

Fonction exponentielle

Exercice 1 - Primitive d'une fonction composée

Soit la fonction f définie par $f(x) = (x-3)^{\frac{2}{3}}$

1. Donner le domaine de définition de la fonction f .
2. Donner une primitive de la fonction.

Exercice 2 - Fonctions puissances

soit la fonction f tel que : $f(x) = x^x + 1$

1. Indiquer le domaine de définition de f et transformer l'écriture du réel $f(x)$.
2. Donner un prolongement par continuité de f au point 0.
3. Etudier la dérivabilité de f au point 0.
4. Calculer la dérivée de f et étudier son signe. Etablir le tableau de variations.
5. Décrire comment se présente la tangente en ce point.
6. Construire la courbe dans un repère approprié.

Exercice 3 - Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

* $e^0 = 1$

* Pour tous réels x et y , $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

1. Démontrer que pour tout réel x , $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.
2. Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n ,
 $(e^x)^n = e^{nx}$

Exercice 4 - Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^\pi < \frac{1}{2}$.
2. $3^x \geq 4$.

Exercice 5 - Primitives de fonctions exponentielles

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin x \times e^{\cos x}$.
2. $f(x) = x^{-2} e^{\frac{1}{x}}$ sur $] -\infty; 0[$.

Exercice 6 - Etude d'une fonction

Soit $f(x) = (x-1)e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminez les limites de f aux bornes du domaine de définition.

2. Etudier les variations de f.
3. Construisez la courbe C représentant f.

Exercice 7 - Résoudre les équations et inéquations proposées

$$1. e^{2x^2+3} = e^{7x}.$$

$$2. 2e^{-x} = \frac{1}{e^x+2}.$$

$$3. e^x \leq \frac{1}{e^x}.$$

Exercice 8 - Bénéfice d'une entreprise

Une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'objets. Chaque objet est vendu 100 .

Le coût de production unitaire $C_u(x)$ exprimant le coût de production par objet produit est :

$$C_u(x) = x - 10 + \frac{900}{x} \text{ pour } x \text{ dans } [10 ; 100]$$

$$1.a) \text{ Montrer que } C'_u(x) = \frac{(x-30)(x+30)}{x^2}.$$

b) Etudier le signe de $C'_u(x)$ sur $[10 ; 100]$ et en déduire le tableau de variation de la fonction C_u sur $[10 ; 100]$.

c) Déterminer pour quelle production le coût unitaire est le plus bas. Déterminer alors le bénéfice de l'entreprise.

2. Montrer que le bénéfice global de l'entreprise s'exprime par : $B(x) = -x^2 + 110x - 900$.

3. Déterminer son sens de variation sur $[10 ; 100]$ et déterminer la production qui donne un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice ?

Exercice 9 - Problème de courbe

La courbe représente une fonction f définie par $f(x) = (ax+b)\exp(-x)$.

Elle passe par les points de coordonnées $(0;2)$ et $(-2;0)$.

- 1) Calculer a et b .
- 2) Déterminer les coordonnées du maximum après avoir étudié les variations de f .

Exercice 10 - Logarithme et exponentielle

Simplifier au maximum :

$$A = \ln(\sqrt{80}) - \frac{1}{2}\ln 5$$

$$B = \ln(\sqrt{6}-1) + \ln(\sqrt{6}+1) - \ln(\sqrt{100}) - \ln \frac{1}{8}$$

Exercice 11 - Calcul de dérivées et de limites

Calculez les dérivées et les limites aux bornes des ensembles de définitions des

fonctions définies par les expressions suivantes :

$$1. f(x) = e^{4x+1}$$

$$2. f(x) = e^x + x^2 + 1$$

$$3. f(x) = 5e^x + 5xe^x$$

$$4. f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

$$5. f(x) = \frac{3x + 1 - e^x}{e^x}$$

$$6. f(x) = x^3 e^{-x}$$

Exercice 12 - Simplifier des exponentielles

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$1. e^x e^{-x}.$$

$$2. e^x e^{-x} + 1$$

$$3. e e^{-x}$$

$$4. (e^{-x})^2$$

$$5. \frac{e^{2x}}{e^{2-x}}$$

$$6. \frac{(e^x)^3}{e^{2x}}$$

Exercice 13 - Résoudre des équations et inéquations contenant des exponentielles

Résoudre les équations et inéquations :

$$\bullet e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$$

$$\bullet e^{3x} - e^x = 0$$

$$\bullet e^x + e^{-x} = 1$$

$$\bullet e^{2x-1} < \sqrt{e}$$

$$\bullet 4e^{2x} < 3e^x + 1$$

$$\bullet e^{\frac{2x-1}{3x+1}} > \frac{1}{e^2}$$

Exercice 14 - Etude de l'équation $\ln x = x^n$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in]0 ; +\infty[$ et (E) l'équation : $\ln x = x^n$

1. Dans cette question, $n = 1$. Déterminer les variations de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$, par :

$$f(x) = x - \ln x.$$

En déduire, que dans le cas $n = 1$, l'équation (E) n'a aucune solution dans $]0 ; +\infty[$.

2. Dans cette question, n est quelconque. En choisissant la bonne fonction, démontrer, comme ci-dessus, que l'équation (E) n'a aucune solution dans $]0 ; +\infty[$, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 15 -Courbe de Gauss

soit $k \in \mathbb{R}^{+*}$. On définit sur $\mathbb{R}$, la fonction G_k par $G_k(x) = e^{-kx^2}$.

1. Etudier la parité de G_k .
2. Démontrer G_k que est dérivable et calculer sa dérivée. En déduire le tableau de variations de G_k .
3. Calculer G'_k et résoudre $G'_k(x) = 0$.
4. Tracer les courbes de G_k pour $k = \frac{1}{2}, 1, 2$.
5. Démontrer que $h \leq k \Leftrightarrow G_h \geq G_k$ sur $\mathbb{R}$.
6. Dans cette question $k = \frac{1}{2}$. Soit α la solution positive de l'équation $G''_k(x) = 0$.
7. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de G_k au point d'abscisse α .
8. Tracer T sur le graphique.

Exercice 16 -Extrait baccalauréat.

Partie A

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(E_n) \quad y' + y = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h , définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel :

$$g(x) = h(x)e^{-x}$$

- a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel :

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

- b. En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n) , sachant que $f(0)=0$.

Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit ϕ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

- a. Montrer que ϕ est solution de (E_n) si et seulement si $\phi - g$ est solution de l'équation :
(F) $y' + y = 0$

- b. Résoudre (F).

- c. déterminer la solution générale ϕ de l'équation (E_n) .

- d. Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0)=0$.

Partie B

Le but de cette partie est de montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) = e$$

1. On pose, pour tout x réel,

$$f_0(x) = e^{-x}, f_1(x) = xe^{-x}.$$

a. vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.

b. Pour tout entier strictement positif n , on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.

En utilisant la partie A, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geq 1$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

2. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

a. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle $[0;1]$, l'encadrement :

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}.$$

En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n) .

b. Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité :

$$I_k - I_{k-1} = -\frac{1}{k!} e^{-1}.$$

c. Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que :

$$I_n = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{e^{-1}}{k!}.$$

d. En déduire finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) = e$$

