

Familles sommables

Corrigé de l'exercice 1 : Calculs dans $[0, +\infty]$

- Pour tout $n \geq 1$, on a $1 - \frac{1}{n} \leq 1$, donc 1 majore A . De plus, $1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$, donc aucun réel $M < 1$ ne majore A . Ainsi $\sup A = 1$, et cette borne n'est pas atteinte. Ensuite, $\mathbb{N}$ n'est majoré par aucun réel. Par conséquent, $\sup \mathbb{N} = +\infty$ dans $[0, +\infty]$.
- On découpe $\mathbb{Z}$ en trois paquets : $\{0\}$, $\mathbb{N}^*$ et $-\mathbb{N}^*$. La famille est positive, donc la sommation par paquets s'applique sans hypothèse. Le paquet $\{0\}$ donne 1. Les deux autres donnent chacun $\sum_{n \geq 1} 3^{-n} = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}$. Donc $\sum_{n \in \mathbb{Z}} 3^{-|n|} = 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2$.

Questions 3 et suivantes

- L'ensemble I_j contient les entiers de 2^j à $2^{j+1} - 1$, soit 2^j éléments. Pour chacun, $n < 2^{j+1}$, donc $\frac{1}{n} > \frac{1}{2^{j+1}}$. Ainsi $\sum_{n \in I_j} \frac{1}{n} \geq \frac{2^j}{2^{j+1}} = \frac{1}{2}$. Ensuite, les I_j forment une partition de $\mathbb{N}^*$: chaque $n \geq 1$ appartient au seul I_j tel que $2^j \leq n < 2^{j+1}$. Le théorème de sommation par paquets positif donne $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = \sum_{j \geq 0} \sum_{n \in I_j} \frac{1}{n} \geq \sum_{j \geq 0} \frac{1}{2}$.
Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = +\infty$.
- L'ensemble $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est infini : il contient les $\frac{1}{k}$ pour $k \geq 1$. Pour tout entier N , il contient donc une partie finie F à N éléments, et $\sum_{r \in F} u_r = N$. La borne supérieure des sommes finies est donc infinie. **La somme vaut** $+\infty$: une famille constante non nulle indexée par un ensemble infini n'est jamais sommable.

Corrigé de l'exercice 2 : Famille géométrique double

1. La famille est positive, donc le théorème de Fubini positif s'applique. À p fixé,

$\sum_{q \geq 0} \frac{1}{2^p 3^q} = \frac{1}{2^p} \cdot \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^p}$. Ensuite, $\sum_{p \geq 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^p} = \frac{3}{2} \times 2 = 3$. Cette somme est finie. **La famille est sommable, de somme 3.**

2. De même, à p fixé, $\sum_q 2^{-(p+q)} = 2^{-p} \times 2$. Puis $\sum_p 2 \times 2^{-p} = 4$. **La somme vaut 4.**

3. On utilise les paquets $I_n = \{(p, q) : p + q = n\}$, qui forment une partition de $\mathbb{N}^2$. Le paquet I_n contient les $n + 1$ couples $(0, n), (1, n-1), \dots, (n, 0)$, et chaque terme vaut

2^{-n} . Par sommation par paquets positive, $\sum_{\mathbb{N}^2} v_{p,q} = \sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{2^n}$. En comparant avec la

question 2, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} = 4$.

4. Notons $S_<$, $S_ =$ et $S_>$ les sommes sur les trois paquets. L'application $(p, q) \rightarrow (q, p)$ est une bijection du premier paquet sur le troisième, et $v_{q,p} = v_{p,q}$. Par invariance par permutation, $S_< = S_>$. Ensuite, $S_ = = \sum_{p \geq 0} 4^{-p} = \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{4}{3}$. La sommation par paquets donne $4 = 2 S_< + \frac{4}{3}$. Toutes ces quantités sont finies, donc on peut soustraire. **Ainsi**
- $$\sum_{p < q} 2^{-(p+q)} = \frac{4}{3}.$$

Point de méthode : dans $[0, +\infty]$, on ne soustrait qu'après avoir vérifié que les sommes sont finies.

Corrigé de l'exercice 3 : Permutation des termes

1. La famille $(2^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ est positive. D'après le théorème d'invariance par permutation,

$$\sum_n 2^{-\sigma(n)} = \sum_m 2^{-m}. \text{ Donc } \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-\sigma(n)} = 2, \text{ quelle que soit la bijection } \sigma.$$

2. D'abord, la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ décroît et tend vers 0. Le critère spécial des séries alternées montre donc que $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge. En revanche,
- $$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+1} [\text{big}] = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty, \text{ d'après l'exercice 1. La famille n'est donc pas sommable, bien que la série converge.}$$

3. On a $\sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m^2} [\text{big}] = \frac{\pi^2}{6} < +\infty$: la famille est sommable. Ensuite, en posant $m = 2j$, $\sum_{m \text{ pair}} \frac{1}{m^2} = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{4j^2} = \frac{\pi^2}{24}$. La sommation par paquets positive donne alors $\sum_{m \text{ impair}} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$. Enfin, la famille alternée est sommable : on la somme par paquets selon la parité. Les termes d'indice impair valent $+\frac{1}{m^2}$, et ceux d'indice pair valent $-\frac{1}{m^2}$. Donc $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$.

Corrigé de l'exercice 4 : Sommabilité par un calcul positif

1. La famille est positive. Par Fubini positif, à p fixé, $\sum_{q \geq 0} \frac{1}{(p+1)(q+1)^2} = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{\pi^2}{6}$. Ensuite,
- $$\sum_{p \geq 0} \frac{\pi^2}{6(p+1)} = +\infty, \text{ car la série harmonique diverge. La famille } (u_{p,q}) \text{ n'est pas sommable.}$$
2. On somme par paquets $p+q=n$. Le paquet contient $n+1$ couples, et chaque terme vaut $\frac{1}{(n+1)^2}$. Sa somme est donc $\frac{1}{n+1}$. Or $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} = +\infty$. La famille $(v_{p,q})$ n'est pas sommable.
3. Avec les mêmes paquets, la somme du paquet vaut $\frac{n+1}{(n+1)^3} = \frac{1}{(n+1)^2}$. Ainsi
- $$\sum_{\mathbb{N}^2} w_{p,q} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}. \text{ La famille } (w_{p,q}) \text{ est sommable, de somme } \frac{\pi^2}{6}.$$

Point de méthode : lorsque le terme ne dépend que de $p + q$, les paquets diagonaux ramènent une famille double à une série simple.

Corrigé de l'exercice 5 : Familles de Riemann doubles

1. Pour $n \geq 2$, le paquet $\{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 : p + q = n\}$ contient les $n - 1$ couples $(1, n-1), \dots, (n-1, 1)$. Ces paquets forment une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$. La sommation par paquets positive donne donc $\sum \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{n \geq 2} \frac{n-1}{n^\alpha}$. Or $\frac{n-1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}$, et ces termes sont positifs. Par comparaison avec une série de Riemann, la série converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$. **La famille est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.**

2. D'abord, $(p+q)^2 - (p^2 + q^2) = 2pq \geq 0$. Ensuite, $2(p^2 + q^2) - (p+q)^2 = (p-q)^2 \geq 0$. Les deux inégalités sont donc établies. Comme $t \rightarrow t^{-\beta}$ décroît sur $]0, +\infty[$, on en déduit

$$\frac{1}{(p+q)^{2\beta}} \leq \frac{1}{(p^2+q^2)^\beta} \leq \frac{2^\beta}{(p+q)^{2\beta}}.$$

Par comparaison de familles positives, $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\beta}\right)$ est sommable si et seulement si $\left(\frac{1}{(p+q)^{2\beta}}\right)$ l'est. D'après la question 1, cela équivaut à $2\beta > 2$. **La famille est sommable si et seulement si $\beta > 1$.**

3. Pour $n \geq 1$, on pose $J_n = \{(p, q) : \max(p, q) = n\}$. Ce paquet contient les couples (n, q) avec $1 \leq q \leq n$ et les couples (p, n) avec $1 \leq p \leq n-1$, soit $2n-1$ couples. Les J_n forment une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$. Donc $\sum \frac{1}{\max(p,q)^\alpha} = \sum_{n \geq 1} \frac{2n-1}{n^\alpha}$. Or $\frac{2n-1}{n^\alpha} \sim \frac{2}{n^{\alpha-1}}$. **La famille est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.**

Corrigé de l'exercice 6 : Familles produits

1. Posons $Z(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^t} \in [1, +\infty]$ pour $t > 0$. Par Fubini positif,
- $$\sum_{(p,q)} \frac{1}{p^a q^b} = \sum_{p \geq 1} \frac{Z(b)}{p^a}.$$
- Si $Z(b) = +\infty$, chaque terme vaut $+\infty$, donc la somme aussi. Sinon, par linéarité positive, la somme vaut $Z(a) Z(b)$. Comme $Z(a) \geq 1$ et $Z(b) \geq 1$, la somme est finie si et seulement si $Z(a)$ et $Z(b)$ sont finis. Enfin, d'après le critère de Riemann, $Z(t) < +\infty$ si et seulement si $t > 1$. **La famille est sommable si et seulement si $a > 1$ et $b > 1$.**
2. On a $|u_{p,q}| = |x|^p |y|^q$. Par Fubini positif, $\sum |u_{p,q}| = \frac{1}{1-|x|} \cdot \frac{1}{1-|y|} < +\infty$. La famille est donc sommable. Ensuite, c'est le produit des familles sommables $(x^p)_p$ et $(y^q)_q$. D'après le théorème sur le produit de deux familles sommables,
- $$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} x^p y^q = \frac{1}{(1-x)(1-y)}.$$
3. Pour $q = 0$, on a $|u_{p,0}| = |x|^p \geq 1$ pour tout p . La sous-famille $(u_{p,0})_{p \in \mathbb{N}}$ a donc une somme de modules infinie. Or la somme des modules de la famille entière majore celle de toute sous-famille. **Par conséquent, la famille $(x^p y^q)$ n'est pas sommable dès que $|x| \geq 1$.**

Corrigé de l'exercice 7 : Sommes des $\zeta(n) - 1$

1. Pour $n \geq 2$, $\zeta(n) - 1 = \sum_{k \geq 2} k^{-n}$. On considère la famille positive $(k^{-n})_{n \geq 2, k \geq 2}$. Par Fubini positif, on peut sommer d'abord en n . Pour $k \geq 2$, on a $\frac{1}{k} < 1$, donc

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{k^n} = \frac{1/k^2}{1 - 1/k} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Cette somme télescopique donne $\sum_{k=2}^K \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{K} \rightarrow 1$. **Donc**

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) = 1.$$

2. On procède de même avec la famille positive $(k^{-2n})_n \geq 1, k \geq 2$. À k fixé,

$$\sum_{n \geq 1} k^{-2n} = \frac{1/k^2}{1 - 1/k^2} = \frac{1}{k^2 - 1}. \text{ Or } \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right). \text{ Ainsi}$$

$$\sum_{k=2}^K \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{K} - \frac{1}{K+1} \right) \rightarrow \frac{3}{4}.$$

Par Fubini positif, $\sum_{n=1}^{+\infty} (\zeta(2n) - 1) = \frac{3}{4}.$

Questions 3 et suivantes

3. Le module du terme vaut k^{-n} . D'après la question 1, la somme des modules vaut 1, donc la famille est sommable. Le théorème de Fubini permet alors de sommer d'abord en n . Pour

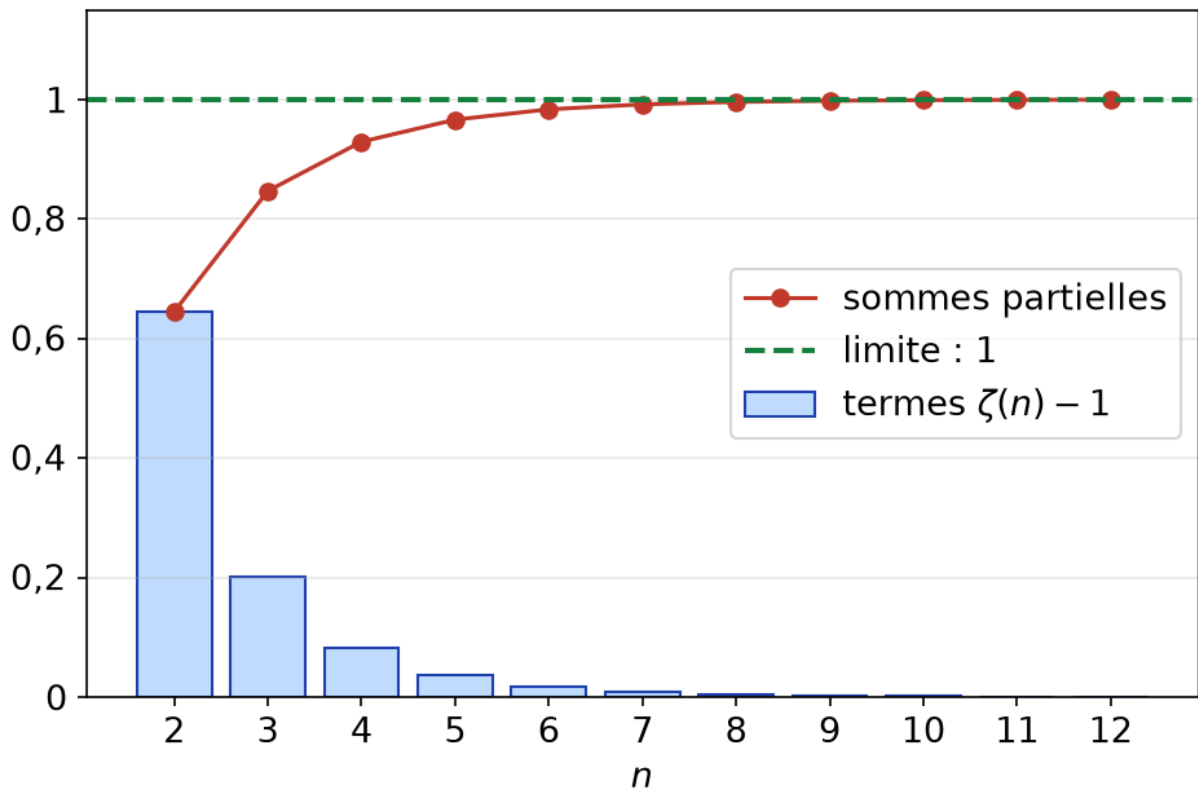
$$k \geq 2, \quad \left| -\frac{1}{k} \right| < 1 \text{ et}$$

$$\sum_{n \geq 0} \left(-\frac{1}{k} \right)^n = \frac{1/k^2}{1 - 1/k} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}.$$

La somme sur $k \geq 2$ est télescopique et vaut $\frac{1}{2}$. En sommant dans l'autre ordre, on obtient

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n (\zeta(n+1) - 1). \text{ Cette somme vaut donc } \frac{1}{2}.$$

La figure ci-dessous montre les termes $\zeta(n) - 1$ et les sommes partielles de la question 1. Comme prévu, elles croissent rapidement vers 1.



Corrigé de l'exercice 8 : Écrire un entier comme une somme

1. À n fixé, $\sum_{k \geq 1} |u_{n,k}| = n |x|^n$. De plus, $\frac{(n+1)|x|^{n+1}}{n|x|^n} \rightarrow |x| < 1$ lorsque $x \neq 0$, donc $\sum n |x|^n$ converge par la règle de d'Alembert. Par Fubini positif, la famille est donc sommable.

Le théorème de Fubini s'applique alors. D'une part, sommer d'abord en k donne $\sum_{n \geq 1} n x^n$.

D'autre part, à k fixé, $\sum_{n \geq k} x^n = \frac{x^k}{1-x}$. Donc $\sum_{n \geq 1} n x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{k \geq 1} x^k$. Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

2. On pose $v_{n,k} = k x^n$ si $k \leq n$, et 0 sinon. À n fixé, $\sum_k |v_{n,k}| = \frac{n(n+1)}{2} |x|^n$, terme d'une série convergente par la règle de d'Alembert. La famille est donc sommable. Ensuite, à

k fixé, $\sum_{n \geq k} k x^n = \frac{k x^k}{1-x}$. Par Fubini et la question 1,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{k=1}^{+\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^3}.$$

Le résultat demandé est établi.

3. On écrit $n^2 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n$. Les deux séries convergent, donc par linéarité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(2 - (1-x))}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient $\frac{(1/2)(3/2)}{1/8} = 6$. **Donc** $\sum_{n \geq 1} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ **et**

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{2^n} = 6.$$

Corrigé de l'exercice 9 : Un contre-exemple au théorème de Fubini

- À p fixé, seuls $a_{p,p} = 1$ et $a_{p,p+1} = -1$ sont non nuls. Donc $\sum_q a_{p,q} = 0$ pour tout p . **Ainsi** $\sum_p \left(\sum_q a_{p,q} \right) = 0$.
- À $q = 0$ fixé, le seul terme non nul est $a_{0,0} = 1$, car $a_{p,0} = -1$ exigerait $p+1 = 0$. Donc $\sum_p a_{p,0} = 1$. Pour $q \geq 1$, les termes non nuls sont $a_{q,q} = 1$ et $a_{q-1,q} = -1$, de somme nulle. **Ainsi** $\sum_q \left(\sum_p a_{p,q} \right) = 1$.
- La famille contient une infinité de termes de module 1 (tous les $a_{p,p}$). **Donc** $\sum |a_{p,q}| = +\infty$: **la famille n'est pas sommable**. Le théorème de Fubini pour les familles de signe quelconque exige la sommabilité. Il ne s'applique donc pas ici, et les deux sommes itérées peuvent différer.

Point de méthode : avant toute interversion de sommes de signe quelconque, on vérifie la sommabilité par un calcul positif sur les modules.

Corrigé de l'exercice 10 : Noyau de Poisson

- On a $|r^n e^{in\theta}| = r^n$. Par sommation par paquets positive sur $\{0\}$, $\mathbb{N}^*$ et $-\mathbb{N}^*$, la somme des modules vaut $1 + 2 \sum_{n \geq 1} r^n = 1 + \frac{2r}{1-r}$. Elle vaut $\frac{1+r}{1-r} < +\infty$, donc la famille est sommable.
- Posons $w = r e^{i\theta}$, avec $|w| = r < 1$. On somme par paquets sur $\mathbb{N}$ et $-\mathbb{N}^*$, ce qui est permis car la famille est sommable. D'abord, $\sum_{n \geq 0} w^n = \frac{1}{1-w}$. Ensuite, $\sum_{n \geq 1} r^n e^{-in\theta} = \sum_{n \geq 1} \bar{w}^n = \frac{\bar{w}}{1-\bar{w}}$. Donc

$$P_r(\theta) = \frac{(1 - \bar{w}) + \bar{w}(1 - w)}{(1-w)(1-\bar{w})} = \frac{1 - |w|^2}{|1 - w|^2}.$$

Or $|1 - w|^2 = (1 - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta = 1 - 2r \cos \theta + r^2$. Ainsi

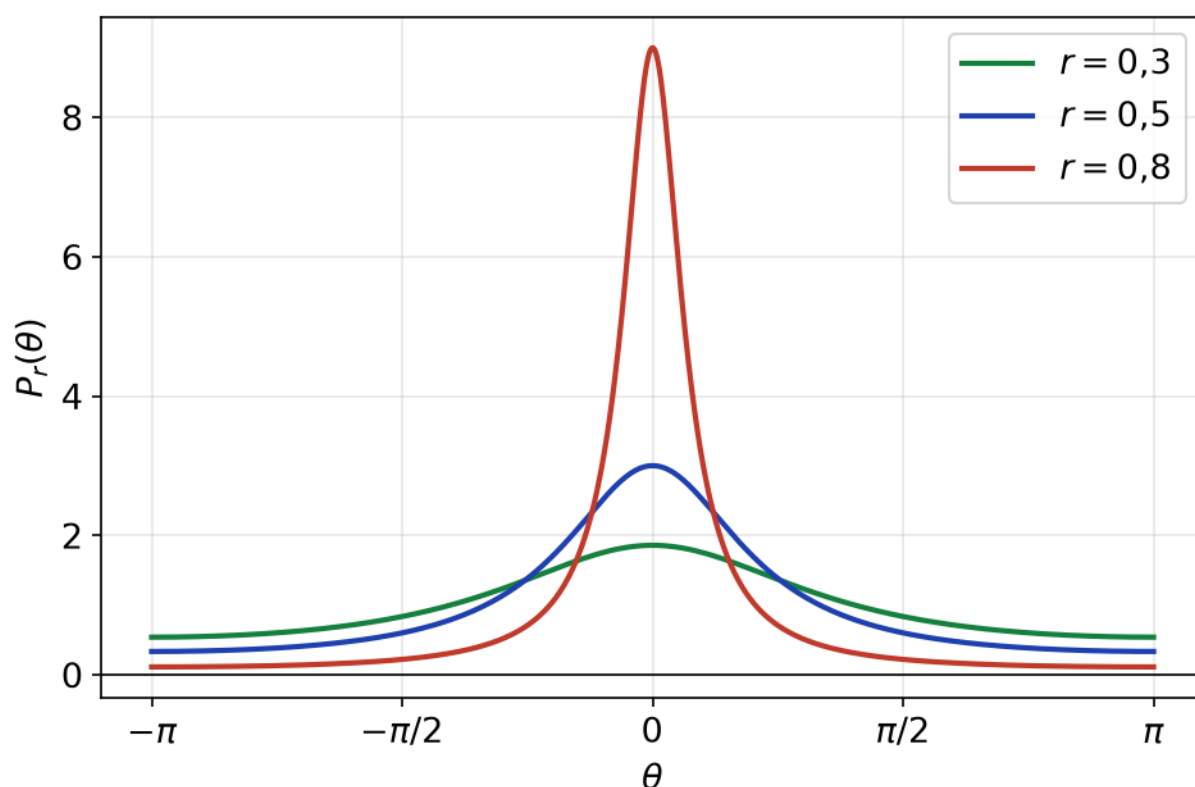
$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.$$

Questions 3 et suivantes

- On somme maintenant par les paquets $\{0\}$ et $\{n, -n\}$ pour $n \geq 1$. Le paquet $\{n, -n\}$ donne $r^n (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = 2 r^n \cos(n\theta)$. Le théorème de sommation par paquets donne $P_r(\theta) = 1 + \sum_{n \geq 1} 2 r^n \cos(n\theta)$. L'égalité demandée en découle.
- Le numérateur $1 - r^2$ est strictement positif. Le dénominateur vaut $|1 - w|^2$, strictement positif car $w \neq 1$. Donc $P_r(\theta) > 0$. Ensuite, le dénominateur est minimal pour $\cos \theta = 1$, où il vaut $(1-r)^2$, et maximal pour $\cos \theta = -1$, où il vaut $(1+r)^2$. Le maximum vaut $\frac{1+r}{1-r}$, atteint en $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, et le minimum vaut $\frac{1-r}{1+r}$, atteint en $\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$. Le maximum

est égal à la somme des modules, ce qui est cohérent avec l'inégalité triangulaire.

La figure ci-dessous trace P_r pour trois valeurs de r . Plus r est proche de 1, plus le pic en 0 est haut et étroit.



Corrigé de l'exercice 11 : Paquets et factorielles

1. La famille est positive. On la somme par paquets $p + q = n$. Le paquet contient $n + 1$ couples, chacun de valeur $\frac{1}{(n+1)!}$. Sa somme vaut donc $\frac{n+1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!}$. **La somme totale vaut**

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = e : \text{la famille est sommable.}$$

2. Première méthode. Le paquet $p + q = n$ a pour somme $\frac{1}{(n+1)!} \sum_{p=0}^n p = \frac{n(n+1)}{2(n+1)!} = \frac{n}{2 \cdot n!}$

. Ce terme est nul pour $n = 0$, et vaut $\frac{1}{2(n-1)!}$ pour $n \geq 1$. La somme vaut donc $\frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = \frac{e}{2}$.

Seconde méthode. Notons S_p et S_q les sommes des familles $\frac{p}{(p+q+1)!}$ et $\frac{q}{(p+q+1)!}$. L'échange $(p, q) \rightarrow (q, p)$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$, donc $S_p = S_q$ par invariance par permutation. De plus, $S_p + S_q = \sum_n \frac{n(n+1)}{(n+1)!} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} = e$. Ces sommes sont finies. **Donc** $\sum_{(p,q)} \frac{p}{(p+q+1)!} = \frac{e}{2}$.

3. D'une part, par Fubini positif, $\sum_{(p,q)} \frac{1}{p!q!} = \left(\sum_p \frac{1}{p!} \right) \left(\sum_q \frac{1}{q!} \right) = e^2$. D'autre part, le paquet $p + q = n$ a pour somme $\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!(n-p)!} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = \frac{2^n}{n!}$. **En comparant,** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$.

Corrigé de l'exercice 12 : Somme des restes d'une série

1. La famille $(a_k)_{(n,k) \in D}$ est positive. On la somme de deux façons, par le théorème de sommation par paquets positif. D'abord, par paquets $\{n\} \times \{k : k > n\}$: à n fixé, la somme vaut $\sum_{k \geq n+1} a_k = R_n$. Ensuite, par paquets $\{(n, k) : 0 \leq n \leq k \text{ et } k \in \mathbb{N}\}$ à k fixé : ce paquet a k éléments, tous égaux à a_k , comme le montre la figure de l'énoncé. Sa somme vaut $k a_k$. **Donc** $\sum_{n \geq 0} R_n = \sum_{k \geq 1} k a_k$ dans $[0, +\infty]$.

2. Pour $a_k = 2^{-k}$, on a $R_n = \sum_{k \geq n+1} 2^{-k} = \frac{2^{-(n+1)}}{1-1/2} = 2^{-n}$. Donc $\sum_{n \geq 0} R_n = 2$. Par ailleurs, l'exercice 8 avec $x = \frac{1}{2}$ donne $\sum_{k \geq 1} \frac{k}{2^k} = \frac{1/2}{1/4} = 2$. **Les deux membres valent bien 2.**

3. On a $a_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, donc $R_n = \lim_K \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{K+1} \right) = \frac{1}{n+1}$. Ainsi $\sum_n R_n = +\infty$. De même, $k a_k = \frac{1}{k+1}$, et $\sum_k \frac{1}{k+1} = +\infty$. **Les deux membres valent $+\infty$, ce qui**

est cohérent.

4. Comme $|a_k| \leq k |a_k|$, la série $\sum a_k$ converge absolument, donc chaque R_n est défini. Ensuite, la question 1 appliquée à $(|a_k|)$ montre que $\sum_{(n,k) \in D} |a_k| = \sum_k k |a_k| < +\infty$. La famille $(a_k)_{(n,k) \in D}$ est donc sommable. Le théorème de sommation par paquets s'applique aux deux découpages précédents. **Par conséquent,** $\sum_{n \geq 0} R_n = \sum_{k \geq 1} k a_k$, les deux séries convergeant.

Corrigé de l'exercice 13 : Produit de Cauchy de séries géométriques

- Le terme général vaut $c_n = \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k}$. Or $(x-y) \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k} = x^{n+1} - y^{n+1}$, par télescopage. Donc $c_n = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x-y}$. Les deux séries géométriques convergent absolument, car $|x| < 1$ et $|y| < 1$. Le théorème du produit de Cauchy s'applique. **Ainsi** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x-y} = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$.
- Si $x = y$, alors $c_n = \sum_{k=0}^n x^n = (n+1) x^n$. **Donc** $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$.
- La série $\sum (n+1) x^n$ converge absolument : par la question 2 appliquée à $|x|$, $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |x|^n$ converge. On fait son produit de Cauchy avec $\sum x^n$. Le terme général vaut $\sum_{k=0}^n (k+1) x^k x^{n-k} = x^n \sum_{k=0}^n (k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n$. **Donc** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^3}$.
- Avec $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{3}$, on a $x - y = \frac{1}{6}$. Le terme de la série est donc $\frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x-y}$, et la question 1 donne $\frac{1}{(1/2)(2/3)} = 3$. Directement, $6 \left(\sum_{n \geq 0} 2^{-(n+1)} - \sum_{n \geq 0} 3^{-(n+1)} \right) = 6 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 3$. **Les deux calculs donnent 3**.

Corrigé de l'exercice 14 : Produit de Cauchy et exponentielle

1. La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout complexe x , et $\sum x^n$ converge absolument car $|x| < 1$. Leur produit de Cauchy a pour terme

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} x^{n-k} = x^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = s_n x^n. \text{ Le théorème du produit de Cauchy}$$

donne $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n = \frac{\exp(x)}{1-x}.$

2. Le terme général vaut $c_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \frac{2^n}{n!}$. La série $\sum \frac{1}{n!}$ est à termes positifs et converge vers e . **Donc** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e \times e = e^2$.

3. Les deux séries convergent absolument. Le terme général vaut

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} = \frac{(1-1)^n}{n!}. \text{ Ainsi } c_0 = 1 \text{ et}$$

$$c_n = 0 \text{ pour } n \geq 1. \text{ On obtient } e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1. \text{ On retrouve}$$

$$\exp(1) \exp(-1) = 1, \text{ c'est-à-dire } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}.$$

Corrigé de l'exercice 15 : Produit de Cauchy de deux séries semi-convergentes

1. La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ décroît et tend vers 0 . Par le critère spécial des séries alternées, $\sum a_n$ converge. En revanche, $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$, terme d'une série de Riemann divergente. **La série converge, mais pas absolument.**

2. Par définition, $c_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}$. Or $(-1)^k (-1)^{n-k} = (-1)^n$. **Donc**

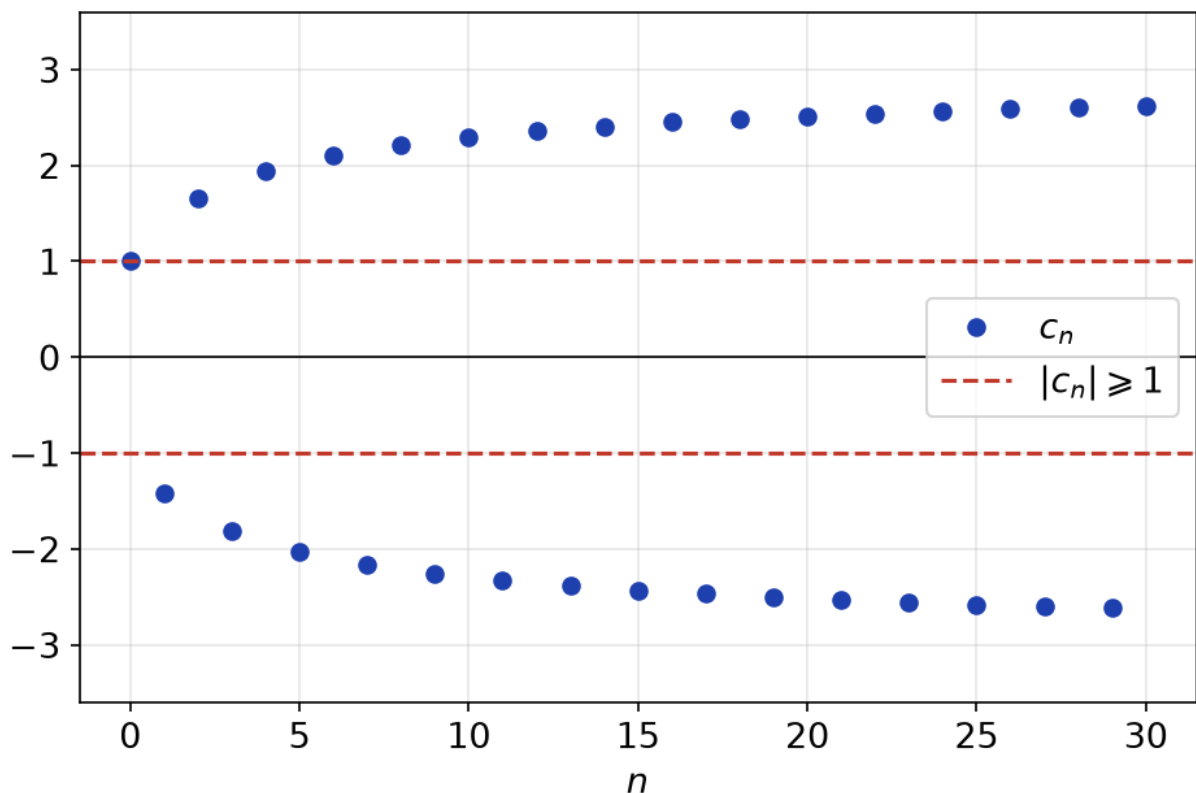
$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}.$$

3. Pour des réels positifs u et v , on a $uv \leq \left(\frac{u+v}{2}\right)^2$, car la différence vaut $\left(\frac{u-v}{2}\right)^2$. Avec $u = k+1$ et $v = n-k+1$, on a $u+v = n+2$. Donc

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{2}{n+2} \text{ pour chacun des } n+1 \text{ termes. Il vient } |c_n| \geq \frac{2(n+1)}{n+2}.$$

Enfin, $2(n+1) - (n+2) = n \geq 0$. **Ainsi** $|c_n| \geq 1$ **pour tout** n .

4. La suite (c_n) ne tend pas vers 0. **La série** $\sum c_n$ **diverge donc grossièrement**.
L'hypothèse manquante est l'absolue convergence de $\sum a_n$. Le théorème du produit de Cauchy ne s'applique donc pas. La figure ci-dessous montre les valeurs de c_n , qui alternent de signe en restant hors de la bande $]-1, 1[$.



Corrigé de l'exercice 16 : Séries de Dirichlet et diviseurs

1. La famille est positive. Par Fubini positif, $\sum_{(p,q)} \frac{1}{p^s q^s} = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^s} \zeta(s) = \zeta(s)^2$. Comme $s > 1$, $\zeta(s)$ est fini. **La famille est sommable, de somme $\zeta(s)^2$.**
2. Tout couple (p, q) appartient à P_{pq} et à aucun autre P_n . De plus, chaque P_n est non vide, car il contient $(1, n)$. Les P_n forment donc une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$. Ensuite, l'application $(p, q) \rightarrow p$ est une bijection de P_n sur l'ensemble des diviseurs positifs de n , de réciproque $p \rightarrow (p, n/p)$. Donc P_n a $d(n)$ éléments, comme l'illustre la figure de l'énoncé. Sur P_n , chaque terme vaut $\frac{1}{n^s}$, d'où une somme $\frac{d(n)}{n^s}$. **Par sommation par paquets positive,** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2$.
3. On considère la famille positive $\left(\frac{q}{(pq)^s}\right) = \left(\frac{1}{p^s} \cdot \frac{1}{q^{s-1}}\right)$. Par Fubini positif, sa somme vaut $\zeta(s) \zeta(s-1)$, finie car $s-1 > 1$. Sur le paquet P_n , q parcourt les diviseurs de n , donc la somme du paquet vaut $\frac{1}{n^s} \sum_{q|n} q = \frac{\sigma(n)}{n^s}$. **Par sommation par paquets,** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s) \zeta(s-1)$.

Corrigé de l'exercice 17 : Séries de Lambert

1. Si $x = 0$, la famille est nulle. Sinon, à k fixé, $\sum_{m \geq 1} |x|^{km} = \frac{|x|^k}{1 - |x|^k}$. Or $|x|^k \leq |x|$ pour $k \geq 1$, donc $\frac{|x|^k}{1 - |x|^k} \leq \frac{|x|^k}{1 - |x|}$. Par Fubini positif, $\sum_{(k,m)} |x|^{km} \leq \frac{1}{1 - |x|} \sum_{k \geq 1} |x|^k = \frac{|x|}{(1 - |x|)^2}$. **La famille est donc sommable.**
2. D'une part, le théorème de Fubini permet de sommer d'abord en m : comme $|x^k| < 1$, $\sum_{m \geq 1} x^{km} = \frac{x^k}{1 - x^k}$. D'autre part, on somme par les paquets

$P_n = \{(k, m) : km = n\}$ de l'exercice 16. Le paquet P_n contient $d(n)$ couples, et chaque terme vaut x^n . **Donc** $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n$.

3. La famille $(k x^{km})$ est sommable : à k fixé, la somme des modules vaut $\frac{k|x|^k}{1-|x|^k} \leq \frac{k|x|^k}{1-|x|}$, terme d'une série convergente. En sommant en m , on obtient $\frac{k x^k}{1-x^k}$. Sur le paquet P_n , k parcourt les diviseurs de n , d'où la somme $\sigma(n) x^n$. **Ainsi** $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma(n) x^n$.
4. On a $\frac{x^k}{1-x^k} = x^k + x^{2k} + x^{3k} + \dots$. Le monôme x^4 apparaît pour $k = 1$ (terme $x^4 \times 1$), pour $k = 2$ (terme $x^2 \times 2$) et pour $k = 4$ (terme $x^1 \times 4$). Son coefficient vaut donc 3 . **C'est bien** $d(4) = 3$, car les diviseurs de 4 sont $1, 2$ et 4 .

Corrigé de l'exercice 18 : Problème : l'exponentielle complexe

Partie A.

1. Pour $z = 0$, la série se réduit à son premier terme. Pour $z \neq 0$, le rapport $\frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \frac{|z|}{n+1}$ tend vers 0 . **Par la règle de d'Alembert**, $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument.
2. Les séries $\sum \frac{a^n}{n!}$ et $\sum \frac{b^n}{n!}$ convergent absolument. Leur produit de Cauchy a pour terme général $c_n = \sum_{k=0}^n \frac{a^k b^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Comme a et b commutent, la formule du binôme donne $c_n = \frac{(a+b)^n}{n!}$. **Le théorème du produit de Cauchy donne** $\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b)$.
3. D'abord, $\exp(0) = 1$, car seul le terme d'indice 0 est non nul. Donc $\exp(z)\exp(-z) = \exp(0) = 1$. Ainsi $\exp(z) \neq 0$ et $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$, on raisonne par récurrence : $\exp(0 \cdot z) = 1$, et $\exp((n+1)z) = \exp(nz)\exp(z) = \exp(z)^{n+1}$. Enfin, pour $n < 0$, on a $\exp(nz) = \frac{1}{\exp(-nz)} = \frac{1}{\exp(z)^{-n}} = \exp(z)^n$. **Les trois propriétés sont établies.**

Partie B.

1. Pour tout N , la conjugaison est additive et multiplicative, donc $\overline{\sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^N \frac{\bar{z}^k}{k!}$. De plus, la conjugaison est continue, car $|\bar{u} - \bar{v}| = |u - v|$. On passe à la limite quand $N \rightarrow +\infty$.
Ainsi $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$.
2. On a $|\exp(z)|^2 = \exp(z)\overline{\exp(z)} = \exp(z)\exp(\bar{z}) = \exp(z + \bar{z}) = \exp(2 \operatorname{Re}(z))$. Comme $2 \operatorname{Re}(z)$ est réel, cette quantité vaut $e^{2 \operatorname{Re}(z)} = (e^{\operatorname{Re}(z)})^2$. Les deux nombres $|\exp(z)|$ et $e^{\operatorname{Re}(z)}$ sont positifs, et leurs carrés sont égaux. **Donc** $|\exp(z)| = e^{\operatorname{Re}(z)}$, et en particulier $|\exp(i\theta)| = e^0 = 1$ pour θ réel.

Partie C.

Questions 1 et suivantes

1. Pour $k \leq n$, on a $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$. En divisant chacun des k facteurs par n , on obtient $\alpha_{n,k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{n}$. Chaque facteur $1 - \frac{j}{n}$ appartient à $[0, 1]$, car $0 \leq j \leq n-1$. **Donc** $0 \leq \alpha_{n,k} \leq \frac{1}{k!}$, inégalité évidente aussi lorsque $k > n$.
2. Par la formule du binôme, $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k \geq 0} \alpha_{n,k} z^k$, somme en réalité finie. Par linéarité,

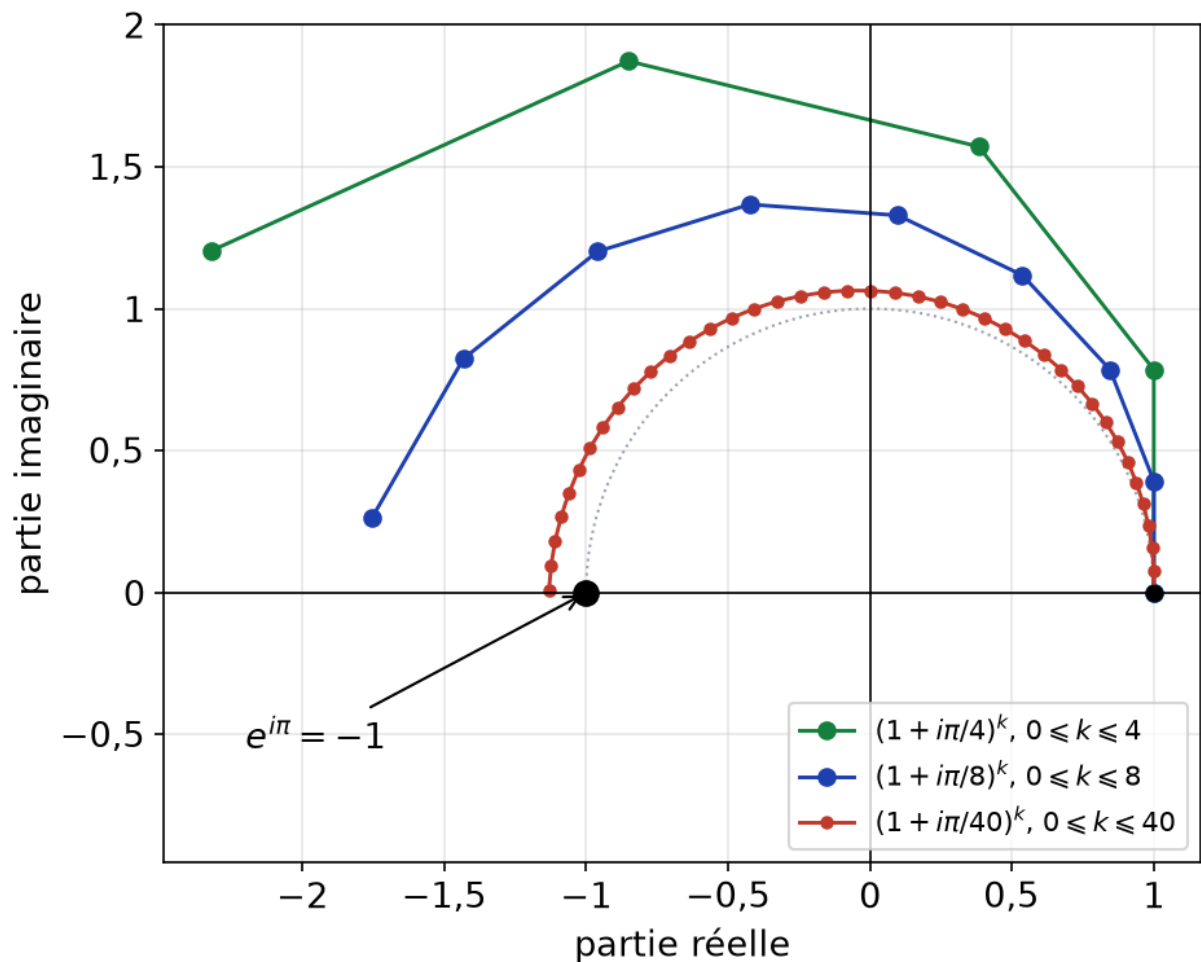
$$\exp(z) - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} - \alpha_{n,k}\right) z^k.$$

Les coefficients $\beta_k = \frac{1}{k!} - \alpha_{n,k}$ sont positifs d'après la question 1. L'inégalité triangulaire donne donc $|\exp(z) - (1 + \frac{z}{n})^n| \leq \sum_k \beta_k |z|^k$. Or la même égalité, écrite

pour le réel $|z|$, donne $\sum_k \beta_k |z|^k = e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n$. **L'inégalité demandée est établie.**

3. D'après le résultat admis, $\left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n \rightarrow e^{|z|}$, donc le majorant tend vers 0. **Par conséquent,**
 $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \rightarrow \exp(z)$ **pour tout complexe** z . En particulier, pour $z = i\pi$,
 $\left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n \rightarrow \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

La figure ci-dessous représente les puissances successives $\left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^k$ pour $0 \leq k \leq n$. Quand n grandit, la ligne brisée se rapproche du demi-cercle unité, et son extrémité se rapproche de -1 .



Corrigé de l'exercice 19 : Paquets diagonaux et coefficients binomiaux

1. Les couples (p, q) tels que $p + q = N$ sont les couples $(p, N - p)$ avec $0 \leq p \leq N$.

La formule du binôme donne $\sum_{p+q=N} w_{p,q} = \sum_{p=0}^N \binom{N}{p} x^p y^{N-p} = (x+y)^N$. **La somme de la diagonale numéro N vaut $(x+y)^N$.**

2. La famille est positive. Les ensembles $P_N = \{(p, q) : p + q = N\}$ forment une partition de $\mathbb{N}^2$, chacun étant fini. Le théorème de sommation par paquets pour les familles positives

donne, dans $[0, +\infty]$, $\sum_{(p,q)} w_{p,q} = \sum_{N=0}^{+\infty} (x+y)^N$. Une famille positive est sommable si

et seulement si cette somme est finie. Or la série géométrique de raison $x+y \geq 0$ converge si et seulement si $x+y < 1$. Si $x+y \geq 1$, ses termes ne tendent pas vers 0 et la somme vaut $+\infty$. **La famille est donc sommable si et seulement si $x+y < 1$, et sa somme vaut alors $\frac{1}{1-x-y}$.**

3. Pour $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{3}$, $x+y = \frac{5}{6} < 1$ et la somme vaut $\frac{1}{1-5/6} = 6$. Pour

$x = y = \frac{1}{2}$, $x+y = 1$: chaque diagonale a pour somme 1, donc la somme totale vaut $\sum_{N \geq 0} 1 = +\infty$. **La famille n'est pas sommable.**

4. La famille est positive : le théorème de Fubini positif autorise à sommer d'abord sur q . Pour p

fixé, $\sum_q w_{p,q} = x^p \sum_q \binom{p+q}{p} y^q = \frac{x^p}{(1-y)^{p+1}} = \frac{1}{1-y} \left(\frac{x}{1-y}\right)^p$. On

somme ensuite sur p : c'est une série géométrique de raison $\frac{x}{1-y}$, convergente si et seulement si $\frac{x}{1-y} < 1$, c'est-à-dire $x+y < 1$. Sa somme vaut alors

$\frac{1}{1-y} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{1-y}} = \frac{1}{1-y} \cdot \frac{1-y}{1-y-x} = \frac{1}{1-x-y}$. **On retrouve le même résultat, par un**

autre découpage de $\mathbb{N}^2$. (Si $x+y \geq 1$, cette somme vaut $+\infty$, ce qui confirme la non-sommabilité.)

Corrigé de l'exercice 20 : Problème : produit d'Euler et nombres premiers

1. L'application φ est surjective sur E par définition de E . Elle est injective : si $2^a 3^b = 2^{a'} 3^{b'}$, l'unicité de la décomposition en facteurs premiers impose que les exposants de 2 soient égaux ($a = a'$) et ceux de 3 aussi ($b = b'$). φ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur E . Sur la figure, tous les nombres sont bien deux à deux différents.

2. Pour $s > 1$, la famille $(n^{-s})_{n \geq 1}$ est sommable (série de Riemann convergente). La famille $(n^{-s})_{n \in E}$ est une sous-famille de termes positifs : elle est sommable, de somme au plus $\zeta(s)$. Par bijection φ , on peut changer d'indexation (une famille sommable ne dépend pas de l'ordre ni du choix de l'indexation) :

$$\sum_{n \in E} n^{-s} = \sum_{(a,b) \in \mathbb{N}^2} (2^a 3^b)^{-s} = \sum_{(a,b)} (2^{-s})^a (3^{-s})^b.$$
 C'est une famille produit de deux séries géométriques de raisons 2^{-s} et 3^{-s} , toutes deux dans $[0, 1[$. Par le théorème de Fubini positif,

$$\sum_{n \in E} n^{-s} = \left(\sum_{a \geq 0} 2^{-sa} \right) \left(\sum_{b \geq 0} 3^{-sb} \right). \text{ Donc }$$

$$\sum_{n \in E} n^{-s} = \frac{1}{(1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s})}.$$

3. Pour $s = 2$: $\frac{1}{(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})} = \frac{4}{3} \times \frac{9}{8} = \frac{3}{2}$. Comme $E \subset \mathbb{N}^*$ et que les termes sont positifs, $\sum_{n \in E} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \zeta(2)$. Donc $\zeta(2) \geq \frac{3}{2}$, ce qui est cohérent avec $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,645$.

4. Pour $s = 1$, la famille $(\frac{1}{2^a 3^b})$ est positive : le calcul de la question 2 reste valable dans $[0, +\infty]$, sans hypothèse de sommabilité.

$$\sum_{n \in E} \frac{1}{n} = \left(\sum_{a \geq 0} \frac{1}{2^a} \right) \left(\sum_{b \geq 0} \frac{1}{3^b} \right) = 2 \times \frac{3}{2} = 3. \text{ La somme vaut 3 : elle est finie, alors}$$

que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$.

5. Supposons par l'absurde qu'il existe un nombre fini k de nombres premiers $p_1, \dots, p_k$. Tout entier $n \geq 1$ s'écrit alors comme produit de puissances de ces nombres, de façon unique : on a

$$E_k = \mathbb{N}^*. \text{ Le résultat admis donne } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - 1/p_i} = \prod_{i=1}^k \frac{p_i}{p_i - 1}, \text{ un produit}$$

fini de réels : **cette somme est finie**. Cela contredit le résultat de l'exercice 1 (question 3) :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = +\infty. \text{ Il existe donc une infinité de nombres premiers (preuve d'Euler).}$$

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [familles sommables, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur familles sommables](#)
- À maîtriser avant : [Séries numériques](#)
- Chapitre précédent : [Séries numériques](#)
- Chapitre suivant : [Dénombrement](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)