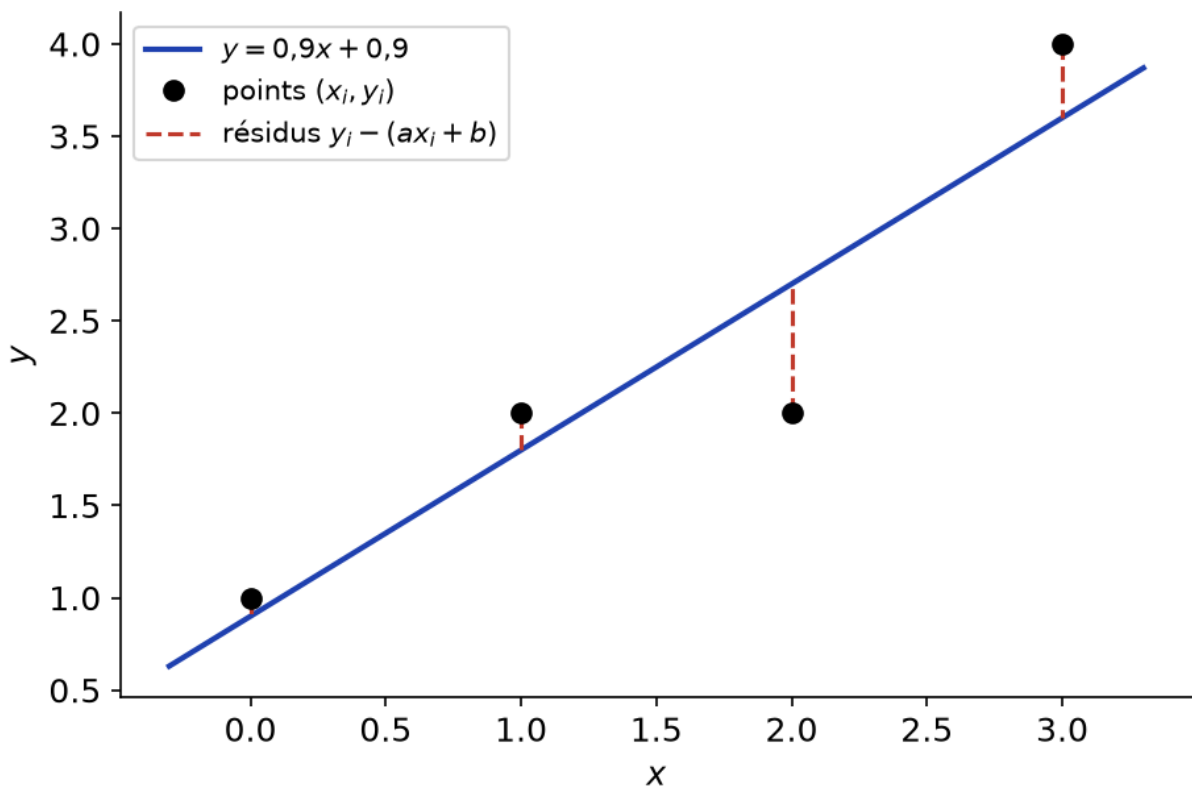
3. Notons $e_i = y_i - a_0 x_i - b_0$ les résidus. Alors

$$F(a_0 + h, b_0 + k) = \sum_{i=1}^4 (e_i - (h x_i + k))^2 = F(a_0, b_0) - 2 \sum_{i=1}^4 e_i (h x_i + k) + \sum_{i=1}^4 (h x_i + k)^2.$$

Or les équations du point critique s'écrivent $\sum x_i e_i = 0$ et $\sum e_i = 0$. Le terme du milieu est donc nul. **Ainsi, $F(a_0 + h, b_0 + k) \geq F(a_0, b_0)$: F admet en (a_0, b_0) un minimum global.**

4. Les valeurs prédites sont $0,9$, $1,8$, $2,7$ et $3,6$. Les résidus valent donc $0,1$, $0,2$, $-0,7$ et $0,4$. On vérifie que leur somme est nulle. Enfin, $F(a_0, b_0) = 0,01 + 0,04 + 0,49 + 0,16$.
La valeur minimale de F est $0,7$, pour la droite $y = 0,9x + 0,9$.

La figure ci-dessous montre la droite obtenue et les quatre résidus verticaux. La somme de leurs carrés est la plus petite possible.



Corrigé de l'exercice 16 : Boîte sans couvercle de volume imposé

- La boîte a un fond d'aire xy , deux faces d'aire xz et deux faces d'aire yz . Donc $S = xy + 2xz + 2yz$. Or $xyz = 32$, d'où $z = \frac{32}{xy}$. Par conséquent, $2xz = \frac{64}{y}$ et $2yz = \frac{64}{x}$. **Ainsi, $S(x, y) = xy + \frac{64}{x} + \frac{64}{y}$ sur $]0, +\infty[^2$.**
- On a $\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{64}{x^2}$ et $\frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{64}{y^2}$. Les points critiques vérifient $x^2 y = 64$ et $x y^2 = 64$. En divisant, $\frac{x}{y} = 1$, donc $x = y$. Ensuite, $x^3 = 64$, soit $x = 4$. **L'unique point critique est $(4, 4)$, où $S = 16 + 16 + 16 = 48$.**
- On applique l'inégalité arithmético-géométrique à $p = xy$, $q = \frac{64}{x}$ et $s = \frac{64}{y}$, qui sont strictement positifs. Leur produit vaut $pqs = 64^2 = 4096 = 16^3$. Donc $\frac{S}{3} \geq 16$. **Ainsi, $S \geq 48$ sur tout l'ouvert, et la valeur 48 est atteinte en $(4, 4)$: c'est le minimum global.**
- Pour $x = y = 4$, la hauteur vaut $z = \frac{32}{16} = 2$. **La boîte optimale a une base carrée de**

4 dm de côté et une hauteur de 2 dm, pour $\frac{48}{dm^2}$ de carton.

Corrigé de l'exercice 17 : Dérivées selon un vecteur sans classe C1

1. On a $|x^3 + y^3| \leq |x| x^2 + |y| y^2 \leq (|x| + |y|)(x^2 + y^2)$. Donc, pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $|f(x, y)| \leq |x| + |y| \leq 2|(x, y)|$. Cette majoration tend vers 0, donc f est continue en $(0, 0)$. Ailleurs, f est un quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas. **Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.**
2. Pour $t \neq 0$, $f(t, 0) = \frac{t^3}{t^2} = t$, donc le taux $\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t}$ vaut 1. De même, $f(0, t) = t$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$, et $\nabla f(0, 0) = (1, 1)$.
3. Pour $t \neq 0$, $f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = \frac{t^3(\cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha)}{t^2} = t(\cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha)$. Le taux d'accroissement est donc constant. **Donc $D_v f(0, 0) = \cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha$.**
4. Pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, on a $\cos \alpha = \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D'une part, $D_v f(0, 0) = 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D'autre part, $\langle \nabla f(0, 0), v \rangle = \sqrt{2}$. Les deux valeurs diffèrent. Or, pour une fonction de classe C^1 , on aurait $D_v f(0, 0) = \langle \nabla f(0, 0), v \rangle$. **Donc f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, bien qu'elle soit continue et dérivable selon tout vecteur en $(0, 0)$.**

Point de méthode : pour prouver qu'une fonction n'est pas C^1 , il suffit de trouver une direction où la formule $D_v f = \langle \nabla f, v \rangle$ est en défaut.

Corrigé de l'exercice 18 : Relation d'Euler pour les fonctions homogènes

1. Fixons $(x, y) \in U$. L'arc $t \rightarrow (tx, ty)$ est C^1 sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans U , de dérivée (x, y) . La règle de la chaîne donne $\frac{d}{dt} f(tx, ty) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)$. D'autre part, la dérivée de $t^\alpha f(x, y)$ vaut $\alpha t^{\alpha-1} f(x, y)$. On évalue en $t = 1$. On obtient $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$ sur U .

2. Pour $t > 0$, $f(tx, ty) = \frac{t^3 x^2 y}{t^2(x^2 + y^2)} = t f(x, y)$: f est homogène de degré 1. Ensuite, par la formule du quotient,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy(x^2 + y^2) - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2(x^2 + y^2) - 2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Donc $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^2y^3 + x^4y - x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2y(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$. On trouve bien $\frac{x^2y}{x^2 + y^2} = 1 \cdot f(x, y)$.

3. Comme à la question 1, φ est C^1 et $\varphi'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)$. On multiplie par t et on applique la relation d'Euler au point (tx, ty) :

$$t\varphi'(t) = (tx) \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + (ty) \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = \alpha f(tx, ty) = \alpha \varphi(t).$$

La relation $t\varphi'(t) = \alpha \varphi(t)$ est établie.

4. Soit $\psi(t) = t^{-\alpha} \varphi(t)$. Alors $\psi'(t) = t^{-\alpha-1} (t\varphi'(t) - \alpha \varphi(t)) = 0$. La fonction ψ est donc constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, égale à $\psi(1) = f(x, y)$. Ainsi, $\varphi(t) = t^\alpha f(x, y)$. **Donc $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$: f est homogène de degré α .**

Corrigé de l'exercice 19 : Minimum global d'une fonction quartique

1. On a $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4(x - y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4(x - y)$. En additionnant les deux équations du système, on obtient $4(x^3 + y^3) = 0$, donc $x^3 = (-y)^3$. Comme la fonction cube est injective, $y = -x$. La première équation devient $4x^3 - 8x = 0$, soit $4x(x^2 - 2) = 0$. **Les points critiques sont $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.** On vérifie que la seconde équation est satisfaite en ces points.

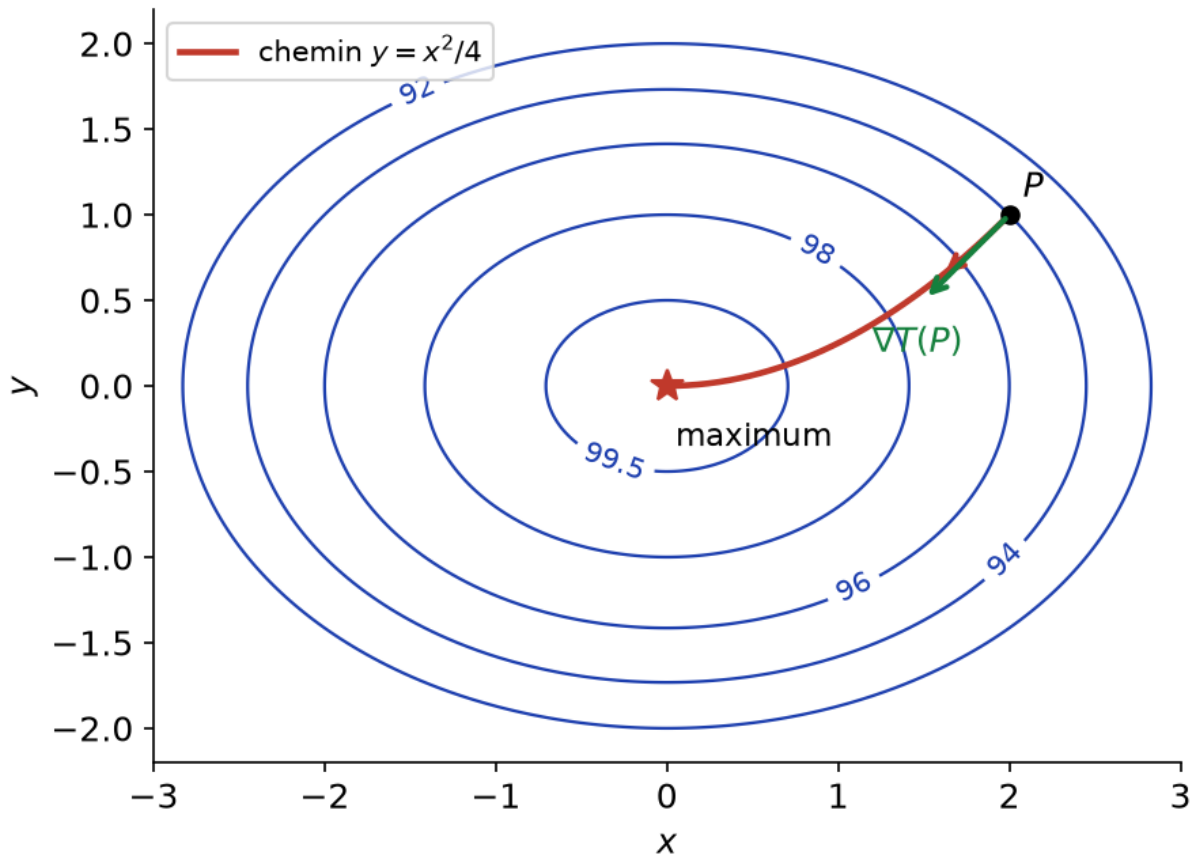
- On a $f(0, 0) = 0$. D'une part, $f(t, t) = 2t^4 > 0$ pour $t \neq 0$. D'autre part, $f(t, 0) = t^4 - 2t^2 = t^2(t^2 - 2) < 0$ pour $0 < |t| < \sqrt{2}$. **Donc $(0, 0)$ n'est pas un extremum local.**
- D'abord, $2(x^2 + y^2) - (x - y)^2 = (x + y)^2 \geq 0$. Ensuite, $2(x^4 + y^4) - (x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = (x^2 - y^2)^2 \geq 0$. **Les deux inégalités sont démontrées.**
- Avec $s = x^2 + y^2$, on obtient $f(x, y) \geq \frac{s^2}{2} - 4s = \frac{(s-4)^2}{2} - 8 \geq -8$. Par ailleurs, $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4 + 4 - 2 \times 8 = -8$. L'égalité exige $s = 4$, $x + y = 0$ et $x^2 = y^2$, donc $x^2 = 2$ et $y = -x$. **Le minimum global de f vaut -8 ; il est atteint en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ seulement.**
- On a $f(t, t) = 2t^4 \rightarrow +\infty$. **La fonction n'est pas majorée : elle n'a pas de maximum global.**

Corrigé de l'exercice 20 : Chemin de plus forte pente

- On a $\nabla T(x, y) = (-2x, -4y)$, donc $\nabla T(P) = (-4, -4)$, de norme $4\sqrt{2}$. D'après la propriété du gradient, la dérivée directionnelle est maximale selon le vecteur unitaire du gradient. **L'insecte doit partir dans la direction $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, et la température y croît au taux $4\sqrt{2}$ degrés par unité de longueur.**
- La dérivée selon v unitaire vaut $-4v_1 - 4v_2$. Elle est nulle si et seulement si $v_2 = -v_1$. **Les directions cherchées sont $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.** Comme $T(P) = 100 - 4 - 2 = 94$, l'isotherme passant par P est l'ellipse $x^2 + 2y^2 = 6$. Ces directions sont bien tangentes à cette ellipse en P .
- Le système s'écrit $x'(t) = -2x(t)$ et $y'(t) = -4y(t)$. Ce sont deux équations différentielles linéaires indépendantes. Avec $x(0) = 2$ et $y(0) = 1$, on obtient $x(t) = 2e^{-2t}$ et $y(t) = e^{-4t}$.
- On calcule $\frac{x(t)^2}{4} = e^{-4t} = y(t)$. **La trajectoire est donc portée par la parabole $y = \frac{x^2}{4}$.** De plus, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$. **L'insecte se dirige vers l'origine, point le plus chaud de la plaque, où $T = 100$.**

5. Par la règle de la chaîne, $\frac{d}{dt} T(\gamma(t)) = \langle \nabla T(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = |\nabla T(\gamma(t))|^2 \geq 0$. **La température ressentie par l'insecte est donc croissante.**

La figure ci-dessous montre le chemin obtenu. Il coupe chaque isotherme à angle droit, ce qui traduit l'orthogonalité du gradient et des lignes de niveau.



Corrigé de l'exercice 21 : Problème : étude complète d'une fonction à cinq points critiques

- La fonction f est le produit d'un polynôme et de l'exponentielle d'un polynôme : elle est donc C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Comme x et y n'interviennent que par leurs carrés, $f(-x, y) = f(x, -y) = f(x, y)$. De plus, échanger x et y change le signe du premier facteur. **Donc f est paire en chaque variable, et $f(y, x) = -f(x, y)$.**

2. Notons $E = e^{-(x^2 + y^2)}$, de dérivées partielles $-2xE$ et $-2yE$. Par la formule du produit :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xE - 2x(x^2 - y^2)E = 2x(1 - x^2 + y^2)E, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2yE - 2y(x^2 - y^2)E = -2y(1 + x^2 - y^2)E.$$

Ce sont les formes factorisées cherchées.

3. Comme $E > 0$, le système équivaut à $(x = 0 \text{ ou } x^2 - y^2 = 1)$ et $(y = 0 \text{ ou } y^2 - x^2 = 1)$. Si $x = 0$ et $y = 0$, on obtient l'origine. Si $x = 0$ et $y^2 - x^2 = 1$, alors $y = \pm 1$. Si $x^2 - y^2 = 1$ et $y = 0$, alors $x = \pm 1$. Enfin, $x^2 - y^2 = 1$ et $y^2 - x^2 = 1$ donneraient, en additionnant, $0 = 2$: c'est impossible.

Les cinq points critiques sont $(0, 0)$, $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$.

4. En $(1, 1)$, on a $f(1, 1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2e^{-2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -2e^{-2}$. Le plan tangent a pour équation $z = 2e^{-2}(x - 1) - 2e^{-2}(y - 1)$. **Il s'écrit donc $z = 2e^{-2}(x - y)$.** En $(1, 0)$, le gradient est nul et $f(1, 0) = e^{-1}$. **Le plan tangent y est horizontal, d'équation $z = \frac{1}{e}$.**

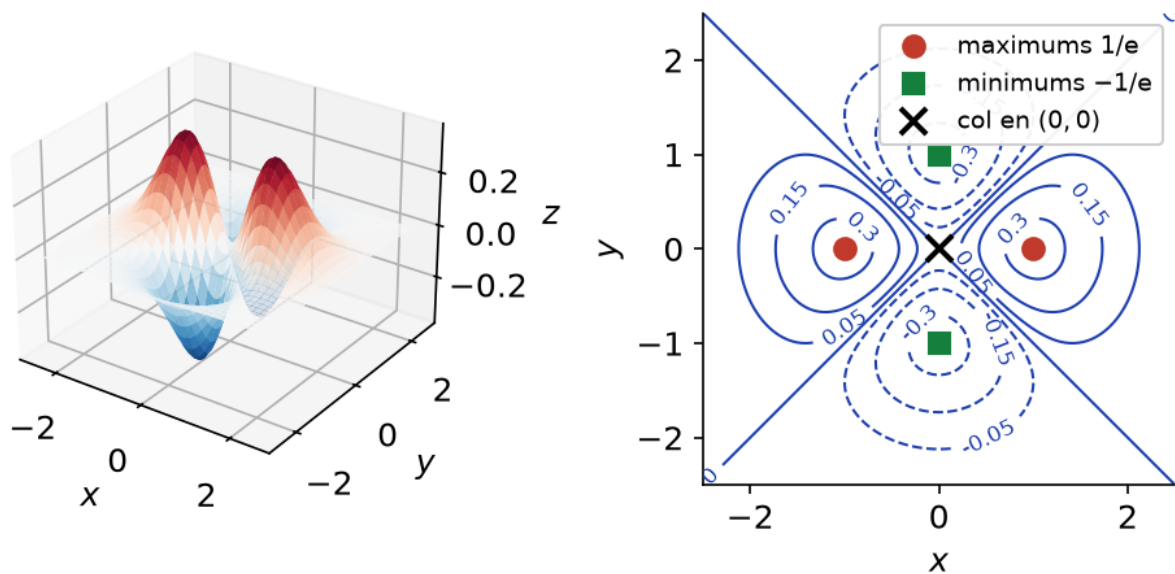
5. Avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on a $x^2 - y^2 = r^2\cos(2\theta)$. Donc $f(x, y) = r^2\cos(2\theta)e^{-r^2}$, et $|f(x, y)| \leq r^2e^{-r^2}$. Étudions ensuite $\varphi(u) = ue^{-u}$ sur $[0, +\infty[$. Sa dérivée $(1 - u)e^{-u}$ est positive avant 1 et négative après. Donc φ atteint son maximum $\frac{1}{e}$ en $u = 1$. **Ainsi, $|f(x, y)| \leq (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)} \leq \frac{1}{e}$.**

6. On a $f(\pm 1, 0) = \frac{1}{e}$ et $f(0, \pm 1) = -\frac{1}{e}$. Par conséquent, les bornes de la question 5 sont atteintes. **Le maximum global vaut $\frac{1}{e}$, atteint en $(1, 0)$ et $(-1, 0)$; le minimum global vaut $-\frac{1}{e}$, atteint en $(0, 1)$ et $(0, -1)$.** Ce sont bien des points critiques, conformément au théorème du cours.

7. On a $f(t, 0) = t^2e^{-t^2} > 0$ et $f(0, t) = -t^2e^{-t^2} < 0$ pour $t \neq 0$. **L'origine est donc un point col et non un extremum local.** Par ailleurs, $|f(x, y)| \leq r^2e^{-r^2}$, qui tend vers 0 quand $r \rightarrow +\infty$ par croissances comparées. **Donc $f(x, y) \rightarrow 0$ quand $|(x, y)| \rightarrow +\infty$.**

8. On a $\nabla f(1, 1) = 2e^{-2}(1, -1)$, de norme $2\sqrt{2}e^{-2}$. **La direction de plus forte croissance en $(1, 1)$ est $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: on se dirige vers le sommet situé en $(1, 0)$.**

La figure ci-dessous résume l'étude. On y voit deux bosses sur l'axe des abscisses, deux creux sur l'axe des ordonnées et un col à l'origine.



[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [fonctions de deux variables, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur fonctions de deux variables](#)
- À maîtriser avant : [Dérivabilité et convexité](#), [Espaces préhilbertiens réels](#)
- Chapitre précédent : [Espaces préhilbertiens réels](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)