Fonction continue

I. Notion de continuité d'une fonction.

Propriétés : (admise)

1. Les **fonctions usuelles** (affines, carré, inverse, racine carrée, valeur absolue) sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

2. Toute fonction construite algébriquement (par somme, produit, inverse ou composée) à partir de fonctions usuelles est **continue sur tout intervalle** de son **ensemble de définition**.

3. On convient qu'une flèche oblique dans un tableau de variation traduit la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

4. Une fonction dérivable sur un intervalle est **continue** sur cet intervalle.

Remarque :

Attention, la réciproque de cette dernière propriété est fausse.

Par exemple, la fonction valeur absolue $x \rightarrow |x|$ est continue en 0 mais non dérivable en 0.

Méthode : interpréter graphiquement la continuité d'une fonction.

Par convention, une fonction est continue là où elle est tracée. S'il n'y a pas continuité en x_0 :

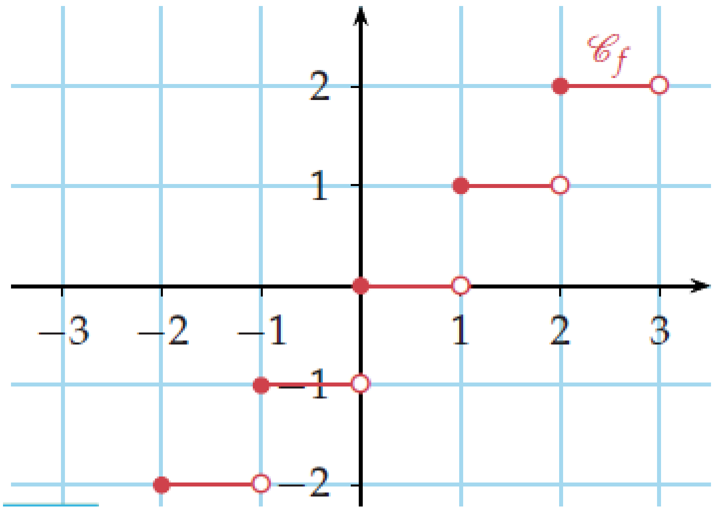
1. le symbole bille rouge indique le point de la courbe de coordonnées (x_0 ; f (x_0)) ;

2. le symbole bille rose vide indique un point qui n'appartient pas à la courbe mais dont l'ordonnée est égale à la limite à gauche ou à droite en x_0 .

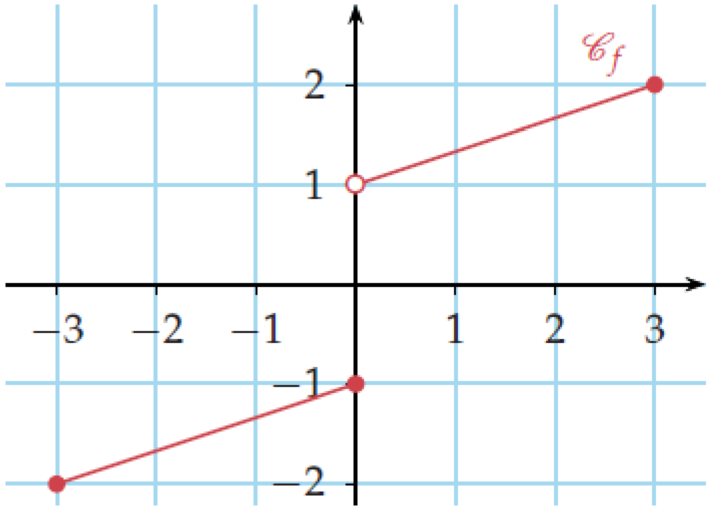
Exercice d'application :

Déterminer graphiquement les intervalles sur lesquels f est continue.

1) Soit la fonction partie entière f : $x \rightarrow |x|$.



2) Soit la fonction f représentée ci-dessous.



II. Théorème des valeurs intermédiaires.

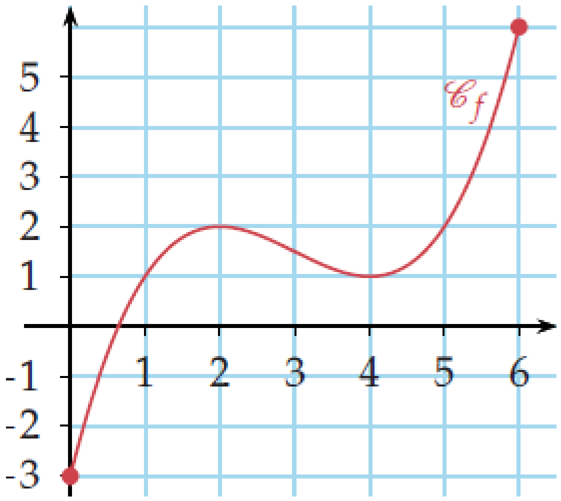
Théorème : cas général.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant deux réels a et b tels que a < b.
Si f est continue sur [a ; b], alors pour tout réel k compris entre f (a) et f (b), il existe au moins un réel c appartenant à [a ; b] tel que f (c) = k.

Remarque :
f prend au moins une fois toute valeur intermédiaire entre f (a) et f (b).
Autrement dit, l'équation f (x) = k a au moins une solution dans [a ; b] et, sur [a ; b], la courbe représentative de f coupe la droite d'équation y = k en un point au moins.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur [0 ; 6] par $f\left(x\right)=\frac{x^3}{4}-\frac{9}{4}x^2+6x-3$.



On dresse le tableau de variation de f . f admet pour minimum −3 et pour maximum 6.
f est continue sur [0 ; 6].

x	0		2		4		6
f	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	6

Donc, d’après le théorème des valeurs intermédiaires, f prend toutes les valeurs de [−3 ; 6]. En particulier, l’équation f (x) = 0 a au moins une solution dans [0 ; 6].

Théorème : cas d’une fonction strictement monotone.

> Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant deux réels a et b tels que a < b.
> Si f est continue et strictement monotone sur [a ; b], alors pour tout réel k compris entre f (a) et f (b), il existe un unique réel c appartenant à [a ; b] tel que f (c) = k.