

Familles sommables

Exercice 1 : Calculs dans $[0, +\infty]$

Toutes les sommes de cet exercice sont calculées dans $[0, +\infty]$.

- Déterminer, dans $[0, +\infty]$, la borne supérieure de $A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$, puis celle de $\mathbb{N}$.
- Calculer $\sum_{n \in \mathbb{Z}} 3^{-|n|}$.
- Pour $j \in \mathbb{N}$, on pose $I_j = \{n \in \mathbb{N}^* : 2^j \leq n < 2^{j+1}\}$. Montrer que $\sum_{n \in I_j} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}$.
En déduire, par sommation par paquets, que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = +\infty$.
- On pose $u_r = 1$ pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Calculer $\sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} u_r$.

Exercice 2 : Famille géométrique double

- Montrer que la famille $(\frac{1}{2^p 3^q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.
- On pose $v_{p,q} = 2^{-(p+q)}$ pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} v_{p,q}$ par le théorème de Fubini positif.
- Calculer de nouveau cette somme en regroupant les couples selon la valeur de $p + q$. En déduire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}.$$

4. En découpant $\mathbb{N}^2$ en trois paquets ($p < q$, $p = q$, $p > q$) et en utilisant la symétrie, calculer $\sum_{p < q} 2^{-(p+q)}$.

Exercice 3 : Permutation des termes

1. Soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-\sigma(n)}$.
2. Montrer que la famille $\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas sommable, bien que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge.
3. Montrer que la famille $\left(\frac{(-1)^{m-1}}{m^2}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est sommable. On admet que $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
Calculer $\sum_{m \text{ pair}} \frac{1}{m^2}$, puis $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^2}$ par une sommation par paquets selon la parité.

Exercice 4 : Sommabilité par un calcul positif

Pour chacune des familles suivantes, indexées par $\mathbb{N}^2$, dire si elle est sommable et, si oui, calculer sa somme. On admet que $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. $u_{p,q} = \frac{1}{(p+1)(q+1)^2}$.
2. $v_{p,q} = \frac{1}{(p+q+1)^2}$.

$$3. \quad w_{p,q} = \frac{1}{(p+q+1)^3}.$$

Exercice 5 : Familles de Riemann doubles

Les familles sont indexées par $(\mathbb{N}^*)^2$, et α, β sont des réels strictement positifs.

1. Montrer que $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)$ est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.
2. Montrer que $\frac{(p+q)^2}{2} \leq p^2 + q^2 \leq (p+q)^2$ pour tous $p, q \geq 1$. En déduire que $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\beta}\right)$ est sommable si et seulement si $\beta > 1$.
3. Montrer que $\left(\frac{1}{\max(p,q)^\alpha}\right)$ est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 6 : Familles produits

1. Soit a, b deux réels strictement positifs. Montrer que $\left(\frac{1}{p^a q^b}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si et seulement si $a > 1$ et $b > 1$.
2. Soit x, y deux complexes. On pose $u_{p,q} = x^p y^q$ pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que si $|x| < 1$ et $|y| < 1$, la famille est sommable, et calculer sa somme.
3. Montrer que si $|x| \geq 1$, la famille $(x^p y^q)$ n'est pas sommable, quel que soit y (on convient que $0^0 = 1$).

Exercice 7 : Sommes des $\zeta(n) - 1$

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n}$.

1. Montrer que $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) = 1$.
2. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} (\zeta(2n) - 1) = \frac{3}{4}$.
3. Justifier que la famille $((-1)^n k^{-n})_{n \geq 2, k \geq 2}$ est sommable, puis calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (\zeta(n) - 1)$.

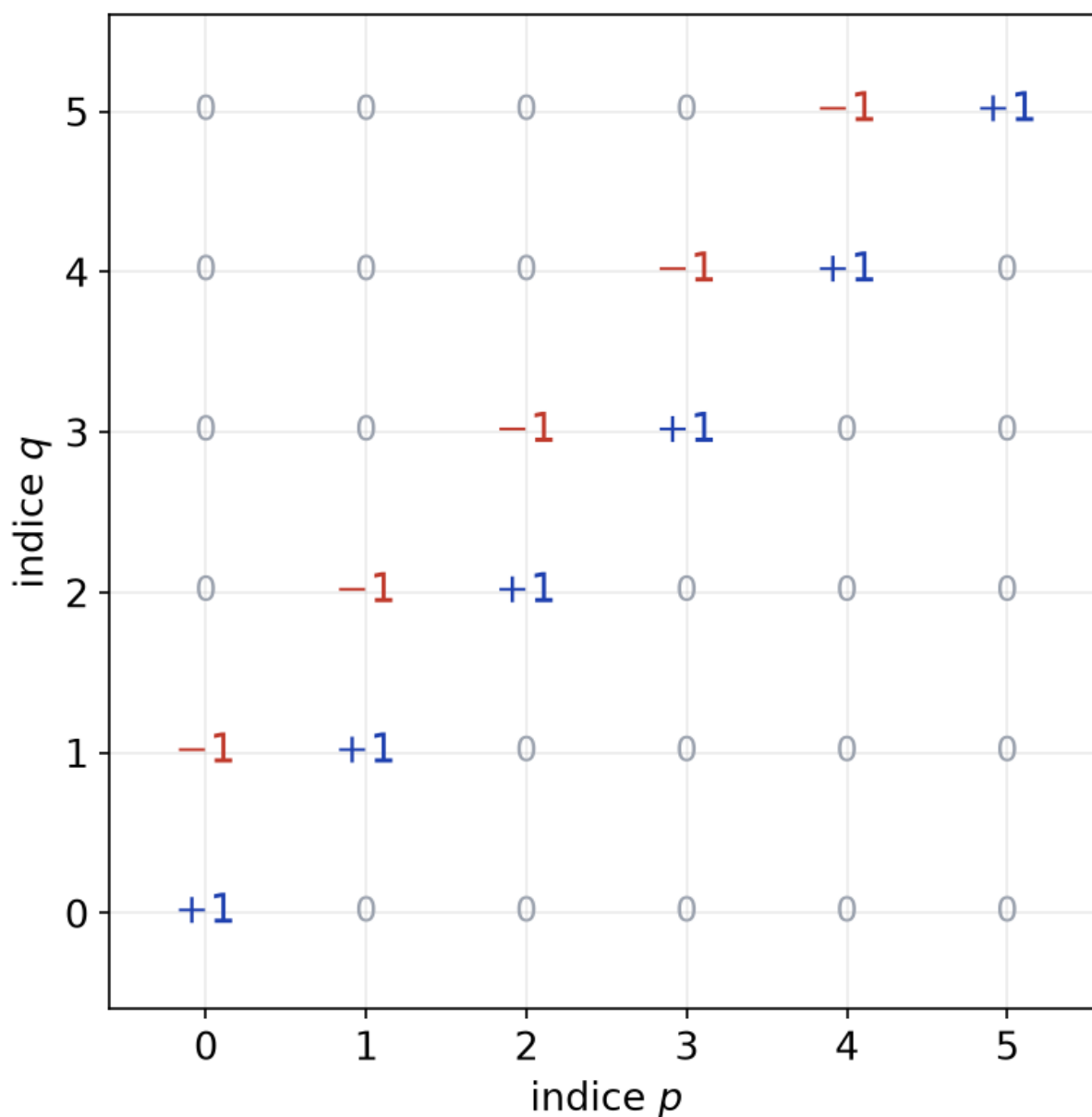
Exercice 8 : Écrire un entier comme une somme

Soit x un nombre complexe tel que $|x| < 1$.

1. Pour $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose $u_{n,k} = x^n$ si $k \leq n$ et $u_{n,k} = 0$ sinon. Montrer que la famille est sommable, puis en déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.
2. En écrivant $\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^n k$, montrer de même que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^n = \frac{x}{(1-x)^3}$.
3. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$, puis la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Exercice 9 : Un contre-exemple au théorème de Fubini

On définit $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ par $a_{p,p} = 1$, $a_{p,p+1} = -1$ et $a_{p,q} = 0$ dans tous les autres cas. La figure ci-dessous donne les premières valeurs.



1. Calculer $\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} \right)$.

2. Calculer $\sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} \right)$.
3. Calculer $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} |a_{p,q}|$ et expliquer pourquoi ce résultat ne contredit pas le théorème de Fubini.

Exercice 10 : Noyau de Poisson

Soit $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On considère la famille $(r^{|n|} e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$.

1. Montrer que cette famille est sommable et calculer la somme de ses modules.
2. On note $P_r(\theta)$ sa somme. Montrer que $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$.
3. En déduire que $1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$.
4. Montrer que $P_r(\theta) > 0$ et déterminer le maximum et le minimum de P_r sur $\mathbb{R}$.

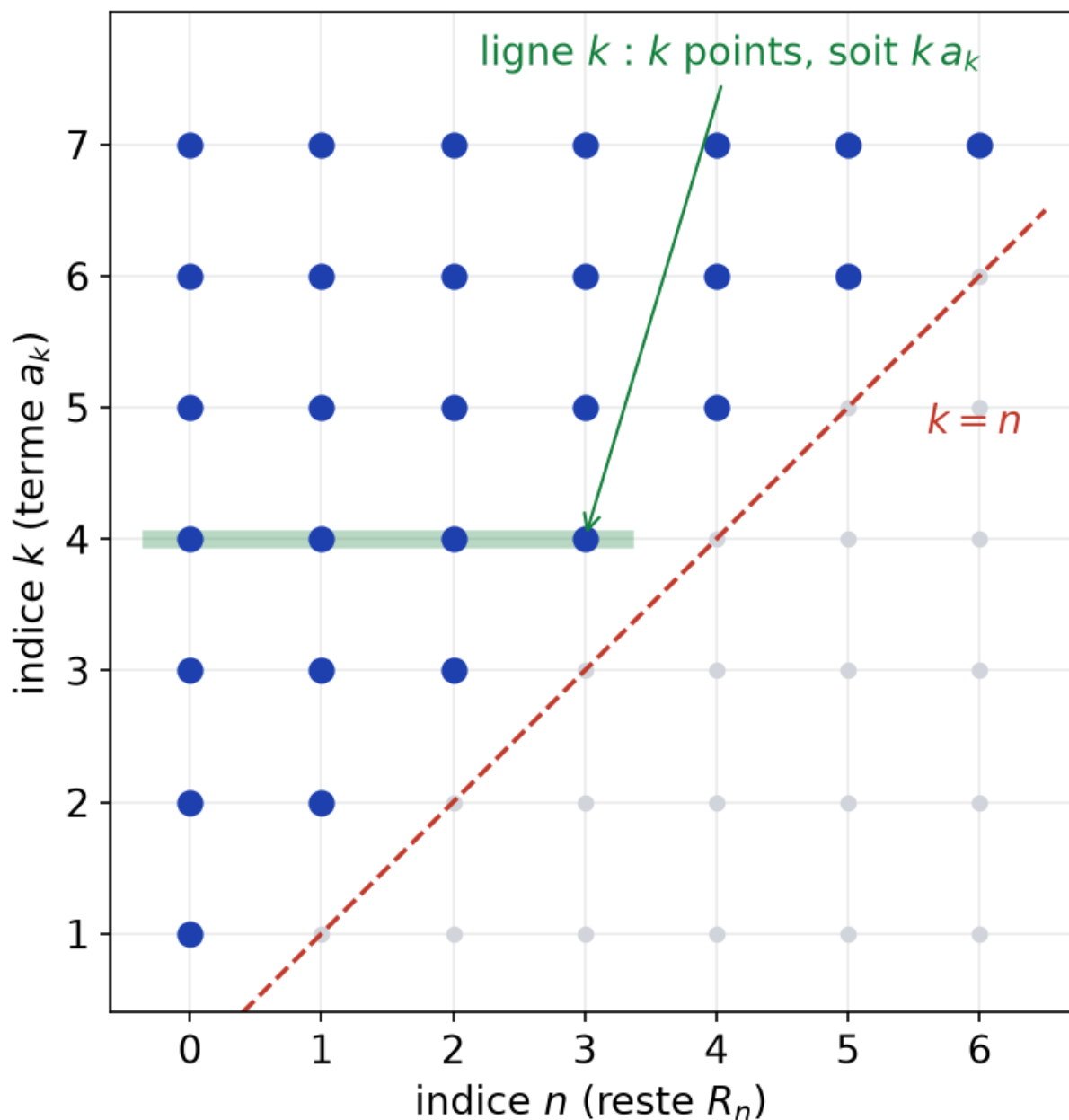
Exercice 11 : Paquets et factorielles

1. Montrer que la famille $(\frac{1}{(p+q+1)!})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et que sa somme vaut e .
2. Calculer $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{p}{(p+q+1)!}$ de deux façons : par paquets $p+q=n$, puis par un argument de symétrie.
3. En sommant la famille $(\frac{1}{p!q!})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ de deux façons, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$.

On utilisera $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Exercice 12 : Somme des restes d'une série

Soit $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite de réels positifs. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \in [0, +\infty]$.
La figure représente les couples (n, k) avec $k > n$.



1. En considérant la famille $(a_k)_{(n,k)} \in D$ indexée par $D = \{(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* : k \geq n\}$, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k$ dans $[0, +\infty]$.
2. Vérifier ce résultat pour $a_k = 2^{-k}$ en calculant R_n .
3. Traiter de même le cas $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$.
4. On suppose maintenant les a_k complexes, avec $\sum k |a_k| < +\infty$. Montrer que les R_n sont bien définis et que l'égalité de la question 1 reste vraie.

Exercice 13 : Produit de Cauchy de séries géométriques

Soit x et y deux complexes de module strictement inférieur à 1.

1. On suppose $x \neq y$. Calculer le terme général c_n du produit de Cauchy des séries $\sum x^n$ et $\sum y^n$, puis en déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}$.
2. Traiter le cas $x = y$ et retrouver $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$.
3. Par un nouveau produit de Cauchy, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n = \frac{1}{(1-x)^3}$.
4. Application numérique : calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} 6 \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right)$ de deux façons.

Exercice 14 : Produit de Cauchy et exponentielle

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. Montrer que pour tout complexe x avec $|x| < 1$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n = \frac{\exp(x)}{1-x}.$$
2. Calculer le produit de Cauchy de la série $\sum \frac{1}{n!}$ par elle-même et retrouver $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$.
3. Calculer le produit de Cauchy de $\sum \frac{1}{n!}$ et de $\sum \frac{(-1)^n}{n!}$. Quelle égalité retrouve-t-on ?

Exercice 15 : Produit de Cauchy de deux séries semi-convergentes

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

1. Montrer que la série $\sum a_n$ converge, mais pas absolument.

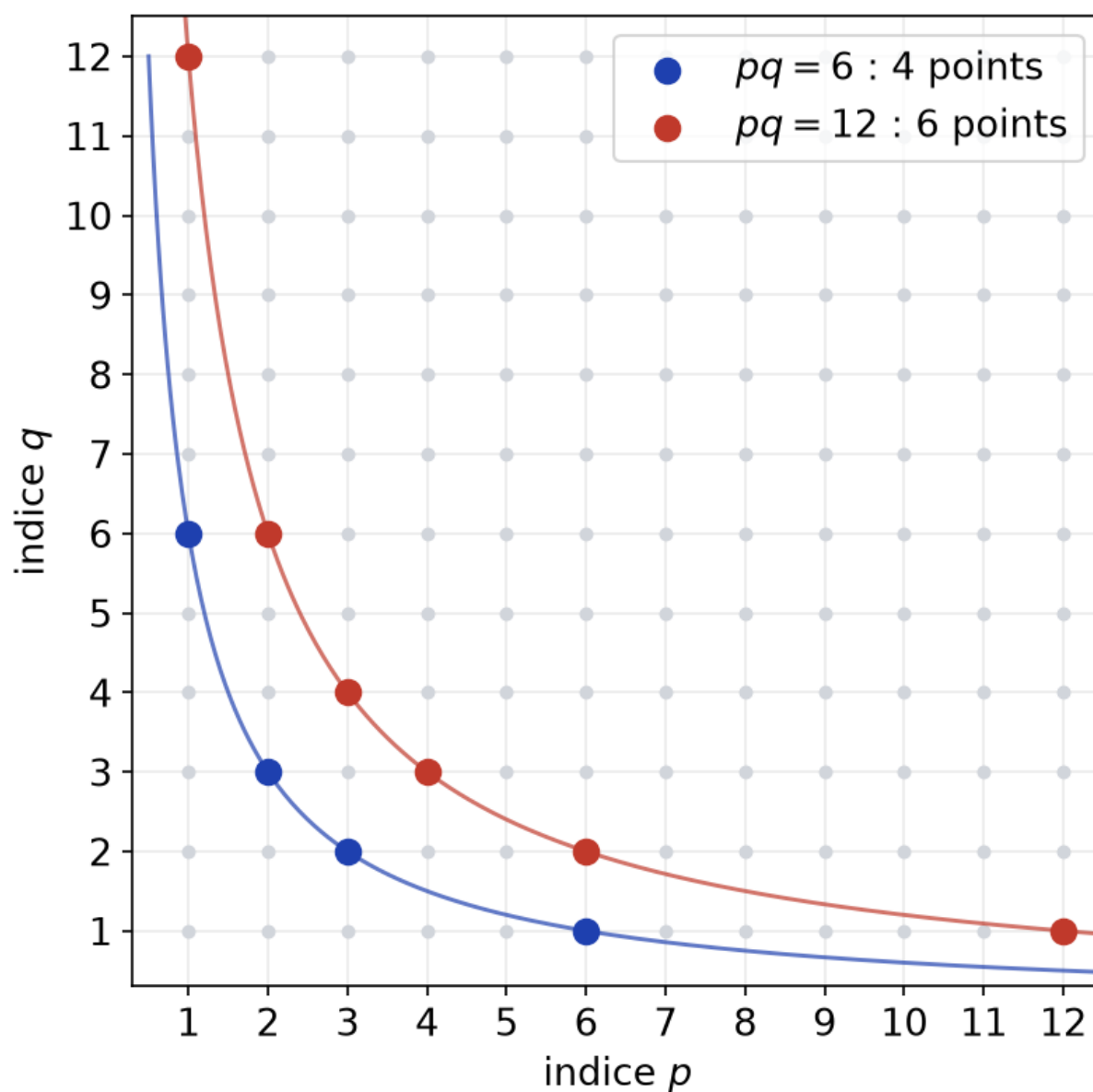
2. On note $\sum c_n$ le produit de Cauchy de $\sum a_n$ par elle-même. Montrer que
$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}.$$

3. Montrer que $(k+1)(n-k+1) \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^2$ pour $0 \leq k \leq n$. En déduire $|c_n| \geq 1$.

4. Conclure sur la nature de $\sum c_n$. Quelle hypothèse du théorème du produit de Cauchy est en défaut ?

Exercice 16 : Séries de Dirichlet et diviseurs

Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n et $\sigma(n)$ leur somme. La figure montre les couples (p, q) tels que $pq = 6$ et $pq = 12$.



1. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{(pq)^s}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable, de somme $\zeta(s)^2$.
2. Pour $n \geq 1$, on pose $P_n = \{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 : pq = n\}$. Montrer que les P_n forment une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$ et que P_n a $d(n)$ éléments. En déduire
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2.$$
3. On suppose $s > 2$. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s) \zeta(s-1).$$

Exercice 17 : Séries de Lambert

Soit x un complexe tel que $|x| < 1$. On reprend les notations $d(n)$ et $\sigma(n)$ de l'exercice précédent.

1. Montrer que la famille $(x^{km})_{(k,m) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

2. En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n$.

3. Montrer de même que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma(n) x^n$.

4. Vérifier la question 2 en calculant, dans le membre de gauche, le coefficient de x^4 .

Exercice 18 : Problème : l'exponentielle complexe

On admet que pour tout réel x , $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ et que $(1 + \frac{x}{n})^n \rightarrow e^x$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Partie A : morphisme.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument. On note $\exp(z)$ sa somme.

2. Montrer que $\exp(a+b) = \exp(a) \exp(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{C}$.

3. En déduire que $\exp(z) \neq 0$, que $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$, et que $\exp(nz) = \exp(z)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Partie B : module.

1. Montrer que $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$.
2. En déduire que $|\exp(z)| = e^{\operatorname{Re}(z)}$, et que $|\exp(i\theta)| = 1$ pour tout réel θ .

Partie C : une autre expression de l'exponentielle. Pour $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose

$\alpha_{n,k} = \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$ si $k \leq n$, et $\alpha_{n,k} = 0$ si $k > n$.

1. Montrer que $\alpha_{n,k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$ pour $k \leq n$, puis que $0 \leq \alpha_{n,k} \leq \frac{1}{k!}$.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\left| \exp(z) - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| \leq e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n$.
3. En déduire que $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \rightarrow \exp(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En admettant que $\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ pour θ réel, déterminer la limite de $\left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [familles sommables, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Séries numériques](#)
- Chapitre précédent : [Séries numériques](#)
- Chapitre suivant : [Dénombrément](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)