

Familles sommables

I. Calculs dans $[0, +\infty]$

Pour sommer une famille infinie de nombres positifs sans se soucier de l'ordre, on accepte d'abord que la somme vaille $+\infty$. C'est pourquoi on travaille dans l'ensemble $[0, +\infty]$. Ce cadre évite de distinguer sans cesse les cas convergent et divergent. En effet, toute famille positive y possède une somme.

Définition :

On note $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$, muni de l'ordre prolongeant celui de $\mathbb{R}_+$ avec $x \leq +\infty$ pour tout x . On y pose, pour tout $x \in [0, +\infty]$:

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty, \quad x \times (+\infty) = +\infty \text{ si } x > 0, \quad 0 \times (+\infty) = 0.$$

La convention $0 \times (+\infty) = 0$ peut surprendre. Cependant, elle est naturelle : une somme de zéros, même infinie, reste nulle. De plus, elle rend la multiplication compatible avec la sommation par paquets.

Propriété :

Toute partie A de $[0, +\infty]$ possède une borne supérieure dans $[0, +\infty]$. Elle vaut $+\infty$ si A contient $+\infty$ ou si $A \cap \mathbb{R}$ n'est pas majorée. Sinon, c'est la borne supérieure réelle usuelle (avec $\sup \emptyset = 0$).

Cette propriété découle directement de la propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Ainsi, dans

$[0, +\infty]$, aucune question d'existence ne se pose. Toute la difficulté du chapitre porte donc sur la finitude des sommes.

Attention :

La soustraction n'est pas définie dans $[0, +\infty]$: l'expression $+\infty - (+\infty)$ n'a pas de sens. Par conséquent, on ne simplifie jamais une égalité $a + c = b + c$ sans vérifier que c est fini.

Exemple :

Pour la suite $u_n = 1/n$ avec $n \geq 1$, les sommes partielles croissent vers $+\infty$. Dans $[0, +\infty]$, on écrit donc simplement $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$, sans parler de série divergente.

II. Familles sommables de réels positifs

1. Somme d'une famille positive

Dans tout le chapitre, I désigne un ensemble dénombrable, par exemple $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$ ou $\mathbb{Q}$. Un tel ensemble n'a pas d'ordre privilégié. On définit donc la somme sans parcourir les indices dans un ordre donné : on regarde toutes les sommes finies.

Définition :

Soit $(u_i)_{i \in I} \in I$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$. Sa somme est

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup \left\{ \sum_{i \in F} u_i \mid \begin{array}{l} F \subset I, \\ F \text{ fini} \end{array} \right\} \in [0, +\infty].$$

La famille est dite **sommable** lorsque cette somme est finie.

La somme existe toujours, grâce à la partie I. Ensuite, si I est fini, on retrouve la somme usuelle, car la partie $F = I$ réalise le maximum. Enfin, si $u_i \leq v_i$ pour tout i , alors $\sum u_i \leq \sum v_i$: toute somme finie de u est majorée par la somme finie correspondante de v .

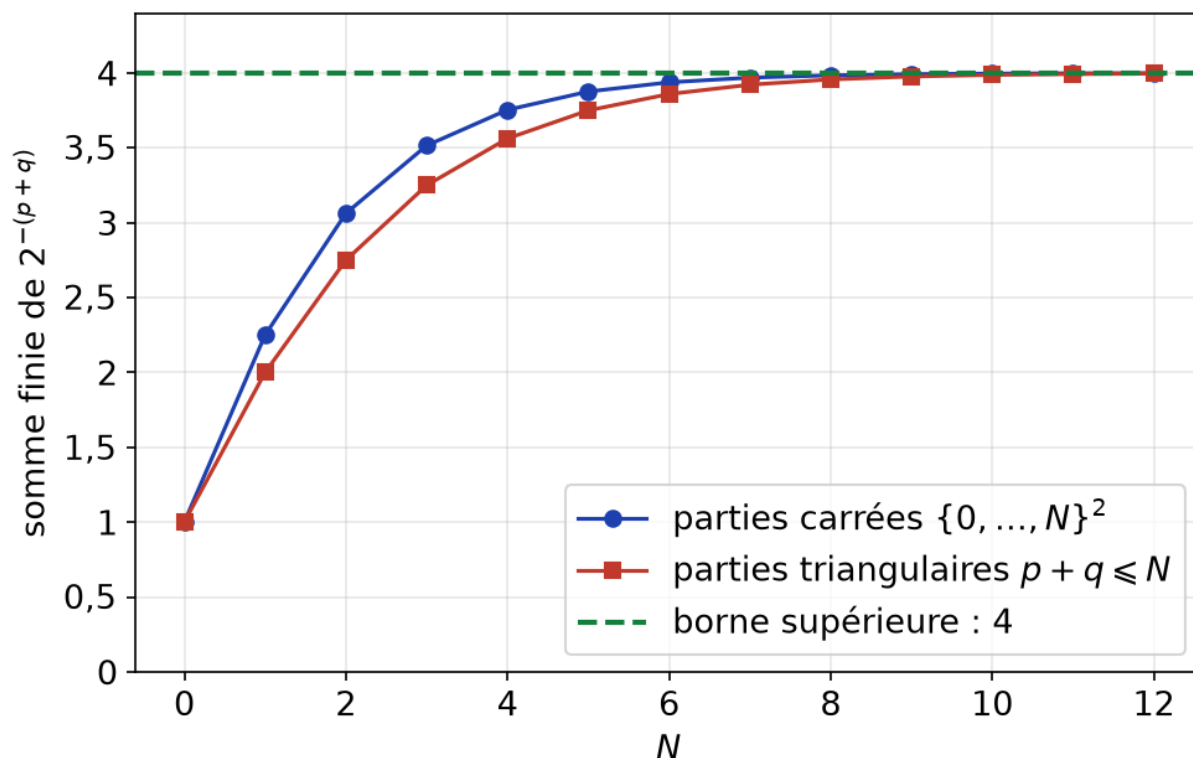
Proposition :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $[0, +\infty[$, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n$, limite prise dans $[0, +\infty]$. Autrement dit, la famille est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ converge, et les deux sommes coïncident.

Démonstration :

Notons S la somme de la famille et $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$. D'abord, S_N est une somme finie, donc $S_N \leq S$; par passage à la limite, $\lim S_N \leq S$. Ensuite, soit F une partie finie de $\mathbb{N}$ et $N = \max F$. Comme les termes sont positifs, $\sum_{n \in F} u_n \leq S_N \leq \lim S_N$. En passant à la borne supérieure sur F , on obtient $S \leq \lim S_N$.

La figure ci-dessous illustre la définition sur la famille $(2^{-(p+q)})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$. Les sommes sur les carrés et sur les triangles forment deux suites différentes. Pourtant, elles croissent vers la même borne supérieure, égale à 4. En effet, toute partie finie est contenue dans un grand carré.



2. Invariance par permutation

La définition ne fait intervenir aucun ordre. Par conséquent, réordonner les termes ne change rien, ce qui est faux pour les séries semi-convergentes.

Théorème :

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $[0, +\infty]$ et $\sigma : J \rightarrow I$ une bijection. Alors

$$\sum_{j \in J} u_{\sigma(j)} = \sum_{i \in I} u_i.$$

Démonstration :

L'application $G \rightarrow \sigma(G)$ est une bijection entre les parties finies de J et celles de I . De plus, $\sum_{j \in G} u_{\sigma(j)} = \sum_{i \in \sigma(G)} u_i$ pour toute partie finie G . Les deux ensembles de sommes finies sont donc égaux, et leurs bornes supérieures aussi.

Exemple :

La famille $(2^{-|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ se somme en regroupant $n = 0$, les $n > 0$ et les $n < 0$. On obtient $1 + 2 \sum_{n \geq 1} 2^{-n} = 1 + 2 = 3$. Cette famille est donc sommable, de somme 3.

III. Sommation par paquets et Fubini pour les familles positives

1. Théorème de sommation par paquets

Le résultat central du chapitre permet de découper l'ensemble des indices en morceaux. On somme d'abord chaque morceau, puis on somme les résultats. Pour les familles positives, ce découpage est toujours permis, sans aucune hypothèse.

Théorème :

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $[0, +\infty]$ et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de I (parties deux à deux disjointes de réunion I , éventuellement vides). Alors

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right) \text{ dans } [0, +\infty].$$

Démonstration :

Notons S le membre de gauche et T celui de droite. Soit F une partie finie de I . Elle ne rencontre qu'un nombre fini de paquets, disons $I_0, \dots, I_N$. Ainsi

$$\sum_{F} u_i = \sum_{n=0}^N \sum_{F \cap I_n} u_i \leq T, \text{ d'où } S \leq T. \text{ Réciproquement, supposons } S \text{ fini et}$$

fixons N et $\varepsilon > 0$. Pour chaque $n \leq N$, on choisit $F_n \subset I_n$ finie avec

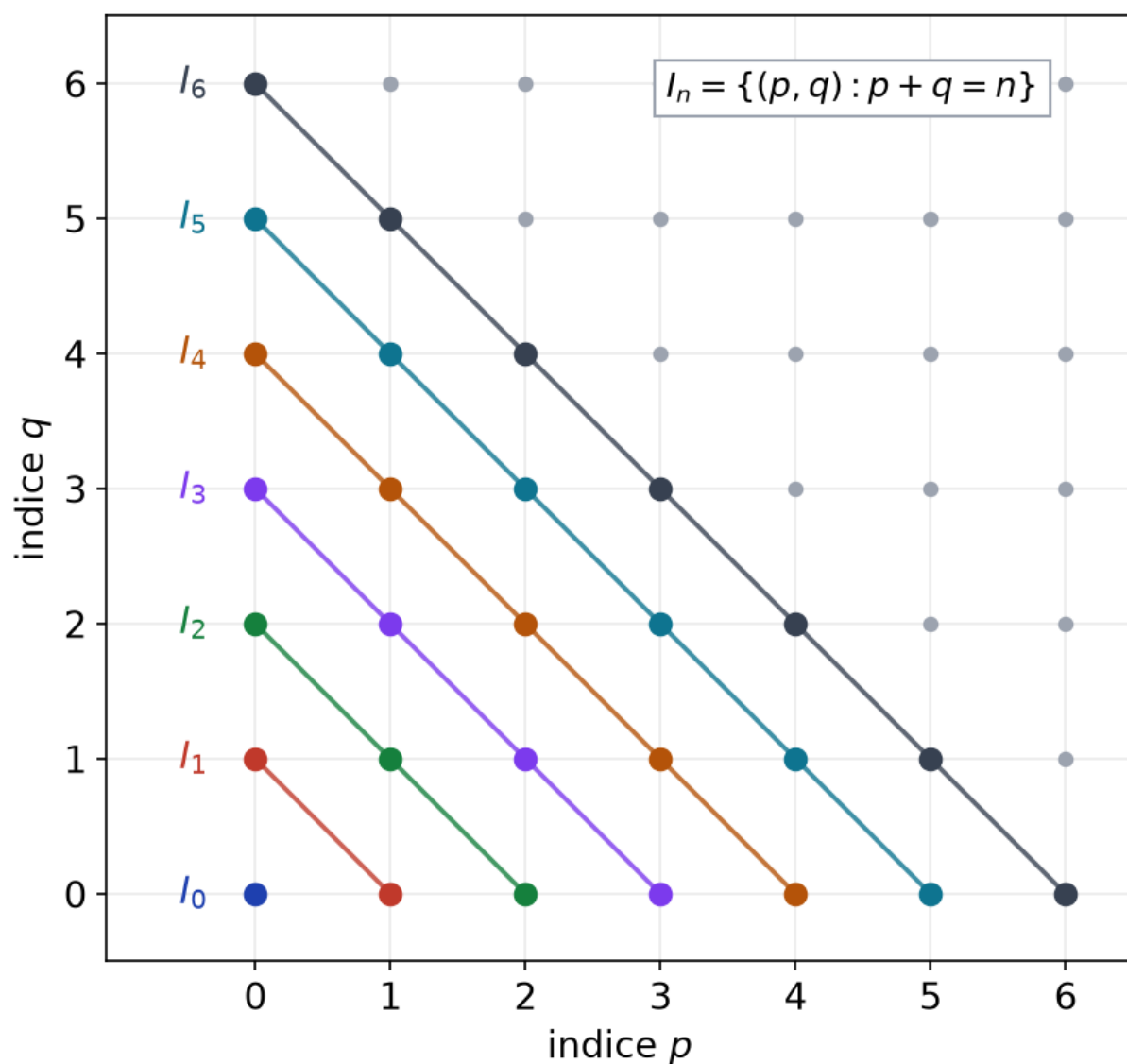
$$\sum_{F_n} u_i \geq \sum_{I_n} u_i - \varepsilon/(N+1). \text{ La réunion } F \text{ des } F_n \text{ est finie, donc}$$

$$\sum_{n=0}^N \sum_{F_n} u_i \leq \sum_{F} u_i + \varepsilon \leq S + \varepsilon. \text{ Enfin, on fait tendre } \varepsilon \text{ vers } 0 \text{ puis } N \text{ vers } +\infty :$$

$$T \leq S. \text{ Si } S = +\infty, \text{ l'inégalité est évidente.}$$

Pour une famille indexée par $\mathbb{N}^2$, le découpage le plus fréquent suit les diagonales

$I_n = \{(p, q) : p + q = n\}$. Chaque paquet est alors fini, avec $n + 1$ éléments, comme le montre la figure suivante.

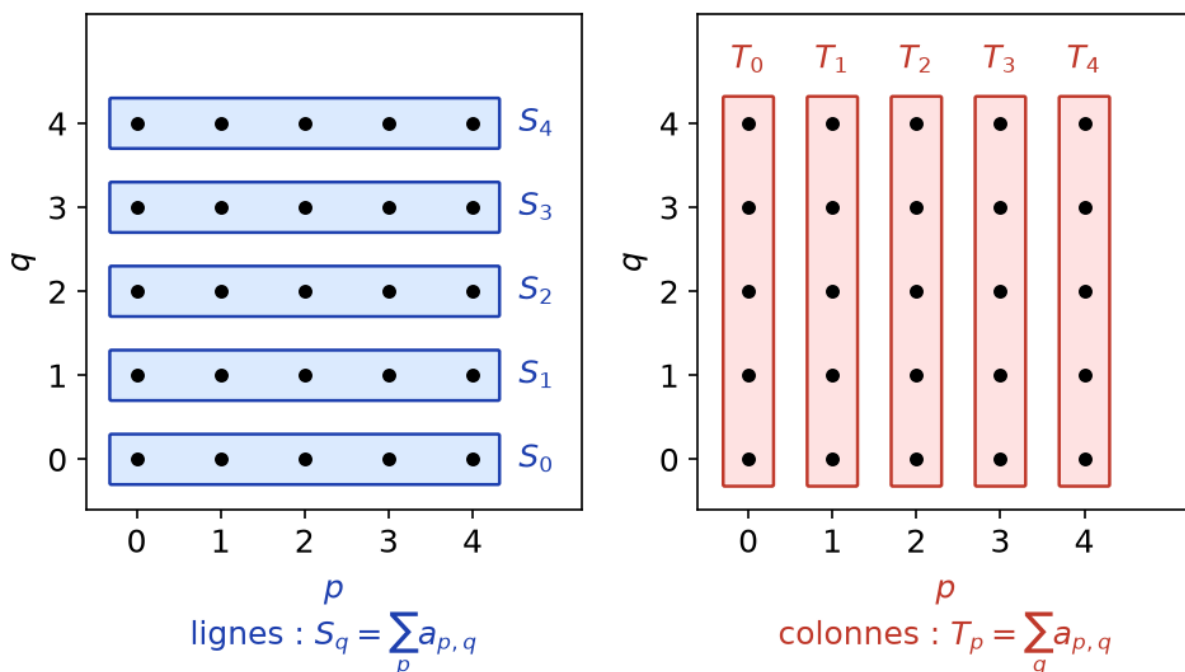


Exemple :

Sommons $u_{p,q} = 2^{-(p+q)}$ par diagonales. Le paquet I_n contient $n + 1$ termes égaux à 2^{-n} . Donc $\sum_{\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{n \geq 0} (n+1) 2^{-n}$. Or $\sum_{n \geq 0} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$ pour $|x| < 1$, comme on le verra dans la partie V. Ainsi la somme vaut $\frac{1}{(1-1/2)^2} = 4$.

2. Théorème de Fubini positif

Une famille indexée par $\mathbb{N}^2$ se range dans un tableau infini. On peut la sommer ligne par ligne, ou colonne par colonne. La figure ci-dessous montre ces deux découpages, qui sont deux cas particuliers de sommation par paquets.



Théorème :

(Fubini positif) Pour toute famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ de $[0, +\infty]$,

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right).$$

Il suffit en effet d'appliquer la sommation par paquets avec $I_p = \{p\} \times \mathbb{N}$, puis avec $I_q = \mathbb{N} \times \{q\}$. Le résultat reste valable pour $I \times J$ avec I et J dénombrables.

Méthode :

Pour justifier qu'une famille est sommable, on calcule la somme de ses modules par un calcul positif : on choisit des paquets commodes (lignes, colonnes, diagonales), on somme chaque paquet puis on somme les résultats. Tous les calculs se font dans $[0, +\infty]$, donc aucune hypothèse n'est à vérifier. La famille est sommable si et seulement si le résultat est fini.

Exemple :

La famille $\left(\frac{1}{(p+q)^2}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ n'est pas sommable. En effet, le paquet $p + q = n$ (avec $n \geq 2$) contient $n - 1$ couples. Sa somme vaut $\frac{n-1}{n^2}$, équivalent à $\frac{1}{n}$. Par conséquent, la série des paquets diverge et la somme totale vaut $+\infty$.

IV. Familles sommables de nombres complexes

1. Définition et somme

Pour une famille de signe quelconque, la borne supérieure ne suffit plus. On impose alors que les modules forment une famille sommable. Ensuite, on sépare parties positives et négatives, qui sont toutes deux sommables.

Définition :

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres complexes est **sommable** si $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$. On note $\ell^1(I)$ l'ensemble de ces familles.

Si u est réelle, on pose $u_i^+ = \max(u_i, 0)$ et $u_i^- = \max(-u_i, 0)$. Comme $0 \leq u_i^\pm \leq |u_i|$, ces deux familles sont sommables et l'on définit $\sum u_i = \sum u_i^+ - \sum u_i^-$. Si u est complexe, on pose

$$\sum u_i = \sum \operatorname{Re}(u_i) + i \sum \operatorname{Im}(u_i).$$

Les deux définitions sont cohérentes, car $|\operatorname{Re}(u_i)| \leq |u_i|$ et $|\operatorname{Im}(u_i)| \leq |u_i|$. De plus, l'invariance par permutation passe aux familles sommables : il suffit de l'appliquer à u^+ , u^- et aux parties réelle et imaginaire.

Proposition :

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente. Dans ce cas, la somme de la famille est égale à la somme de la série.

Remarque :

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge vers $\ln 2$, mais la famille correspondante n'est pas sommable, car $\sum \frac{1}{n+1} = +\infty$. C'est cohérent : on sait que réordonner une série semi-convergente peut changer sa somme. La sommabilité est donc exactement ce qu'il faut pour sommer « en vrac ».

2. Règles de calcul

Propriété :

Soit u et v deux familles sommables indexées par I , et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

- Linéarité : $\lambda u + \mu v$ est sommable et $\sum (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum u_i + \mu \sum v_i$.
- Inégalité triangulaire : $\left| \sum u_i \right| \leq \sum |u_i|$.

- Comparaison : si w est une famille complexe avec $|w_i| \leq |u_i|$ pour tout i , alors w est sommable.

Ainsi, $\ell^1(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^I$ et la somme est une forme linéaire sur cet espace. La linéarité se démontre sur les sommes finies puis, pour les familles réelles, en passant par les parties positives et négatives.

3. Paquets et Fubini pour les familles sommables

Théorème :

(Somme par paquets) Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable de complexes et $(I_n)_n \in \mathbb{N}$ une partition de I . Alors chaque sous-famille $(u_i)_{i \in I_n}$ est sommable, la série

$\sum_n \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right)$ est absolument convergente, et

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right).$$

Corollaire :

(Fubini) Si $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, alors les deux sommes itérées existent et sont égales à la somme de la famille :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}.$$

Exemple :

Considérons $u_{p,q} = \frac{(-1)^{p+q}}{2^p 3^q}$ pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. D'abord, la somme des modules vaut $\sum_p 2^{-p} \sum_q 3^{-q} = 2 \times \frac{3}{2} = 3$ par Fubini positif. La famille est donc sommable. Ensuite, à p fixé, $\sum_q u_{p,q} = \left(-\frac{1}{2}\right)^p \cdot \frac{1}{1+1/3} = \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{2}\right)^p$. Enfin, en sommant sur p , on obtient $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1+1/2} = \frac{1}{2}$. Ainsi, la somme de la famille vaut $\frac{1}{2}$.

Attention :

L'hypothèse de sommabilité est indispensable. Pour $a_{p,p} = 1$, $a_{p,p+1} = -1$ et $a_{p,q} = 0$ sinon, sommer d'abord en q donne 0 pour chaque p , donc un total nul. En revanche, sommer d'abord en p donne 1 pour $q = 0$ et 0 sinon, donc un total égal à 1. La famille n'est pas sommable, puisqu'elle contient une infinité de termes de module 1.

Méthode :

Pour intervertir deux sommes $\sum_p \sum_q u_{p,q}$ de signe quelconque, on procède en deux temps. D'abord, on montre que $\sum_p \sum_q |u_{p,q}| < +\infty$ par Fubini positif : c'est la sommabilité. Ensuite, on applique Fubini à la famille elle-même et on calcule la somme dans l'ordre le plus simple.

Exemple :

Pour $|x| < 1$, considérons $u_{n,k} = x^n$ si $1 \leq k \leq n$, et 0 sinon. D'abord, $\sum_n \sum_k |u_{n,k}| = \sum_{n \geq 1} n |x|^n < +\infty$: la famille est sommable. Ensuite, sommer d'abord en n donne $\sum_{n \geq k} x^n = \frac{x^k}{1-x}$. Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

V. Produit de familles sommables et produit de Cauchy

1. Produit de deux familles sommables

Théorème :

Soit $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ deux familles sommables. Alors la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

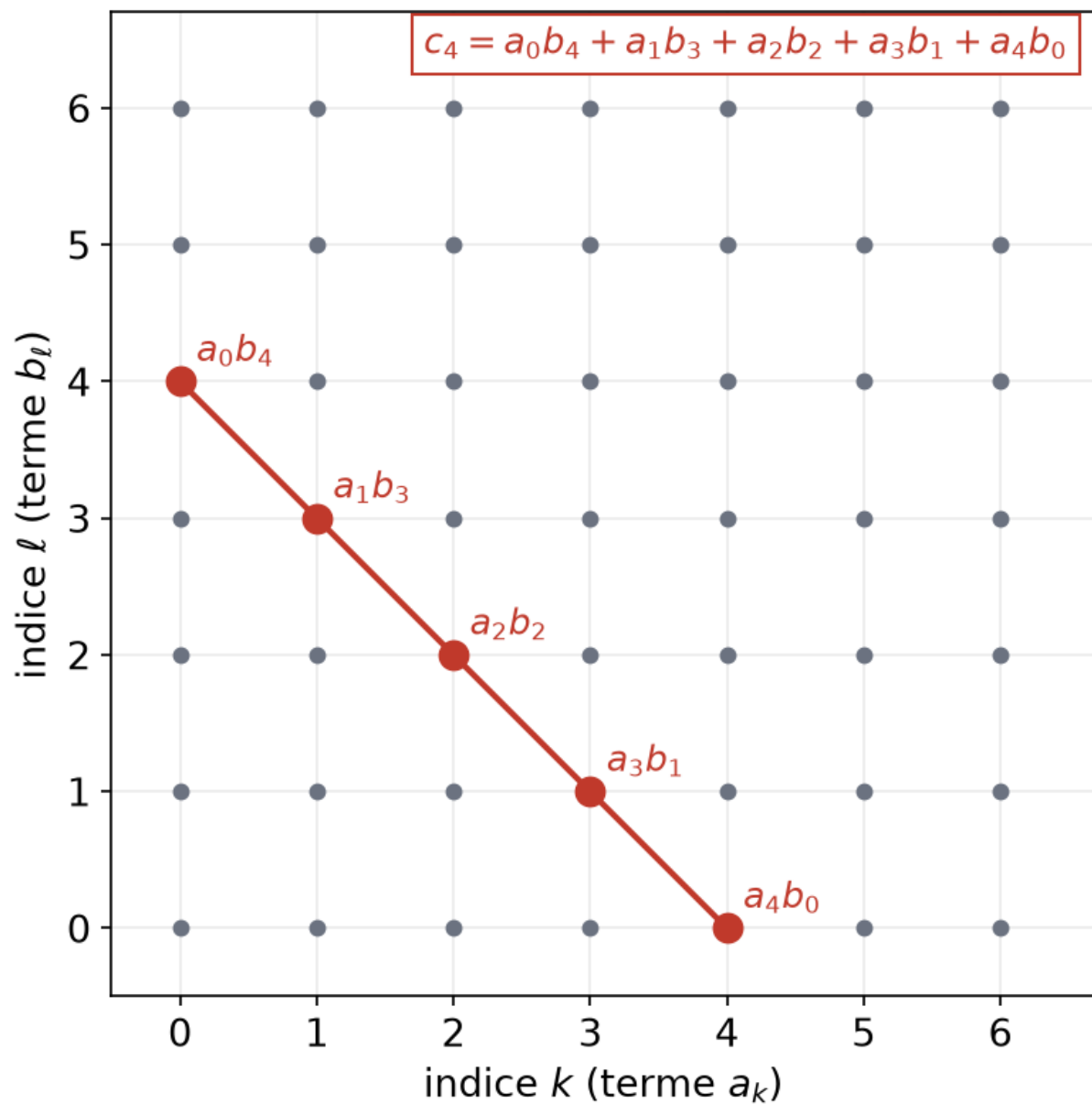
Démonstration :

Par Fubini positif, $\sum_{(i,j)} |a_i b_j| = \sum_i |a_i| \sum_j |b_j| = \left(\sum_i |a_i| \right) \left(\sum_j |b_j| \right) < +\infty$. La famille produit est donc sommable. Ensuite, Fubini s'applique : $\sum_{(i,j)} a_i b_j = \sum_i a_i \left(\sum_j b_j \right)$, par linéarité de la somme intérieure. Enfin, la linéarité de la somme extérieure donne le produit annoncé.

2. Produit de Cauchy de deux séries

Lorsque $I = J = \mathbb{N}$, on regroupe les produits $a_k b_\ell$ selon la valeur de $k + \ell$. Ce regroupement

imite le calcul du produit de deux polynômes. La figure suivante montre les termes qui composent c_4 .



Définition :

Le **produit de Cauchy** des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est la série $\sum c_n$ de terme général

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell.$$

Théorème :

Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum c_n$ est absolument convergent et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

Démonstration :

D'après le théorème précédent, la famille $(a_k b_\ell)_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, de somme $(\sum a_k)(\sum b_\ell)$. On la somme par paquets avec les diagonales $I_n = \{(k, \ell) : k + \ell = n\}$. La somme du paquet I_n vaut exactement c_n . De plus, $|c_n| \leq \sum_{k+\ell=n} |a_k b_\ell|$ et la série de ces majorants converge, ce qui donne l'absolue convergence.

Exemple :

Pour $|x| < 1$, le carré de Cauchy de $\sum x^n$ a pour terme $c_n = \sum_{k=0}^n x^k x^{n-k} = (n+1) x^n$. Par conséquent, $\sum_{n \geq 0} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Attention :

Sans absolue convergence, le théorème tombe en défaut. Par exemple, pour $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, les deux séries convergent par le critère des séries alternées. Pourtant, $|c_n| \geq 1$ pour tout n , donc $\sum c_n$ diverge grossièrement.

VI. Application : l'exponentielle complexe

Le produit de Cauchy donne la propriété fondamentale de l'exponentielle. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série

$\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument. En effet, la règle de d'Alembert s'applique :

$$\frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0. \text{ On pose alors } \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Théorème :

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, $\exp(a+b) = \exp(a) \exp(b)$.

Démonstration :

Les deux séries $\sum \frac{a^n}{n!}$ et $\sum \frac{b^n}{n!}$ sont absolument convergentes. Leur produit de Cauchy a pour terme général

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{(a+b)^n}{n!},$$

d'après la formule du binôme. Le théorème du produit de Cauchy donne donc

$$\exp(a)\exp(b) = \sum_n \frac{(a+b)^n}{n!} = \exp(a+b).$$

Plusieurs conséquences en découlent immédiatement. D'abord, $\exp(z)\exp(-z) = \exp(0) = 1$, donc $\exp(z) \neq 0$. Ensuite, $\exp$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{C}, +)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$. Enfin, pour

θ réel, on retrouve $e^{i(\theta + \varphi)} = e^{i\theta} e^{i\varphi}$, c'est-à-dire les formules d'addition de la trigonométrie.

Méthode :

Pour calculer un produit de Cauchy, on écrit $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ et on cherche une formule close : formule du binôme lorsque des factorielles apparaissent, somme géométrique lorsque les termes sont des puissances. Puis on vérifie l'absolue convergence des deux séries avant de conclure $\sum c_n = (\sum a_n)(\sum b_n)$.

Exemple :

Pour $x \neq y$ avec $|x| < 1$ et $|y| < 1$, le produit de Cauchy de $\sum x^n$ et $\sum y^n$ a pour terme $c_n = \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k} = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}$. On en déduit $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y} = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$.

Ce qu'il faut retenir

- Dans $[0, +\infty]$, toute partie a une borne supérieure, avec la convention $0 \times (+\infty) = 0$.
- La somme d'une famille positive est la borne supérieure de ses sommes finies ; elle existe toujours dans $[0, +\infty]$.
- Pour une suite positive, cette somme est la somme de la série, finie ou non.
- La somme d'une famille positive ne dépend pas de l'ordre des termes.
- Pour une famille positive, sommation par paquets et Fubini s'appliquent sans aucune hypothèse.
- Une famille complexe est sommable si $\sum |u_i| < +\infty$; pour une suite, cela équivaut à

l'absolue convergence.

- Pour une famille sommable : linéarité, sommation par paquets et Fubini. On vérifie toujours la sommabilité d'abord, par un calcul positif sur les modules.
- Le produit de deux familles sommables est sommable, de somme égale au produit des sommes.
- Le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes converge absolument vers le produit des sommes.
- Avec la formule du binôme, il donne $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ pour tous complexes a et b .

Questions fréquentes sur familles sommables

Quelle différence entre une famille sommable et une série convergente ?

Pour une suite indexée par $\mathbb{N}$, la famille est sommable si et seulement si la série converge absolument. Une série seulement semi-convergente, comme $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$, ne définit pas une famille sommable. C'est logique : réordonner ses termes peut changer sa somme, alors que la somme d'une famille sommable ne dépend pas de l'ordre.

Faut-il vérifier une hypothèse pour appliquer Fubini à une famille positive ?

Non. Pour une famille de $[0, +\infty]$, la sommation par paquets et le théorème de Fubini sont toujours valables, l'égalité ayant lieu dans $[0, +\infty]$. C'est précisément ce calcul positif, appliqué aux modules, qui sert à prouver la sommabilité avant d'intervertir des sommes de signe quelconque.

Le produit de Cauchy de deux séries convergentes converge-t-il toujours ?

Non. Il faut que les deux séries convergent absolument pour appliquer le théorème. Pour

$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, les deux séries convergent, mais le terme c_n du produit vérifie $|c_n| \geq 1$, donc $\sum c_n$ diverge grossièrement.

Comment choisir les paquets pour une famille indexée par $\mathbb{N}^2$?

On regarde de quoi dépend le terme. S'il ne dépend que de $p+q$, on groupe selon les diagonales

$p + q = n$. S'il est un produit $a_p b_q$, on somme par lignes ou par colonnes. S'il dépend du produit pq , les paquets $pq = n$ font apparaître les diviseurs de n .

Pour aller plus loin en maths sup

- Les énoncés : [exercices de maths sup sur familles sommables](#)
- À maîtriser avant : [Séries numériques](#)
- Chapitre précédent : [Séries numériques](#)
- Chapitre suivant : [Dénombrement](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)