

Fonction exponentielle

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = (x-3)^{\frac{2}{3}}$

1. Donner le domaine de définition de la fonction f .

nous avons $f(x) = e^{\frac{2}{3}\ln(x-3)}$

donc pour que f soit définie, il faut que $x-3 > 0$ soit $x > 3$.

ainsi :

$$D_f =$$

2. Donner une primitive de la fonction.

les primitives de f sont de la forme :

$$F(x) = \frac{3}{5}(x-3)^{\frac{2}{3}+1} + k = \frac{3}{5}(x-3)^{\frac{5}{3}} + k, k \in \mathbb{R}$$

Exercice 2 :

soit la fonction f tel que : $f(x) = x^x + 1$

1. Indiquer le domaine de définition de f et transformer l'écriture du réel $f(x)$.

$$f(x) = e^{x\ln x} + 1$$

donc $D_f =]0; +\infty[$

2. Donner un prolongement par continuité de f au point 0.

$$f(0) = 2$$

3. Etudier la dérivabilité de f au point 0.

4. Calculer la dérivée de f et étudier son signe. Etablir le tableau de variations.
5. Décrire comment se présente la tangente en ce point.
6. Construire la courbe dans un repère approprié.

Exercice 3 :

1. Démontrer que pour tout réel x , $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

d'après la formule ci-dessus :

$$e^{x+(-x)} = e^x e^{-x}$$

donc

$$e^0 = e^x e^{-x}$$

$$1 = e^x e^{-x}$$

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x} \text{ car } e^x > 0$$

2. Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n ,

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

Exercice 4:

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^\pi < \frac{1}{2}$.

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\ln(x^\pi) < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\pi \ln x < -\ln(2)$$

$$\ln x < \frac{-\ln(2)}{\pi}$$

$$e^{\ln x} < e^{\left(\frac{-\ln(2)}{\pi}\right)}$$

$$x < e^{\left(\frac{-\ln(2)}{\pi}\right)}$$

$$2. \quad 3^x \geq 4.$$

$$\ln(3^x) \geq \ln 4$$

$$\ln(3)x \geq \ln 4$$

$$x \geq \frac{\ln 4}{\ln 3} \quad (\text{car } \ln 3 > 0)$$

Exercice 5 :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$1. \quad f(x) = \sin x \times e^{\cos x}.$$

une primitive est de la forme $F(x) = -e^{\cos x} + k$ ($k \in \mathbb{R}$).

$$2. \quad f(x) = x^{-2} e^{\frac{1}{x}} \text{ sur }]-\infty; 0[.$$

une primitive est de la forme $F(x) = -e^{\frac{1}{x}} + k$ ($k \in \mathbb{R}$).

Exercice 6 :

Soit $f(x) = (x-1)e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminez les limites de f aux bornes du domaine de définition.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. Etudiez les variations de f .

$$f'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

$$f' \geq 0 \text{ sur } [0; +\infty[\text{ donc } f \text{ est croissante sur } [0; +\infty[.$$

3. Construisez la courbe C représentant f .



Exercice 7 :

Résoudre les équations et inéquations proposées.

$$1. e^{2x^2+3} = e^{7x}$$

$$\ln(e^{2x^2+3}) = \ln(e^{7x})$$

$$2x^2+3 = 7x$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

Calculons la valeur du discriminant :

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3 =$$

Le discriminant est strictement positif, il existe donc deux racines réelles distinctes.

$$x_1 = \frac{7+5}{4} \text{ et } x_2 = \frac{7-5}{4}$$

$$x_1 = 3 \text{ et } x_2 = \frac{1}{2}$$

Exercice 8 :

1.a) Pour calculer la dérivée de $C_u(x)$, on utilise la formule pour la dérivée d'un quotient :

$$C'_{u(x)} = \frac{d}{dx}[x-10] + \frac{d}{dx}\left(\frac{900}{x}\right) = 1 - \frac{900}{x^2}$$

En simplifiant, on obtient :

$$C'_{u(x)} = \frac{x^2 - 900}{x^2} = \frac{(x-30)(x+30)}{x^2}$$

b) Le dénominateur est toujours positif car x est dans l'intervalle $[10, 100]$.

Le numérateur est positif pour $x > 30$ et négatif pour $x < 30$.

Donc, le signe de $C'_{u(x)}$ dépend du signe de $(x-30)(x+30)$. On peut établir le tableau de signes suivant :

x	10	30	100
	----	-----	-----
$C'_{u(x)}$	$-$	0	$+$

En utilisant ce tableau, on peut établir le tableau de variation de $C_u(x)$:

x	10	30	100
	----	-----	-----
$C_u(x)$	$+$	mín	$+$

c) Le coût unitaire est le plus bas lorsque $C_u(x)$ est minimal.

Comme la fonction $C_u(x)$ est décroissante sur $[10,30]$ et croissante sur $[30,100]$, son minimum est atteint en $x = 30$. Le coût unitaire minimal est donc $C_u(30) = 20$.

Le bénéfice de l'entreprise par objet vendu est la différence entre le prix de vente et le coût unitaire, soit :

$$B_0 = 100 - 20 = 80$$

2. Le bénéfice global de l'entreprise est donné par la formule $B(x) = x(100 - C_u(x))$, car l'entreprise fabrique et vend x objets par jour.

En remplaçant $C_u(x)$ par son expression en fonction de x , on obtient :

$$B(x) = x\left(100 - \left(x - 10 + \frac{900}{x}\right)\right) = -x^2 + 110x - 900$$

3. Pour trouver le maximum de la fonction B sur [10,100], on peut calculer sa dérivée :

$$B'(x) = -2x + 110$$

La dérivée est nulle en $x = 55$, ce qui est bien dans l'intervalle [10,100]. Pour déterminer que cette valeur est un maximum, on peut regarder le signe de la dérivée dans les intervalles [10,55] et [55,100]. On peut établir le tableau de signes suivant :

x		10		55		100
----- ----- ----- -----						
$B'(x)$						
- - + -						

Donc, la fonction B est décroissante sur [10,55] et croissante sur [55,100], avec un maximum en $x = 55$.
Le bénéfice maximal est donc $B(55) = -55^2 + 110 \times 55 - 900 = 3025$.

Exercice 9 :

La courbe représente une fonction f définie par $f(x) = (ax+b)e^{-x}$.

Elle passe par les points de coordonnées (0;2) et (-2;0).

1) Calculer a et b .

$$f(0) = 2 \text{ et } f(-2) = 0$$

$$be^0 = 2 \text{ et } (-2a+b)e^2 = 0$$

$$b = 2 \text{ et } (-2a+2)e^2 = 0$$

$$b = 2 \text{ et } -2a+2 = 0$$

$$b = 2 \text{ et } a = 1$$

Conclusion : $f(x) = (x+2)e^{-x}$

2) Déterminer les coordonnées du maximum après avoir étudié les variations de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur cet intervalle .

$$f'(x) = e^{-x} + (x+2) \times (-e^{-x})$$

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} - 2e^{-x}$$

$$f'(x) = -xe^{-x} - e^{-x}$$

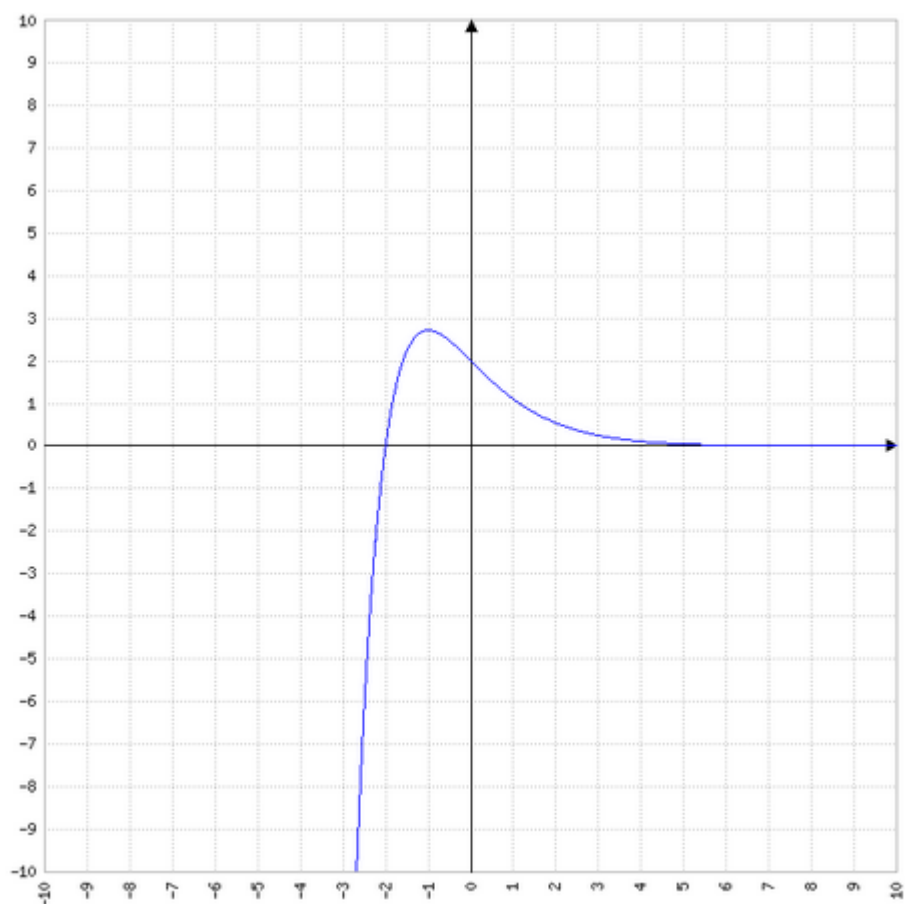
$$f'(x) = -(x+1)e^{-x}$$

Le signe de f' est celui de $-x-1$ puisque l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

$$-x-1 \geq 0$$

$$x \leq -1$$

Conclusion : f est croissante sur $]-\infty; -1]$.



Exercice 10 :

Simplifier au maximum :

$$A = \ln(\sqrt{80}) - \frac{1}{2}\ln 5$$

$$A = \ln(80^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}\ln 5$$

$$A = \frac{1}{2}\ln(80) - \frac{1}{2}\ln 5$$

$$A = \frac{1}{2}\ln(5 \times 16) - \frac{1}{2}\ln 5$$

$$A = \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 16 - \frac{1}{2}\ln 5$$

✖

$$A = \frac{1}{2}\ln 2^4$$

$$A = \frac{4}{2}\ln 2$$

A =

$$B = \ln(\sqrt{6}-1) + \ln(\sqrt{6}+1) - \ln(\sqrt{100}) - \ln \frac{1}{8}$$

$$B = \ln[(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)] - \ln(100^{\frac{1}{2}}) - (-\ln 8)$$

$$B = \ln[(\sqrt{6})^2 - 1^2] - \frac{1}{2}\ln(100) - (-\ln 8)$$

$$B = \ln 5 - \frac{1}{2}\ln(10^2) + \ln 8$$

$$B = \ln 5 - \frac{2}{2}\ln(10) + \ln 8$$

$$B = \ln 5 - \ln(10) + \ln 8$$

$$B = \ln 5 - \ln(5 \times 2) + \ln 2^3$$

$$B = \ln 5 - \ln 5 - \ln 2 + 3\ln 2$$

B =

Exercise 11 :

$$1. f(x) = e^{4x+1}$$

$$f'(x) = 4e^{4x+1}$$

$$2. f(x) = e^x + x^2 + 1$$

$$f'(x) = e^x + 2x$$

$$3. f(x) = 5e^x + 5xe^x$$

$$f'(x) = 5e^x + 5e^x + 5xe^x = 10e^x + 5xe^x$$

$$4. f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x-1) - (e^x+1)e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}-e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$5. f(x) = \frac{3x+1-e^x}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{(3-e^x)e^x - (3x+1-e^x)e^x}{e^{2x}}$$

$$= \frac{3e^x - e^{2x} - 3xe^x + 1e^x - e^{2x}}{e^{2x}}$$

$$6. f(x) = x^3 e^{-x}$$

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = (3x^2 - x^3) e^{-x}$$

Exercice 12 :

$$1. e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$$

$$2. e^x e^{-x+1} = e^1 = e$$

$$3. e e^{-x} = e^1 e^{-x} = e^{1-x}$$

$$4. (e^{-x})^2 = e^{-2x}$$

$$5. \frac{e^{2x}}{e^{2-x}} = e^{2x-2+x} = e^{3x-2}$$

$$6. \frac{(e^x)^3}{e^{2x}} = e^{3x-2x} = e^x$$

Exercice 13 :

1. On peut remarquer que l'équation peut être mise sous la forme d'une équation du second degré en e^x en posant $e^x = t$:

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

On peut résoudre cette équation en utilisant la méthode habituelle pour résoudre une équation quadratique :

$$(t+4)(t-1) = 0$$

Donc, $t = -4$ ou $t = 1$. En remplaçant t par e^x , on trouve que les solutions de l'équation sont :

$$e^x = -4 \text{ (pas de solution réelle) ou } e^x = 1 \iff x =$$

2. On factorise par e^x :

$$e^x(e^{2x-1}-1)=0$$

Donc, $e^x=0$ (pas de solution réelle) ou $e^{2x-1}=1 \iff 2x-1=0 \iff x=$

3. On peut remarquer que l'équation est similaire à $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}$, qui est équivalente à $\cosh^{-1}\frac{1}{2} = x$.

En utilisant la définition de la fonction cosinus hyperbolique inverse (aussi appelée arccosh), on a :

$$x = \ln\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}-1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \ln\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right) = \frac{i\pi}{3}$$

ou

$$x = \ln\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}-1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \ln\left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\right) = -\frac{i\pi}{3}$$

donc les solutions de l'équation sont $x = \pm \frac{i\pi}{3}$.

4. On peut diviser les deux membres de l'inéquation par e^x pour obtenir :

$$e^x + e^{-x} < 1$$

En utilisant la même astuce que précédemment, on remarque que cette inéquation équivaut à $\cosh x < \frac{1}{2}$.

Or, on sait que $\cosh x \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc il n'y a pas de solution à cette inéquation.

5. On peut réécrire l'inéquation sous la forme $e^{2x} < \frac{3}{4}(e^x)^2 + \frac{1}{4}$, ce qui peut être factorisé en $(e^x - \frac{1}{2})(3e^x + 1) < 0$.

On peut résoudre cette inéquation en utilisant le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$ \frac{\ln 3}{2}$	$ \infty$
---	---	---	---
$e^x - \frac{1}{2}$	-	-	+
$3e^x + 1$	-	+	+
Produit	+	-	+

Donc, les solutions sont $x \in (-\infty, \frac{\ln 3}{2})$.

6. On peut appliquer la fonction exponentielle des deux côtés de l'inéquation, en prenant soin de

conserver le sens de l'inégalité :

$$e^{x(\frac{2x-1}{3x+1})} > e^{-2}$$

En utilisant la propriété de la fonction exponentielle $a^b > c \iff b \ln a > \ln c$, on peut appliquer le logarithme naturel des deux côtés de l'inégalité :

$$x(\frac{2x-1}{3x+1}) > -2$$

En multipliant par le dénominateur $3x+1$ (qui est toujours positif puisque $x > 0$), on obtient :

$$2x^2 - 7x - 2 > 0$$

On peut résoudre cette inéquation en utilisant la méthode habituelle pour résoudre une inéquation quadratique :

$$x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2$$

Mais on doit également vérifier que le dénominateur de la fraction initiale est toujours positif dans l'intervalle des solutions (c'est-à-dire $x \in (0, \infty)$),

sinon nous aurions une solution qui ne fonctionne pas.

Le dénominateur $3x+1$ est toujours positif dans cet intervalle, donc l'ensemble des solutions de l'inéquation initiale est $x \in (0, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	0	$+\infty$

x	$-\infty$	2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	$+$
f	0	$-\infty$	$2e^4$	$+\infty$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f'		$+$	$-$
f	$-\infty$	$2e^{-\frac{3}{2}}$	0

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
f'		$+$	$-$	$+$
f	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{-1-\sqrt{5}}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}e^{-1+\sqrt{5}}$	$+\infty$

Exercice 14 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in]0, +\infty[$ et (E) l'équation : $\ln x = x^n$

1. Ce travail a déjà été fait en cours. On a obtenu :

$$\ln x < x \text{ pour tout } x \in]0, +\infty[$$

L'équation (E) n'admet donc pas de solution dans le cas $n = 1$

2. On considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n - \ln x$$

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ (différence de deux fonctions qui le sont) et pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f'_n(x) = n x^{n-1} - \frac{1}{x} = \frac{nx^n - 1}{x}$$

On a, pour $x \in]0, +\infty[$:

$$f'_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow nx^n - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^n \geq \frac{1}{n} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x \geq \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$$

(La dernière inégalité étant une conséquence de la croissance de l'application $t \mapsto t^\alpha$ sur $]0, +\infty[$ lorsque $\alpha > 0$)

Notons $\alpha_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$. Ainsi f est croissante sur $[\alpha_n, +\infty[$ et décroissante sur $]0, \alpha_n]$.

Elle admet donc un minimum en α_n qui est :

$$f_n(\alpha_n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = \frac{1 + \ln n}{n} > 0 \text{ (car } n \in \mathbb{N}^*)$$

Donc f_n est donc strictement positive sur $]0, +\infty[$.

L'équation (E) n'admet donc pas de solutions, ceci quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 15 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$G_k(-x) = e^{-k(-x)^2} = e^{-kx^2} = G_k(x)$$

Donc, la fonction G_k est paire.

2. La fonction G_k est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$G'_k(x) = (-2kx)e^{-kx^2} = -2kxG_k(x)$$

En utilisant le signe de G_k et le tableau de variations de $x \rightarrow x$, on peut établir le tableau de variation de G_k :

x	]-∞	0	+∞
G_k(x)	0	reste	reste
G'_k(x)	-	0	+

3. Pour résoudre $G'_k(x) = 0$, on doit chercher les valeurs de x pour lesquelles $-2kxG_k(x) = 0$. Cette équation est vraie si et seulement si $x = 0$ ou $G_k(x) = 0$. La valeur $x = 0$ n'est pas une solution car ce point correspond à un maximum local de la fonction G_k . Donc, les solutions doivent vérifier $G_k(x) = 0$, c'est-à-dire $e^{-kx^2} = 0$. Mais cette équation n'a pas de solution réelle car l'exponentielle est toujours strictement positive.

4. Voici les courbes de G_k pour $k = \frac{1}{2}, 1, 2$:

![Courbes_Gk.png](attachment:Courbes_Gk.png)

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $h < k > 0$, on a :

$$G_h(x) = e^{-hx^2} \leq e^{-kx^2} = G_k(x)$$

Cela s'explique par le fait que le coefficient $-hx^2$ est plus petit (ou égal) que le coefficient $-kx^2$, donc l'exponentielle décroît moins rapidement pour h que pour k , ce qui fait que la fonction G_h est plus grande (ou égale) que la fonction G_k pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6. L'équation $G''_{\frac{1}{2}}(x) = 0$ équivaut à $4x^2 - 2 = 0$, qui a pour solution positive $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

7. La tangente à la courbe de $G_{\frac{1}{2}}$ au point d'abscisse α est la droite affine de coefficient directeur $G'_{\frac{1}{2}}(\alpha) = -\sqrt{2} G_{\frac{1}{2}}(\alpha)$ et passant par le point $(\alpha, G_{\frac{1}{2}}(\alpha))$. On a donc :

$$y - G_{\frac{1}{2}}(\alpha) = -\sqrt{2} G_{\frac{1}{2}}(\alpha)(x - \alpha)$$

soit :

$$y = -\sqrt{2} G_{\frac{1}{2}}(\alpha)(x-\alpha) + G_{\frac{1}{2}}(\alpha)$$

8. Voici le graphique de la fonction $G_{\frac{1}{2}}$ ainsi que de sa tangente en $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

1. La fonction G_k est définie sur $\mathbb{R}$ qui est en ensemble centré en 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$G_k(-x) = e^{-k(-x)^2} = e^{-kx^2} = G_k(x)$$

La fonction G_k est donc paire.

2. La fonction $u : x \mapsto -kx^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction exponentielle aussi. Donc par composition, la fonction G_k , qui est du type e^u , l'est aussi et on aura $G'_k = u' e^u$, d'où :

$$G'_k(x) = -2kx e^{-kx^2}$$

On en déduit les variations de G_k :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de G'_k	+	0	-
Variations de G_k			

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-kx^2} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-kx^2) = -\infty \text{ puisque } k > 0$$

G_k étant paire, on en déduit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} G_k(x) = 0$

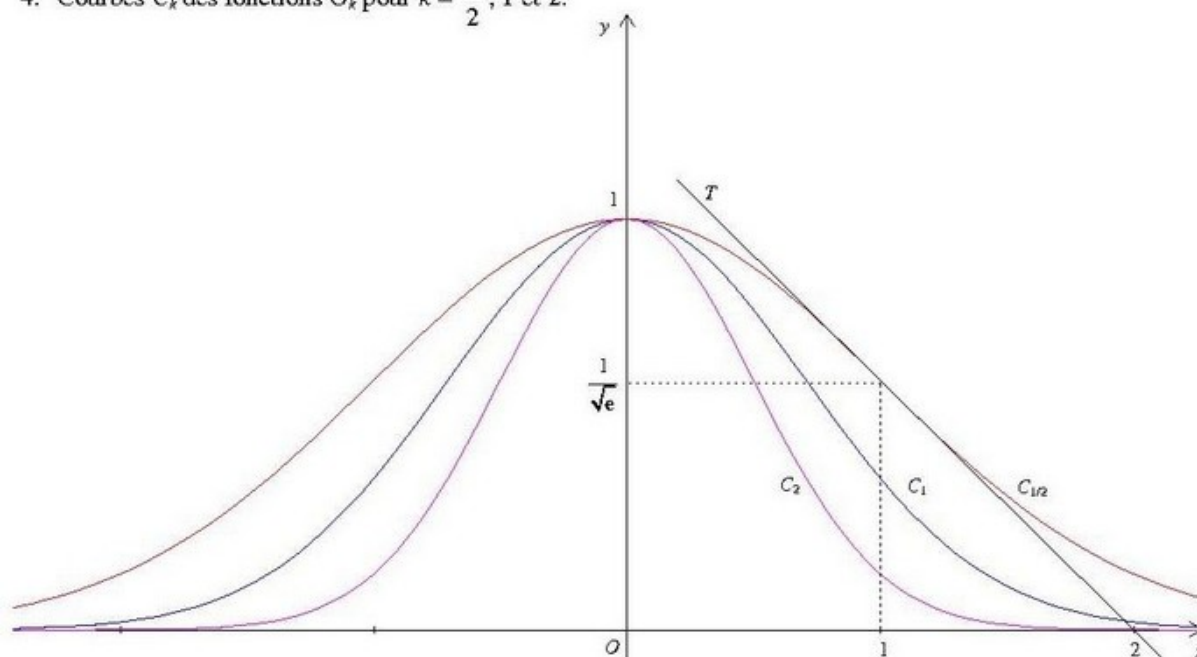
3. La fonction G'_k est du type fg avec $\begin{cases} f(x) = -2kx \\ g(x) = G_k(x) \end{cases}$ où f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Donc G'_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G''_k = f'g + fg'$, ce qui donne :

$$G''_k(x) = -2k e^{-kx^2} + 4k^2 x^2 e^{-kx^2} = 2k e^{-kx^2} (2kx^2 - 1)$$

On a : $G''_k(x) = 0 \Leftrightarrow 2kx^2 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2k}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{2k}}$

4. Courbes C_k des fonctions G_k pour $k = \frac{1}{2}, 1$ et 2 .



5. On a :

$$h \leq k \Leftrightarrow -hx^2 \geq -kx^2 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^{-hx^2} \geq e^{-kx^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow G_h \geq G_k \text{ sur } \mathbb{R}$$

6. Lorsque $k = \frac{1}{2}$ on a :

$$G_k'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -1)$$

D'où $\alpha = 1$.

Une équation de la tangente T à la courbe de G_k au point d'abscisse $\alpha = 1$ est donnée par :

$$y = G_k(1) + G_k'(1)(x - 1)$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}(x - 1)$$

$$y = \frac{2-x}{\sqrt{e}}$$

Remarque : aux abscisses $\pm \frac{1}{\sqrt{2k}}$, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe. On dit alors que la courbe a un "point d'inflexion" (la courbe traverse sa tangente). On peut montrer que le lieu des points d'inflexions des courbes des fonctions G_k est la droite horizontale d'équation $y = \frac{1}{\sqrt{e}}$ (privée du point d'abscisse 0)

Exercice 16 :

Partie A

1a. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = h(x)e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En dérivant cette égalité par rapport à x , on a :

$$g'(x) = h'(x)e^{-x} - h(x)e^{-x}$$

Pour que g soit solution de l'équation différentielle (E_n) donnée, il faut que

$g'(x) + g(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En utilisant l'expression de g en fonction de h , on a :

$$g'(x) + g(x) = h'(x)e^{-x} - h(x)e^{-x} + h(x)e^{-x} = h'(x)e^{-x}$$

Donc g est solution de (E_n) si et seulement si $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1b. En intégrant $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$ par rapport à x , on obtient :

$$h(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

D'après la question précédente, la fonction g correspondante est donnée par :

$$g(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x}$$

2a. Soit ϕ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors ϕ est solution de (E_n) si et seulement si $\phi - g$ est solution de l'équation différentielle $y'(x) + y(x) = 0$. En effet, en substituant $\phi - g$ à y dans l'équation (E_n) , on obtient :

$$(\phi - g)'(x) + (\phi - g)(x) = \phi'(x)e^{-x} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x} - \phi(x)e^{-x} = (\phi'(x) - \frac{x^n}{n!})e^{-x}$$

Pour que ϕ soit solution de (E_n) , il faut et il suffit que $(\phi'(x) - \frac{x^n}{n!})e^{-x} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\phi'(x) = \frac{x^n}{n!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On obtient ainsi que $\phi - g$ est solution de $y'(x) + y(x) = 0$.

2b. L'équation $y'(x) + y(x) = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Sa solution générale est donnée par $y(x) = Ce^{-x}$ pour une constante C fixée en fonction des conditions initiales. Ici, on cherche à résoudre $y'(x) + y(x) = 0$ avec la condition initiale $y(0) = 0$. En substituant $y(x) = Ce^{-x}$ dans cette condition initiale, on obtient $C = 0$, donc la solution de cette équation avec cette condition initiale est $y(x) = 0$.

2c. Pour tout entier $n \geq 1$, notons ϕ_n la solution de (E_n) avec la condition initiale $\phi_n(0) = 0$. On peut écrire :

$$\phi_{n+1}(x) - g(x) = (\phi_n(x) - g(x))' = -(\phi_n(x) - g(x))$$

donc $\phi_{n+1}(x) - g(x) = Ce^{-x}$ pour une certaine constante C . En utilisant la condition initiale $\phi_{n+1}(0) = 0$, on a $C = -\frac{1}{(n+1)!}$, donc :

$$\phi_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x} - \frac{1}{(n+1)!}e^{-x} = \frac{x^{n+1} - 1}{(n+1)!}e^{-x}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, la solution de (E_n) avec la condition initiale $\phi_n(0) = 0$ est donnée par :

$$\phi_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$$

2d. En particulier, la solution de (E_0) avec la condition initiale $\phi_0(0) = 0$ est donnée par $\phi_0(x) = e^{-x}$, donc d'après la question précédente, la solution de (E_n) avec la condition initiale $\phi_n(0) = 0$ est donnée par $\phi_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$ pour tout $n \geq 0$.

Partie B

1a. On a :

$$f_0(x) = e^{-x}$$

$$f_1(x) = xe^{-x}$$

et $f_1'(x) + f_1(x) = e^{-x}$, donc f_1 est solution de $y'(x) + y(x) = f_0(x)$.

Soit n un entier strictement positif. Supposons que f_{n-1} est solution de $y'(x) + y(x) = f_{n-2}(x)$. Alors la solution f_n de $y'(x) + y(x) = f_{n-1}(x)$ telle que $f_n(0) = 0$ est donnée par la formule de la partie A :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

En effet, la solution générale de $y'(x) + y(x) = f_{n-1}(x)$ est de la forme $y(x) = Ce^{-x} + f_{n-1}(x)$ pour une constante C , et la condition $y(0) = 0$ donne $C = -f_{n-1}(0)$. On obtient ainsi que la solution f_n de $y'(x) + y(x) = f_{n-1}(x)$ telle que $f_n(0) = 0$ est donnée par :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

Ce résultat est vrai pour tout entier $n \geq 1$, donc $\frac{x^n}{n!} e^{-x}$ est la solution de (E_n) avec la condition initiale $f_n(0) = 0$.

1b. Pour tout réel x , on a $0 \leq xe^{-x} \leq e^{-x}$, donc par récurrence sur n et par la question 1a, on obtient :

$$0 \leq |f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n!} e^{-|x|} \leq \frac{|x|^n}{n!}$$

En intégrant ces inégalités sur l'intervalle $[0, 1]$, on obtient :

$$0 \leq I_n = \int_0^1 |f_n(x)| dx \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)!}$$

On en déduit que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$ pour tout entier $n \geq 0$. En utilisant le théorème des croissances comparées, on obtient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$, donc la suite (I_n) converge vers 0.

1c. Pour tout réel x , on a $0 \leq |f_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!}$, donc en intégrant ces inégalités sur l'intervalle $[0, 1]$, on obtient :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)!}$$

D'après la question précédente, la suite (I_n) converge vers 0. En utilisant la question 2b, on a :

$$I_n - I_{n-1} = -\frac{1}{n!}e^{-1}$$

Donc la série $\sum_{k=0}^{+\infty} (I_k - I_{k-1})$ converge vers $-e^{-1}$. D'après la question précédente, on a :

$$I_n = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} (I_k - I_{k-1}) = 1 + e^{-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}e^{-1} = 1 - \frac{1}{n!}e^{-1} + \frac{1}{n!}e^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$$

Ainsi, $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)$ converge vers $e^{-1} + \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = e^{-1} + 0 = e^{-1}$.

1d. Par définition, $f_0(x) = e^{-x}$, donc la solution de (E_0) avec la condition initiale $f_0(0) = 0$ est $f_0(x) - f_0(0) = e^{-x} - 1$. D'après la question 2c de la partie A, la solution de (E_n) avec la condition initiale $f_n(0) = 0$ est $\phi_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$ pour tout entier $n \geq 1$.