

Fonctions

Exercice 1 :

(a) $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$
 $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+
$x-2$	-	-	0	+
$(x+1)(x-2)$	+	0	-	+

← (règle des signes)

(b) $2x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$
 $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$2x+4$	-	0	+	+
$x-2$	-	-	0	+
$(2x+4)(x-2)$	+	0	-	+
$-(2x+4)(x-2)$	-	0	+	-

(c) $(x+1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Exercice 2 :

① $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
 $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
 $1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$x+1$		-	0	+	+
$x-2$		-	-	0	+
$1-x$		+	+	0	
$\frac{(x+1)(x-2)}{1-x}$		+	0	-	-
$-\frac{(x+1)(x-2)}{1-x}$		-	0	+	+

② $-\frac{(x+1)(x-2)}{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1[\cup]1; 2]$

③ ① $(2x-1)(x-1) = 2x^2 - 2x - x + 1$
 $= 2x^2 - 3x + 1$

② $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-1)(x-1)}{x^2 + 1} \leq 0$ (d'après 3①)

$\Leftrightarrow (2x-1)(x-1) \leq 0$ (car $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$)

ou $\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \\ x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \end{cases} \rightarrow$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2x-1$		-	0	+
$x-1$		-	-	0
$\frac{(2x-1)(x-1)}{x^2+1}$		+	0	-

Conclusion: $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1} \leq 0 \Leftrightarrow x \in [\frac{1}{2}; 1]$

Exercise 3 :

$$① \text{ a) } f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } x = -5$$

$$\text{b) } g(x) \geq f(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty; -5] \cup [1; 7]$$

$$② \text{ a) } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -6; x = -3; x = 0; x = 6$$

$$\text{b) } f(x) = 3 \Leftrightarrow x = -7; x = 7$$

$$\text{c) } f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-6; -3] \cup [0; 6]$$

Exercise 4 :

$$① \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ définie si } 1+x \neq 0 \text{ donc } D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$g(x) = \sqrt{3-2x} \text{ définie si } 3-2x \geq 0 \text{ donc } D_g =]-\infty; \frac{3}{2}]$$

$$② \quad \bullet f(3) = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} ; f(-15) = \frac{1}{1-15} = -\frac{1}{14} = -2$$

$$\bullet g(3) = \sqrt{3-2 \cdot 3} \text{ impossible car } 3 \notin D_g$$

$$③ \quad \bullet f(2) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} ; f(-95) = \frac{1}{1-95} = -\frac{1}{94} = 2$$

$$\bullet g(2) = \text{impossible car } 2 \notin D_g$$

$$\bullet g(-0,5) = \sqrt{3-2(-0,5)} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$④ \quad f(x) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x} = 4$$

$$\Leftrightarrow 1+x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} - 1 = \boxed{-\frac{3}{4}}$$

$$g(x) = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3-2x} = 4$$

$$\Leftrightarrow 3-2x = 16$$

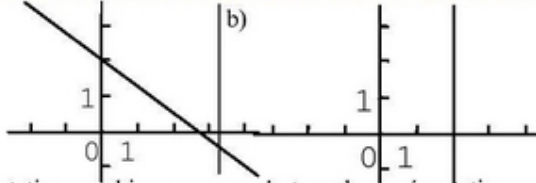
$$\Leftrightarrow 2x = 3-16$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{13}{2}}$$

Exercise 6 :

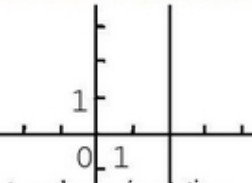
Pour chacune des courbes ci-dessous, indiquer si c'est la représentation graphique d'une fonction.

a)



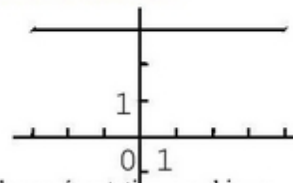
c'est la représentation graphique d'une fonction.

b)



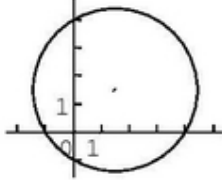
ce n'est pas la représentation graphique d'une fonction.

c)



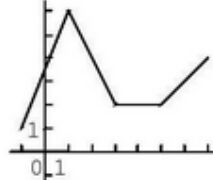
c'est la représentation graphique d'une fonction.

d)



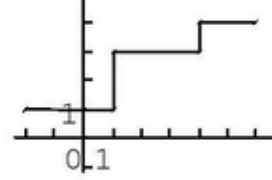
ce n'est pas la représentation graphique d'une fonction.

e)



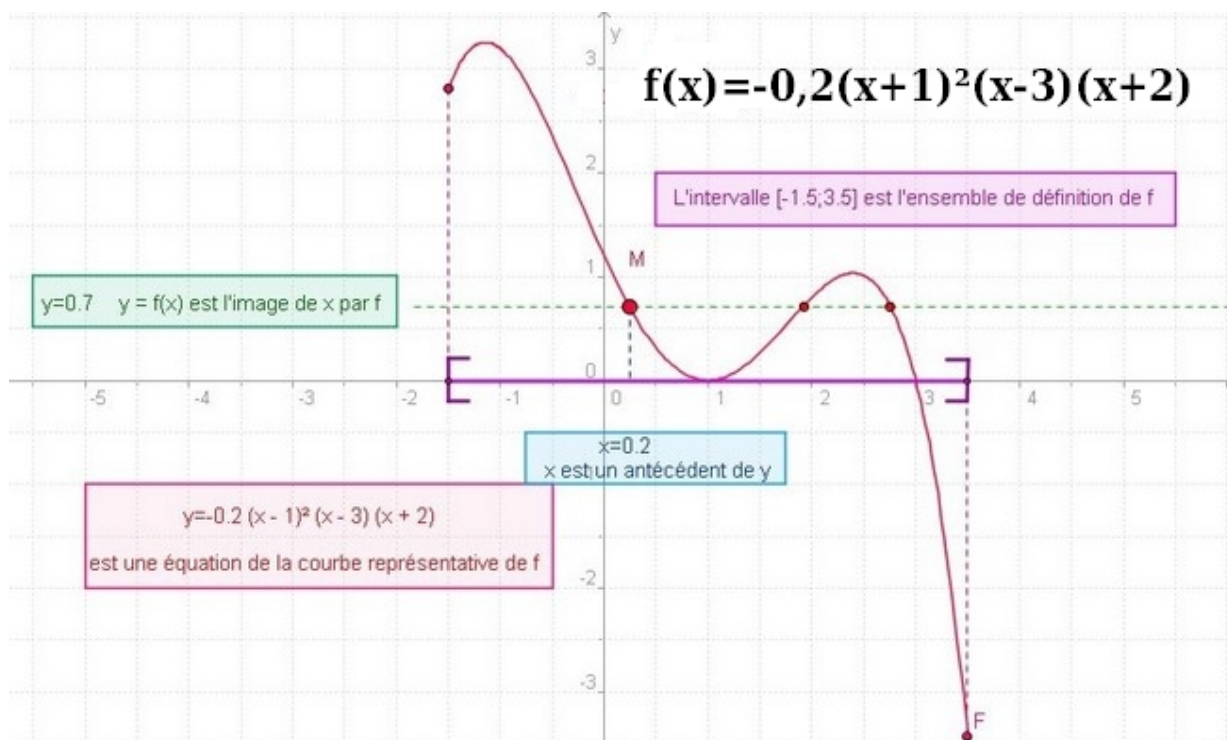
c'est la représentation graphique d'une fonction.

f)



ce n'est pas la représentation graphique d'une fonction.

Exercice 7 :



1. Déterminer par lecture graphique les images de 1 et de 2.5 par la fonction f . (à 0.1 près)

$$f(1)=0 \text{ et } f(2,5)=1$$

2. Retrouver les valeurs exactes de ces résultats par le calcul.

$$f(x) = -0,2(x-1)^2(x-3)(x+2)$$

$$f(1) = -0,2(1-1)^2(1-3)(1+2) = 0 \times (-2) \times 3 =$$

$$f(2,5) = -0,2(2,5-1)^2(2,5-3)(2,5+2) = -0,2 \times 2,25 \times (-0,5) \times 4,5 = 1,01$$

3. Déterminer graphiquement les antécédents de 1. (toujours à 0.1 près)

Les antécédents de 1 par f sont 0,2 et 2,4

4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.

Cette équation a deux solutions qui sont $x = 1$ et $x = 3$.

5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 1$.

$$S = [-1,5; 0,2[$$

Exercice 8 :

On donne

$$f(x) = 9x^2 - 4 + (3-2x)(3x-2) \text{ et } g(x) = x^2 + 2x + 1 - (2x-3)^2$$

1. Développer, réduire et ordonner $f(x)$ et $g(x)$.

$$f(x) = 9x^2 - 4 + (3-2x)(3x-2)$$

$$f(x) = 9x^2 - 4 + 9x - 6 - 6x^2 + 4x$$

$$f(x) = 3x^2 + 13x - 10$$

$$g(x) = x^2 + 2x + 1 - (2x-3)^2$$

$$g(x) = x^2 + 2x + 1 - (4x^2 - 12x + 9)$$

$$g(x) = x^2 + 2x + 1 - 4x^2 + 12x - 9$$

$$g(x) = -3x^2 + 14x - 8$$

2. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.

$$f(x) = 9x^2 - 4 + (3-2x)(3x-2)$$

$$f(x) = (3x-2)(3x+2) + (3-2x)(3x-2)$$

$$f(x) = (3x-2)[(3x+2)+(3-2,x)]$$

$$f(x) = (3x-2)(3x+2+3-2,x)$$

$$f(x) = (3x-2)(x+5)$$

$$g(x) = x^2 + 2x + 1 - (2x-3)^2$$

$$g(x) = (x+1)^2 - (2x-3)^2$$

$$g(x) = (x+1+2x-3)(x+1-2x+3)$$

$$g(x) = (3x-2)(-x+4)$$

Soit la fonction rationnelle définie par $h(x) = (f(x))/(g(x))$

1. Déterminer la condition d'existence de $h(x)$.

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$h(x) = \frac{(3x-2)(x+5)}{(3x-2)(-x+4)}$$

$$h(x) = \frac{x+5}{-x+4}$$

donc h existe pour $x \neq 4$

2. Simplifier $h(x)$.

$$h(x) = \frac{x+5}{-x+4}$$

3. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$h(x) = 0 ;$$

$$h(x) = \frac{x+5}{-x+4} = 0 \Leftrightarrow x+5 = 0$$

donc $x = -5$

$$h(x) = 3$$

$$h(x) = \frac{x+5}{-x+4} = 3 \Leftrightarrow x+5 = 3(-x+4)$$

$$x+5 = -3x+12$$

$$4x = 7$$

$$x = \frac{7}{4}$$

et $h(x) < 0$.

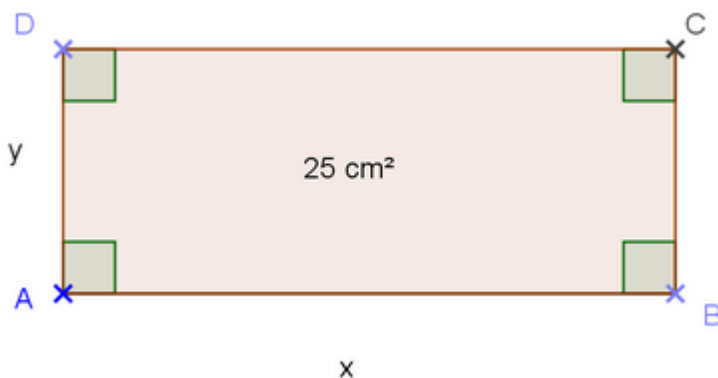
$$h(x) = \frac{x+5}{-x+4} < 0 \Leftrightarrow (x+5)(-x+4) < 0$$

$$,S =]-\infty; -5[\cup]4; +\infty[$$

Exercice 9 :

x et y désignent des réels strictement positifs .

Un rectangle de dimension x et y (en centimètres) a pour aire 25 cm^2 .



a) Exprimer y en fonction de x .

$$xy = 25$$

donc $y = \frac{25}{x}$ (avec $x \neq 0$).

b) On définit une fonction en associant à la dimension x ,

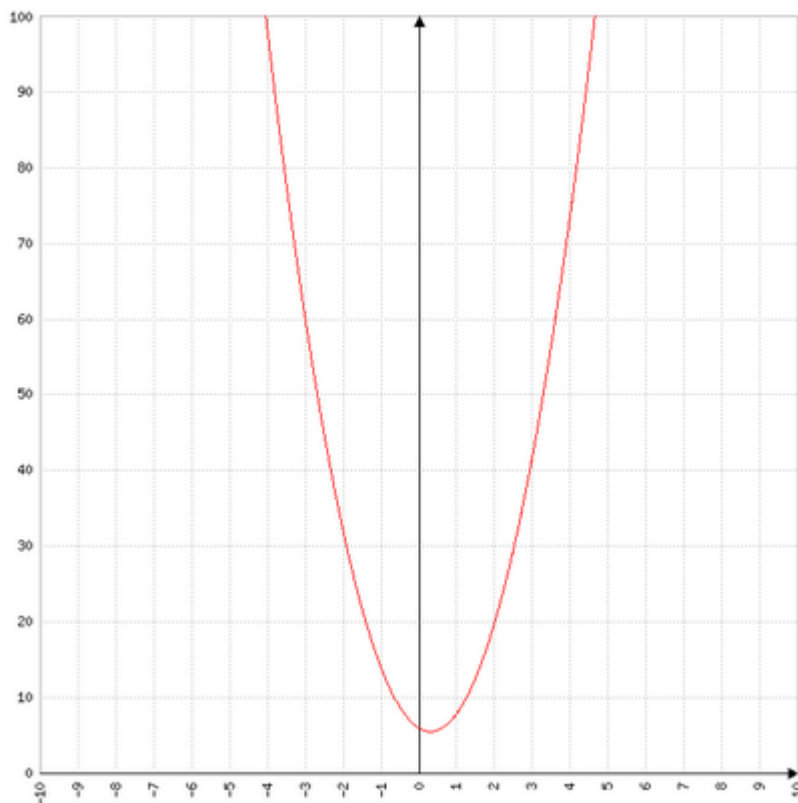
l'autre dimension y .

Quel est l'ensemble de définition de cette fonction ?

l'ensemble de définition de cette fonction est $]0; +\infty[$.

Exercice 10 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 6$.



1- Démontrer que, pour tout nombre réel x , $f(x) = 5(x - 0,3)^2 + 5,55$.

$$5(x - 0,3)^2 + 5,55$$

$$= 5(x^2 - 0,6x + 0,09) + 5,55$$

$$= 5x^2 - 3x + 0,45 + 5,55$$

$$5x^2 - 3x + 6 = f(x)$$

2- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 25,55$.

voir le graphique.....

3- Factoriser $f(x) - 25,55$ et retrouver les solutions de l'inéquation à l'aide d'un tableau de signes.

$$f(x) - 25,55 = 5(x - 0,3)^2 + 5,55 - 25,55$$

$$f(x) - 25,55 = 5(x - 0,3)^2 - 20$$

$$f(x) - 25,55 = 5[(x - 0,3)^2 - 2^2]$$

$$f(x) - 25,55 = 5(x - 0,3 - 2)(x - 0,3 + 2)$$

$$f(x) - 25,55 = 5(x - 2,3)(x + 1,7)$$

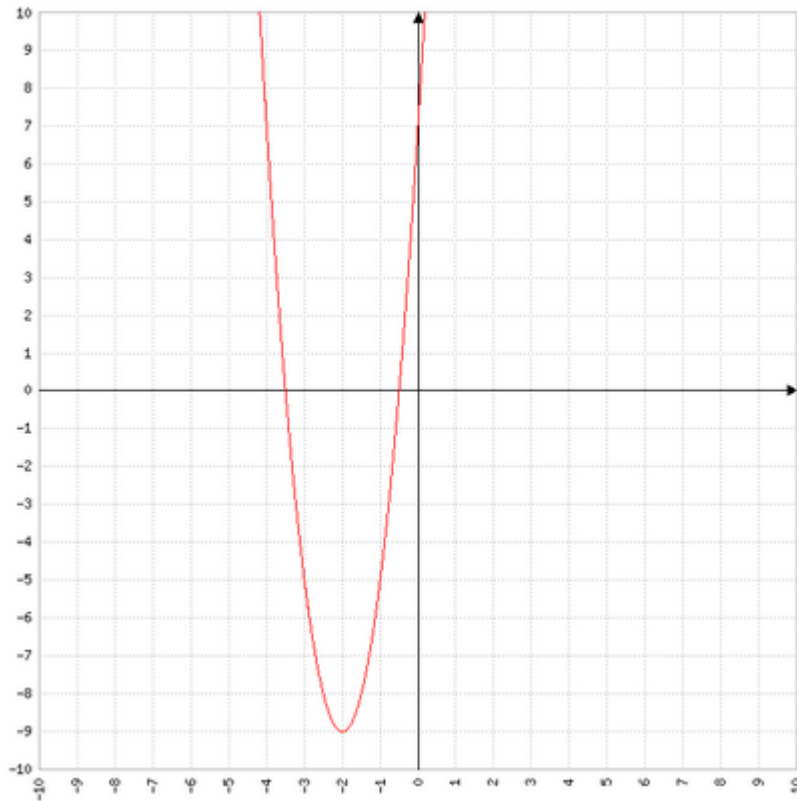
$x - \infty - 1,7$	$2,3$	$+\infty$
$x - 2,3$	-0	$-0 +$
$x + 1,7$	-0	$+0 +$
$f(x) - 25,55$	$+0$	$-0 +$

donc

$$f(x) < 25,55 \Leftrightarrow f(x) - 25,55 < 0 \Leftrightarrow x \in]-1,7; 2,3[.$$

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 + 16x + 7$



1) Démontrer que $f(x) = 4(x+2)^2 - 9$

$$\begin{aligned} 4(x+2)^2 - 9 &= 4(x^2 + 4x + 4) - 9 = 4x^2 + 16x + 16 - 9 \\ &= 4x^2 + 16x + 7 = f(x) \end{aligned}$$

2) Factoriser $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= 4(x+2)^2 - 3^2 \\ &= (2x+4)^2 - 3^2 \\ &= (2x+4-3)(2x+4+3) \\ &= (2x+1)(2x+7) \end{aligned}$$

3) Choisir la forme la mieux adaptée et détailler les calculs pour calculer $f(-\frac{1}{2})$ et $f(\sqrt{2})$

$$f(-\frac{1}{2}) = (2 \times \frac{-1}{2} + 1)(2 \times \frac{-1}{2} + 7)$$

$$f(-\frac{1}{2}) = 0$$

$$f(\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2})^2 + 16\sqrt{2} + 7 = 16\sqrt{2} + 15$$

4) Dans le repère suivant tracer la représentation graphique de f

Voir la courbe

5) résoudre algébriquement $f(x) = 0$.

Effectuez les tracés sur la courbe ...

Expliquer comment contrôler les solutions sur le graphique

cela revient à chercher les points d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses.

6a) résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 2x+7$

Effectuer sur la courbe ...

b) résoudre graphiquement la même équation

Effectuer sur la courbe ...

7) quelle forme de $f(x)$ permet d'affirmer que $f(x)$ est toujours supérieur ou égal à -9.

Démontrer alors que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)$ est toujours supérieur ou égal à -9.

$$f(x) = 4(x+2)^2-9$$

$$f(x) - (-9) = 4(x+2)^2 \geq 0$$

donc

$$f(x) \geq -9$$

Comment contrôler ce résultat sur le graphique ?

la courbe a pour ordonnée minimale - 9 .

Exercice 12 :

1. On considère les fonctions f , g , h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x-1 ; g(x) = x^2 ; h(x) = 2x-1 .$$

a. Donner l'expression algébrique de la fonction composée $i=h \circ f \circ g$.

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, i(x) = h(f(g(x))) = h(3x^2-1) = 2 \times (3x^2-1) - 1 = 6x^2-3$$

b. ☐

$$i(0) = 6 \times (0)^2 - 3 = -3 .$$

☐ .

$$c.i(x) = 27 \Leftrightarrow 6x^2 - 3 = 27 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x =$$

2. Décomposer les fonctions suivantes à l'aide des fonctions de référence (fonctions usuelles).

a. $f =$.

b. $g =$.

c. $h =$.

d. $i =$.

Exercice 13 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 .$$

1. Montrer l'égalité des expressions algébriques suivantes :

$$(x-3)^2 - 4 = x^2 - 2 \times 3 \times x + 9 - 4 = x^2 - 6x + 5$$

2. On considère, désormais, la fonction f définie par $f(x) = (x-3)^2 - 4$:

a. $f = h \circ k \circ m$, $m(x) = x-3$, $k(x) = x^2$, $h(x) = x-4$

b. Sur $] -\infty ; 3]$ f est décroissante et sur $[3 ; +\infty[$, f est croissante.

d. La valeur minimale de f est atteinte en $x=3$ et sa valeur est $f(3)=-4$.

Exercice 14 :

a. Par la fonction g , -5 est l'image de 4 .

$$g(4) = -5$$

b. 2 a pour image 0 par la fonction f .

$$f(2) = 0$$

c. Un antécédent de -3 par h est 5 .

$$h(5) = -3$$

d. Les images par f de -3 et 5 sont nulles.

$$f(-3) = f(5) = 0$$

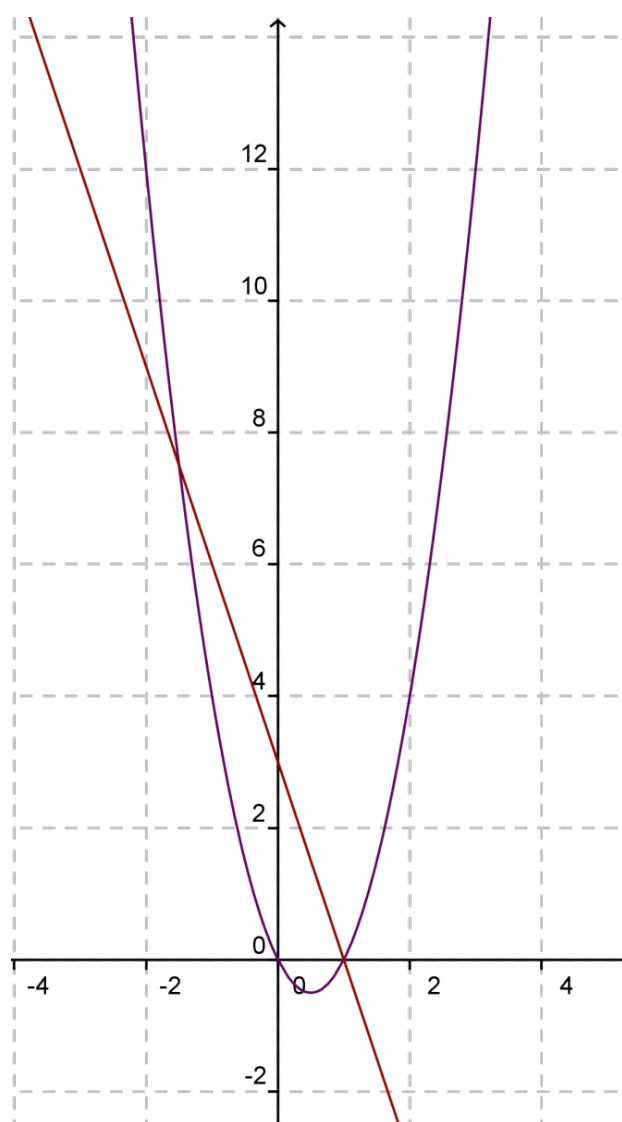
Exercice 15 :

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(x-1) \quad \text{et} \quad g(x) = -3x+3.$$

1. Tracer à l'écran de la calculatrice les courbes représentatives des fonctions

f et g .



2. Conjecturer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

Ils y a deux points d'intersection pour $x \simeq 1$ et $x \simeq -1,5$.

3. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$.

$$2x(x-1) = -3x+3$$

$$2x^2-2x = -3x+3$$

$$2x^2-2x+3x-3 = 0$$

$$2x^2+x-3 = 0$$

Cherchons la forme canonique.

$$2\left(x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$2\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$2\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{4}\right) = 0$$

$$2\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\right) = 0$$

$$2\left(x + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{2}\right) = 0$$

$$2\left(x + \frac{1+2\sqrt{7}}{4}\right)\left(x + \frac{1-2\sqrt{7}}{4}\right) = 0$$

$$2\left(x - \frac{-1-2\sqrt{7}}{4}\right)\left(x - \frac{-1+2\sqrt{7}}{4}\right) = 0$$

Un produit de facteur est nul si et seulement si

l'un des facteurs, au moins, est nul.

Les racines sont $\frac{-1-2\sqrt{7}}{4}; \frac{-1+2\sqrt{7}}{4}$.

soit $x \simeq -1,57$ et $x \simeq -1,07$

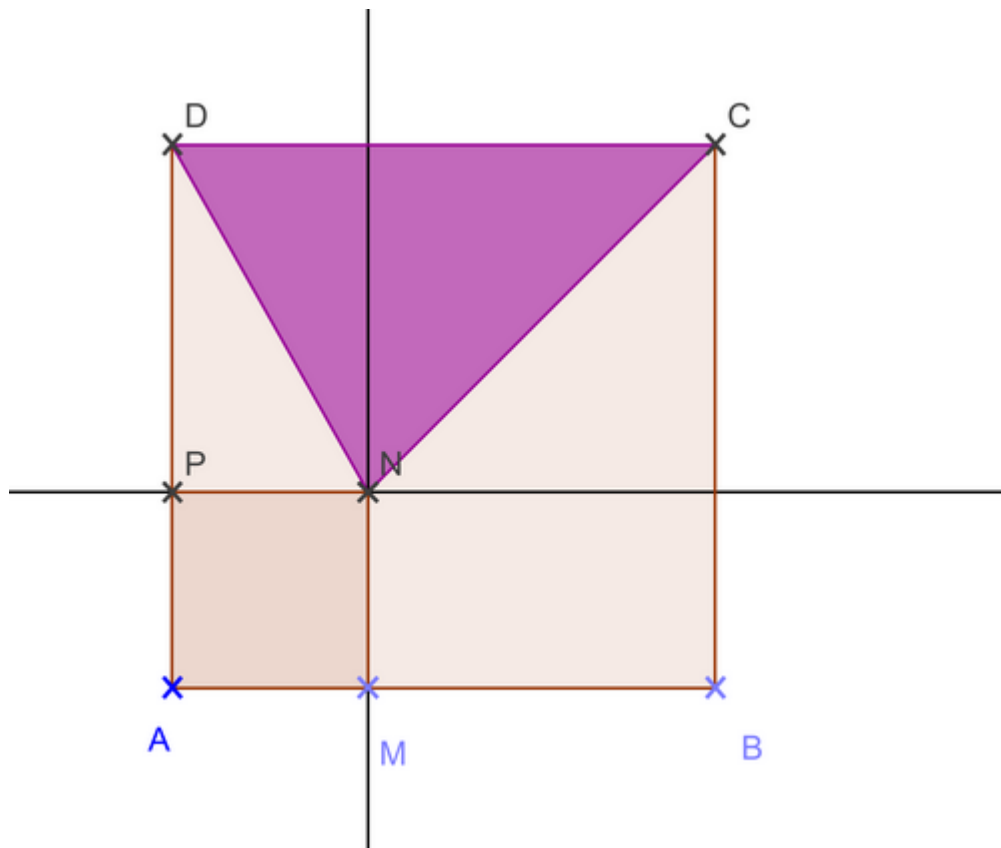
Exercice 16 :

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x-1\right)^2 - (2x-1)(2x+1)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1}{4}x^2 - 2 \times \frac{1}{2}x \times 1 + 1\right) - (4x^2 - 1) \\ &= \frac{1}{4}x^2 - x + 1 - 4x^2 + 1 = -\frac{15}{4}x^2 - x + 2 \end{aligned}$$

Exercice 17 :

Soit $f(x)$ l'aire du carré AMNP et $g(x)$ l'aire du triangle DNC



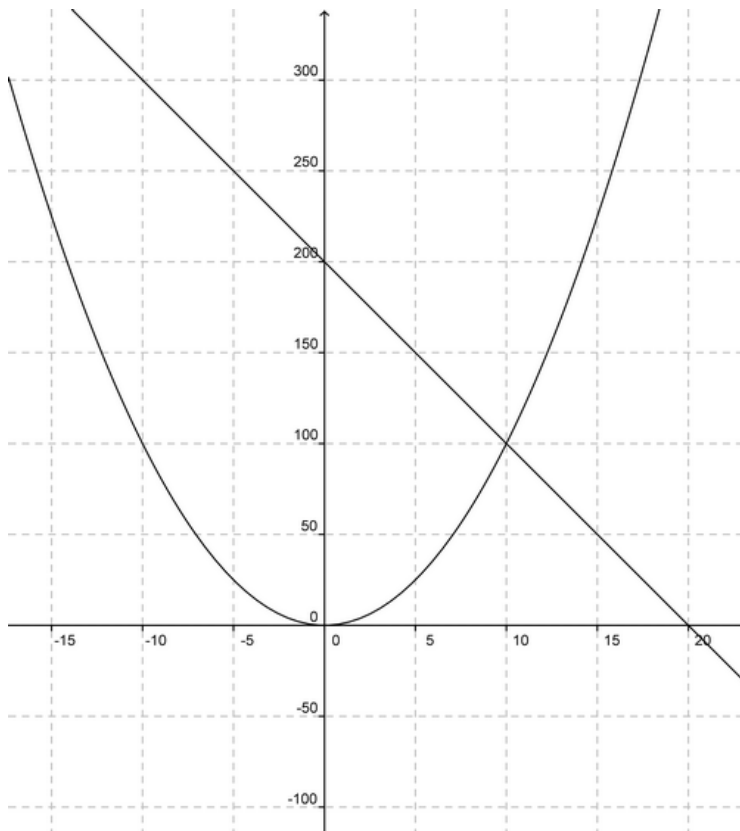
1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x

$$f(x) = x^2$$

2. Exprimer $g(x)$ en fonction de x

$$g(x) = \frac{20(20-x)}{2} = 10(20-x) = 200 - 10x$$

3. Représenter dans un même repère les fonctions f et g pour tout x de $[0;20]$



4. Déterminer graphiquement les valeurs de x pour lesquelles le carré AMNP et le triangle DNC ont la même aire .

Le nombre x étant une longueur par conséquent positif.

La seule valeur pour x est $x = 10$ cm .

Exercice 18 :

Partie A. Lecture graphique.

1°

a) Pour trouver la hauteur de la balle après 10 secondes, on cherche le point correspondant sur le graphe. On lit environ $f(10) = 37$ m.

b) La balle a été lancée à une hauteur de $f(0) = 15$ m.

c) Non, la balle ne peut pas être lancée à 20 m car la hauteur maximale atteinte est d'environ 37 m, comme on l'a vu à la question a).

d) La balle revient au sol lorsque sa hauteur est égale à 0. On lit sur le graphe que cela se produit environ à $x = 2,1$ s.

e) $f(3) \approx 0$ et $f(0) = 15$. $f(3)$ représente la hauteur de la balle après 3 secondes, c'est-à-dire lorsqu'elle

touche le sol, et $f(0)$ représente la hauteur initiale de la balle, c'est-à-dire lorsqu'elle est lancée.

2°

a) La hauteur maximale est atteinte lorsque la dérivée de $f(x)$ s'annule. On calcule d'abord la dérivée :

$$f'(x) = -10x + 10$$

On cherche le x tel que $f'(x) = 0$:

$$-10x + 10 = 0$$

$$x = 1$$

La hauteur maximale est donc atteinte à $x = 1$. On lit sur le graphe que $f(1) \approx 40$ m.

b) Pour trouver les instants où la hauteur est égale à 15 m, on cherche les points correspondants sur le graphe. On lit environ $x = 0,3$ s et $x = 2,7$ s.

c) Résoudre graphiquement $f(x) \geq 18$ revient à trouver les valeurs de x pour lesquelles la courbe de f est au-dessus de la droite d'équation $y = 18$. On trouve que $f(x) \geq 18$ pour x compris entre environ 0,45 s et 2,55 s. Cela signifie que la balle se trouve à une hauteur supérieure à 18 m pendant cette période de temps.

Partie B : Calculs .

1°

b) On a déjà trouvé $f(0) = 15$. Pour trouver le temps de chute, on cherche le x tel que $f(x) = 0$. En résolvant l'équation $-5x^2 + 10x + 15 = 0$, on trouve $x = 3$ s. Donc la balle revient au sol après 3 s.

2°

a) Il suffit de développer l'expression $(x-1)^2$:

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 15$$

$$= -5(x^2 - 2x + 1) + 20$$

$$= 20 - 5(x-1)^2$$

On a bien l'expression demandée.

b) En résolvant l'équation $-5(x-1)^2 + 20 = 15$, on trouve $(x-1)^2 = 1/5$, donc $x-1 = \pm\sqrt{1/5}$, donc $x \approx 1,45$ s ou $x \approx 0,55$ s. On retrouve le résultat de la question 1°b), qui est $f(0) = 15$.

3°

Comme le coefficient de x^2 est négatif, la fonction f est une fonction décroissante sur l'intervalle $[0 ; 3]$. Donc $f(0)$ est la hauteur maximale atteinte, et on retrouve le résultat de la question A1b).

4°

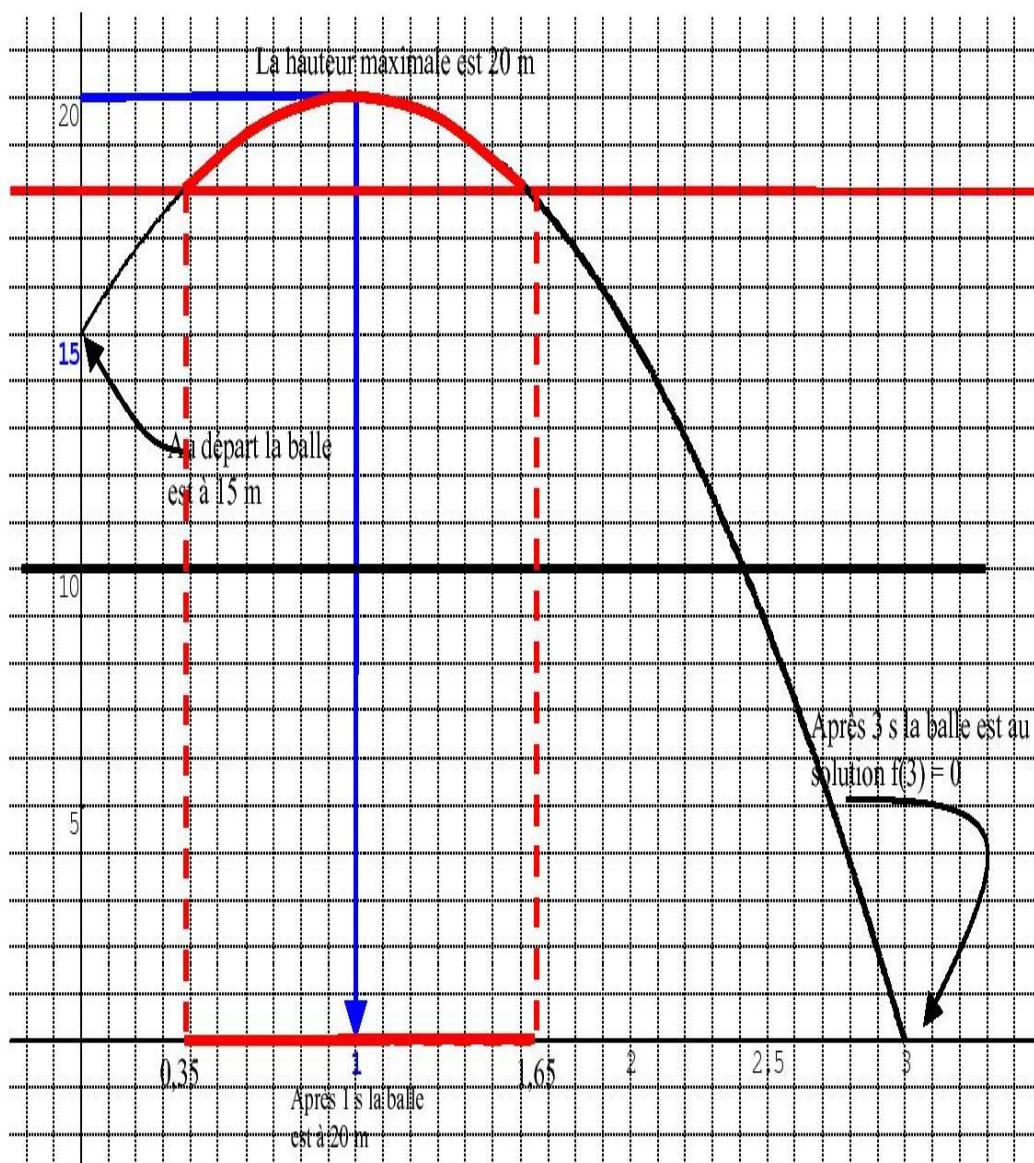
$$f(2) = -5(2)^2 + 10(2) + 15 = 5$$

$$f(2/3) = -5(2/3)^2 + 10(2/3) + 15 = 70/9$$

5°

Il s'agit de résoudre l'équation $-5x^2 + 10x + 15 = 0$. On peut la résoudre comme dans la question 1°b) en

utilisant la formule quadratique, ou bien en remarquant que $f(x) = 0$ équivaut à $f(x) = f(1) = 20 - 5(x-1)^2 = 0$, donc à $(x-1)^2 = 4$, donc à $x-1 = \pm 2$, donc $x = 3$ ou $x = -1$. Comme $x \in [0 ; 3]$, la seule solution possible est $x = 3$.



Exercice 19 :

Soit la fonction linéaire $f : x \mapsto 1,2x$.

a. $f(5)=6$; $f(-1,2)=-1,44$; $f(0)=0$; $f(100)=120$.

$$f(x) = 2400$$

b. $1,2x = 2400$

$$x = \frac{2400}{1,2} = 2000$$

De même : $x = -\frac{45}{1,2} = 37,5$

Exercice 20 :

Soit g la fonction linéaire telle que $g : x \mapsto -0,4x$.

- le coefficient de la fonction g est $a = -0,4$
- $g(10) = -4$; $g(-5) = 2$ et $g(1) = -0,4$.

Exercice 21 :

On sait que 18 a pour image 23 par la fonction f et que 12 a pour image 14 par f .

f est-elle une fonction linéaire ? Pourquoi ?

Calculons :

$$\frac{23}{18} - \frac{14}{12} = \frac{46}{36} - \frac{42}{36} = -\frac{4}{36} \neq 0$$

donc cette fonction n'est pas linéaire.

Exercice 22 :

Exprimer la fonction linéaire f sous la forme $x \mapsto ax$ (**le nombre a est à déterminer**), puis calculer $f(0)$; $f(1)$ et $f(-2)$.

- Lorsque l'image de 10 est - 3 alors $a = -\frac{10}{3}$ et $f(x) = -\frac{10}{3}x$
- Lorsque $f(-100) = -46$ alors $a = \frac{-46}{-100} = 0,46$ et $f(x) = 0,46x$.
- Lorsque le coefficient de f est 2,5 alors $f(x) = 2,5x$.

Exercice 29 :

Partie 1 :

$$f(x) = -3(x-2)^2 + 5$$

1) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

$$2) f(0) = -3(0-2)^2 + 5 = -3 \times 4 + 5 = -7$$

$$f(1) = -3(1-2)^2 + 5 = -3 \times 1 + 5 = 2 \quad f(-1) = -3(-1-2)^2 + 5 = -3 \times 9 + 5 = -22$$

$$f(-2) = -3(-2-2)^2 + 5 = -3 \times 16 + 5 = -43$$

3)

$$f(x) = -3(x-2)^2 + 5$$

$$-3(x-2)^2 + 5 = 0$$

$$-3(x-2)^2 = -5$$

$$(x-2)^2 = \frac{5}{3}$$

$$x-2 = -\sqrt{\frac{5}{3}} \text{ ou } x-2 = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

Ce sont les deux antécédents de 0.

$$x = 2 - \sqrt{\frac{5}{3}} \text{ ou } x = 2 + \sqrt{\frac{5}{3}}$$

4)

$$f(x) = -3(x^2 - 4x + 4) + 5$$

$$f(x) = -3x^2 + 12x - 12 + 5$$

$$f(x) = -3x^2 + 12x - 7$$

5)

$$f(x) = -3(x - 2 + \sqrt{\frac{5}{3}})(x - 2 - \sqrt{\frac{5}{3}})$$

$$f(x) = -3(x - 2 + \frac{\sqrt{15}}{3})(x - 2 - \frac{\sqrt{15}}{3})$$

$$f(x) = -3(x + \frac{-6 + \sqrt{15}}{3})(x - \frac{6 + \sqrt{15}}{3})$$

$$f(x) = 3(x + \frac{-6 + \sqrt{15}}{3})(-x + \frac{6 + \sqrt{15}}{3})$$

$$f(x) = 3(\frac{-6 + \sqrt{15}}{3} + x)(\frac{6 + \sqrt{15}}{3} - x)$$

$$, f(x) = 3(\frac{\sqrt{15}-6}{3} + x)(\frac{\sqrt{15}+6}{3} - x)$$

Partie 2 :

$$1) f(0) = 4 ; f(-2) = -2 ; f(2,5) = 3 .$$

$$2) -1,3 ; 0 \text{ et } 2,6 \text{ sont des valeurs approchées des antécédents de 4 par } f .$$

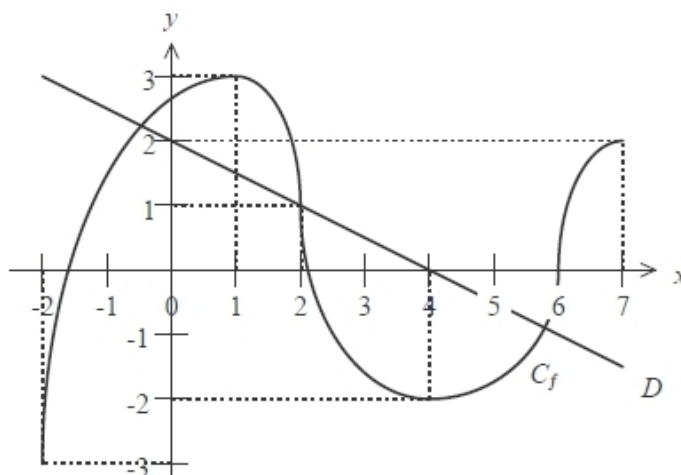
$$3) f(-1) = 5 \text{ et } f(1) = 1$$

4) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1,7$

5) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1,7$

Exercice 30 :

Ci-dessous, on a tracé une droite D et la représentation graphique C_f d'une fonction f définie sur $[-2 ; 7]$.



1. La droite D a pour équation (entourer la bonne réponse) :

$y = 2x - 4$

$y = -2x + 2$

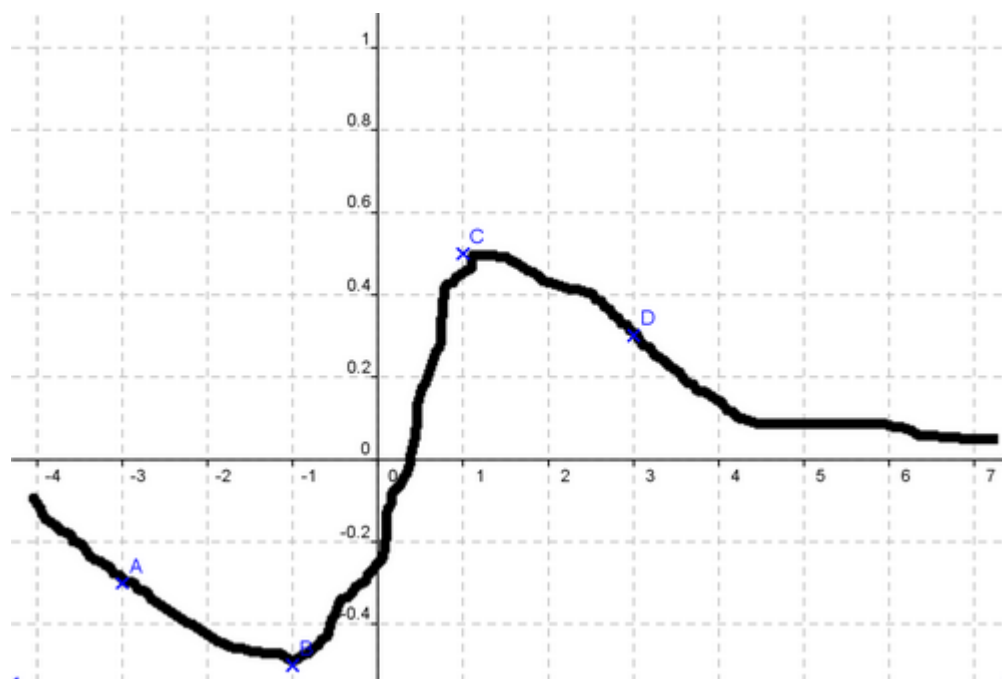
$y = \frac{1}{2}x - 2$

$y = -\frac{1}{2}x + 2$

2. Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

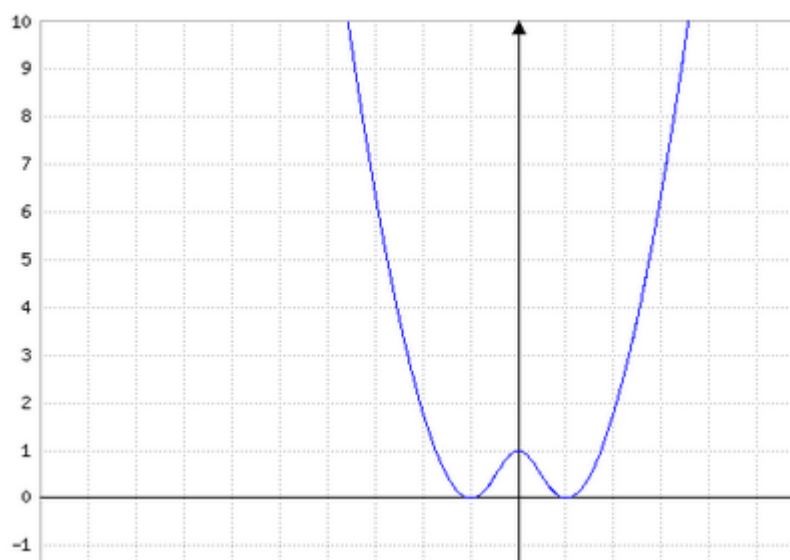
	A F F I R M A T I O N S	vrai ou faux
1	L'image de -2 par la fonction f est 4 .	FAUX
2	Le nombre 7 est un antécédent du nombre 2 par la fonction f .	VRAI
3	$f(1) = 3$.	VRAI
4	Le nombre 2 a trois antécédents par la fonction f .	VRAI
5	L'équation $f(x) = 1$ possède 3 solutions dans l'intervalle $[-2 ; 4]$.	FAUX
6	L'équation $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ possède 3 solutions dans l'intervalle $[-2 ; 7]$.	VRAI
7	La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-2 ; 7]$.	FAUX
8	La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1 ; 4]$.	VRAI

Exercice 32 :



Exercice 33 :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ car le dénominateur est strictement positif .
2. Le numérateur est strictement positif ainsi que le dénominateur
donc f également en tant que quotient de nombres strictement positifs .
3. f est paire (montrer que $f(-x)=f(x)$) .
- 4.



5. La valeur du maximum de f sur $[-1 ; 1]$ et sur $[-2;1]$ est 1 .

6.

$$f(x) \leq 1$$

$$\frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} \leq 1$$

$$(1-x^2)^2 \leq 1+x^2 \quad (\text{car } 1+x^2 > 0)$$

$$1-2x^2+x^4 \leq 1+x^2$$

$$1-1-2x^2-x^2+x^4 \leq 0$$

$$-3x^2+x^4 \leq 0$$

$$x^2(-3+x^2) \leq 0$$

$$-3+x^2 \leq 0$$

$$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \leq 0$$

Faire un tableau de signe, et montrer que :

$$S = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$$

Exercice 34 :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + x + 3$

1. Calculer l'image de 0, l'image de 1 et l'image de $\sqrt{2}$ par la fonction f .



$$f(1) = 2 \times 1^2 + 1 + 3 = 6$$

$$f(\sqrt{2}) = 2 \times (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} + 3 = 2 \times 2 + \sqrt{2} + 3 = 7 + \sqrt{2}$$

2. Déterminer le (ou les) antécédent(s) de 3 par f .

$$f(x) = 3$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x + 3 = 3$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(2x+1) = 0$$

Propriété :

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs, au moins, est nul.

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

Les antécédents de 3 sont $x = 0$ et $x = -\frac{1}{2}$

Exercice 35 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = -3(t-1)^2.$$

1. Calculer l'image de 2.

$$f(2) = -3(2-1)^2 = -3$$

2. Calculer $f(-3)$.

$$f(2) = -3(-3-1)^2 = -3 \times 16 =$$

3. Est-il vrai que 4 n'admet pas d'antécédent par f ?

$$f(x) = 4$$

$$-3(t-1)^2 = 4$$

$$(t-1)^2 = -\frac{4}{3}$$

or le carré d'un nombre est positif ou nul donc en effet 4 n'admet pas d'antécédent par f .

4. Est-il vrai que 0 admet un seul antécédent par f ?

$$f(x) = 0$$

$$-3(t-1)^2 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0$$

$$t-1 = 0$$

$$t = 1$$

0 admet un unique antécédent par f qui est 1.

5. Déterminer un antécédent de -12 .

$$f(x) = -12$$

$$-3(t-1)^2 = -12$$

$$(t-1)^2 = \frac{-12}{-3}$$

$$(t-1)^2 = 4$$

$$(t-1)^2 - 2^2 = 0$$

$$(t-1-2)(t-1+2) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs, au moins, est nul.

$$t-1-2 = 0 \text{ ou } t-1+2 = 0$$

$$t-3 = 0 \text{ ou } t+1 = 0$$

$$t = 3 \text{ ou } t = -1$$

ainsi

-12 admet exactement deux antécédents par f qui sont 3 et -1.

Exercice 36 :

f est la fonction définie sur $] -2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

1. Expliquer pourquoi f n'est pas définie en -2 .

car pour $x=-2$ le dénominateur est nul donc on ne peut pas calculer l'image de -2.

2. Calculer $f(4)$.

$$f(4) = \frac{1}{4+2} = \frac{1}{6}$$

3. Déterminer l'antécédent de $\frac{1}{2}$.

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}$$

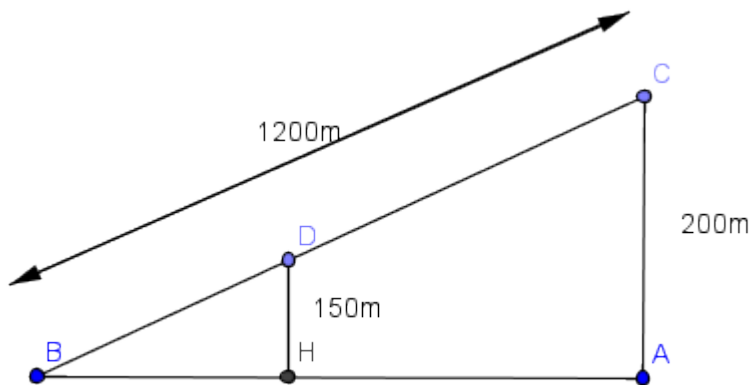
$$x+2 = 2$$

$$x = 0$$

L'antécédent de $\frac{1}{2}$ par f est 0.

Exercice 37 :

Calcule la longueur DB qu'il lui reste à parcourir.



$$\begin{cases} D \in (BC) \\ H \in (AB) \\ (DH) \parallel (AC). \end{cases} \quad \text{d'après la partie directe du théorème de Thalès :}$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{DH}{AC}$$

$$\frac{BD}{1200} = \frac{150}{200}$$

$$BD = \frac{150 \times 1200}{200}$$

$$BD =$$

Exercice 38 :

On fabrique une boîte à partir d'une feuille de carton carrée de 18 cm de côté dont on coupe et relève les coins.

On note x la largeur de l'encoche exprimée en cm, $f(x)$ le volume de la boîte exprimée en cm cube.

1) Donner les valeurs possibles de x .

$$18 - 2x \geq 0$$

$$18 \geq 2x$$

$$0 \leq x \leq 9$$

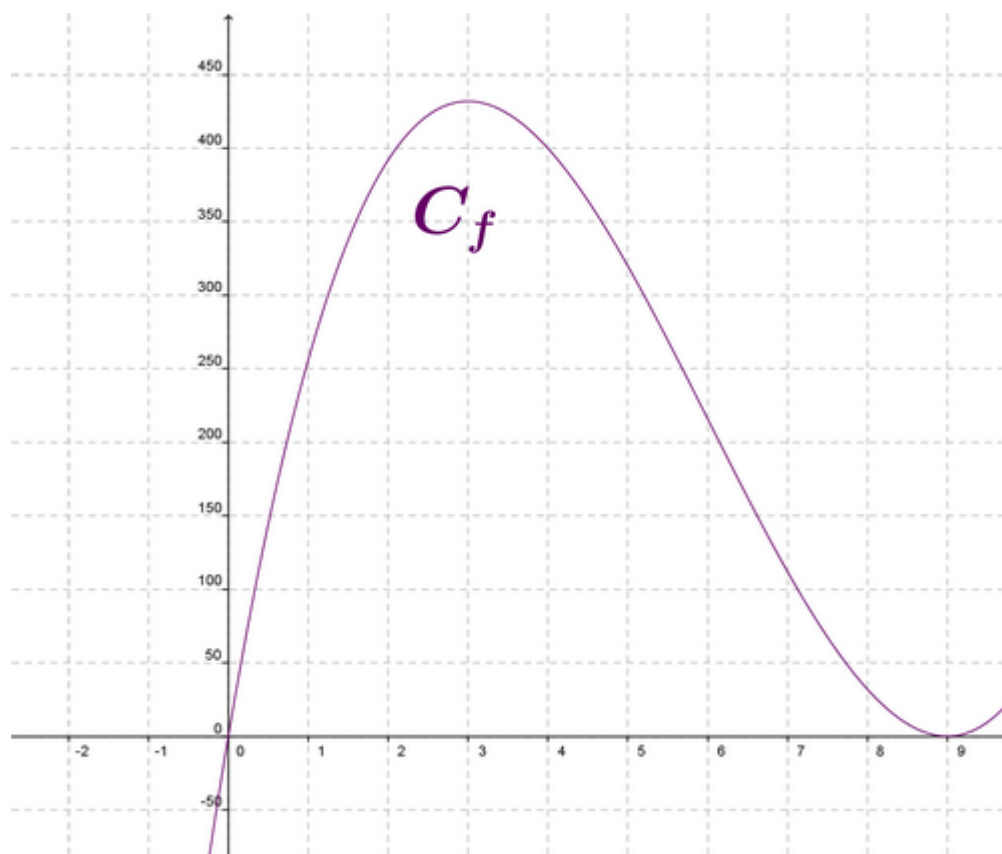
En déduire l'ensemble de définition D de f .

$$D_f = [0; 9]$$

2) Donner l'expression de f sur D.

$$f(x) = x(18-2x)^2$$

3) Représenter graphiquement cette fonction.



4) A l'aide du graphique, donner la valeur de x pour laquelle le volume de la boîte est maximal et établir le tableau de variations de la fonction f.

Le volume de la boîte est maximal pour $x = 3\text{cm}$.

5) Montrer que $f(x) - f(3) = 4(x-3)^2(x-12)$.

$$\begin{aligned} f(x) - f(3) &= x(18-2x)^2 - 3(18-6)^2 \\ &= x(18-2x)^2 - 3 \times 144 \\ &= x(324 - 72x + 4x^2) - 432 \\ &= 4x^3 - 72x^2 + 324x - 432 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 4(x-3)^2(x-12) &= 4(x^2-6x+9)(x-12) \\
 &= 4(x^3-12x^2-6x^2+72x+9x-108) \\
 &= 4(x^3-18x^2+81x-108) = 4x^3-72x^2+324x-432
 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$f(x) - f(3) = 4(x-3)^2(x-12)$$

En déduire que $f(x)$ est inférieur ou égal à $f(3)$ pour tout x élément de $[0;9]$.

Que peut-on en conclure ?

$f(3)$ étant le maximum et $f(3)=432$.

Le volume maximal de la boîte est de 432 cm^3 .