Factorisation et étude de signe

L'élève devra avoir acquis les pré-requis suivants afin de pouvoir aborder ce chapitre :

Résoudre

- une équation de type ax + b = 0;
- une équation produit;
- une inéquation de type ax + b > 0;
- représenter les solutions sur un axe gradué

Factoriser

- avec les identités remarquables;
- avec un facteur commun évident.

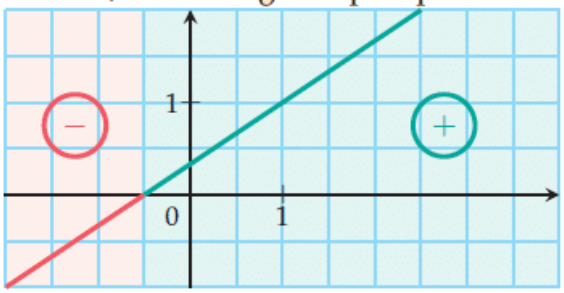
I. Signe d'une fonction affine

Propriété :

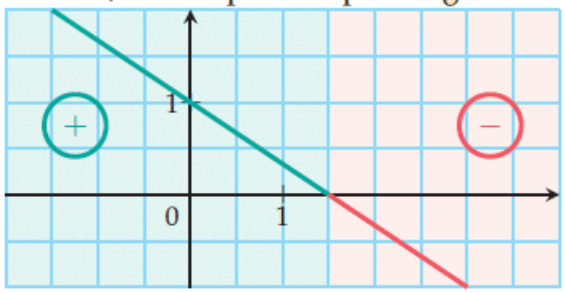
Soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$.
La fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par f (x) = ax + b s'annule et change de signe une fois dans son domaine de définition pour $x = -\frac{b}{a}$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Si $a > 0$, elle est négative puis positive.



Si $a < 0$, elle est positive puis négative.



Preuve :

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par f (x) = ax + b avec a $a \neq 0$.
f (x) = 0 implique ax + b = 0 soit ax = −b et $x = -\frac{b}{a}$.
Si a > 0, la fonction f est croissante.

- Pour $x < -\frac{b}{a}$, $f(x) < f(-\frac{b}{a})$ .Or $f(-\frac{b}{a}) = 0$ donc $f(x) < 0$.
- Pour $x > -\frac{b}{a}$, $f(x) > f(-\frac{b}{a})$ .Or $f(-\frac{b}{a}) = 0$ donc $f(x) > 0$.

Donc f est négative sur $]-\infty;-\frac{b}{a}[$ puis positive sur $]-\frac{b}{a};+\infty[$.
Si a < 0, la fonction f est décroissante.

- Pour $x < -\frac{b}{a}$, $f(x) > f(-\frac{b}{a})$ .Or $f(-\frac{b}{a}) = 0$ donc $f(x) > 0$.
- Pour $x > -\frac{b}{a}$, $f(x) < f(-\frac{b}{a})$ .Or $f(-\frac{b}{a}) = 0$ donc $f(x) < 0$.

Donc f est positive sur $]-\infty;-\frac{b}{a}[$ puis négative $]-\frac{b}{a};+\infty[$.

1.Méthode : dresser le tableau de signes d'une fonction affine.

Tableau de signe:

Le tableau de signes d'une fonction affine comporte deux lignes.

Sur la première ligne on indique les bornes du domaine de définition de la fonction et la valeur qui annule la fonction.
Sur la deuxième ligne, par des pointillés verticaux sous la valeur qui annule, on crée deux cases dans lesquelles on indique le signe de la fonction.

Exemple :

Dresser le tableau de signes de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \to -3x + 4$.

Le coefficient directeur,−3, est négatif donc g est décroissante.
Recherche de la valeur qui annule :
−3x + 4 = 0 soit $x = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$-3x+4$		$+$	0	$-$	

2. Factorisation

Remarque :

En classe de seconde, on a déjà des outils pour factoriser une grande partie des polynômes de degré 2. D'autres outils seront étudiés en Première.

En Terminale, dans certaines séries, toutes les expressions seront factorisables.

3. Méthode : factoriser une expression littérale.

Méthode :

Soit a, b, k trois nombres réels.
- Si un facteur est apparent, on utilise : $ka+kb=k(a+b)$.
- Si un facteur n'est pas apparent, on utilise les identités remarquables :

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exemple :

Factoriser les expressions suivantes :
1) 4ac − 6ab
2) (x − 2)(5x − 1) + (2x + 7)(x − 2)
3) $x^2 - 6x + 9$
4) $36x^2 - 81$

1) $4ac - 6ab = 2a(2c - 3b)$
2)

$$\begin{aligned}&(x-2)(5x-1)+(2x+7)(x-2)\\&=(x-2)\big((5x-1)+(2x+7)\big)\\&=(x-2)(7x+6)\end{aligned}$$

3) $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x-3)^2$
4) $36x^2 - 81 = (6x)^2 - 9^2 = (6x+9)(6x-9)$.

II. Signe du produit de deux fonctions affines

1. Méthode : étudier le signe du produit de deux fonctions affines.

Méthode :

Pour déterminer le signe du produit de deux fonctions affines, on construit un tableau de signes à 4 lignes.
1) La 1e ligne indique les bornes de l'ensemble de définition
et les valeurs qui annulent le produit des deux fonctions affines.
2) Les 2e et 3e lignes indiquent le signe de chacune des deux fonctions affines.
3) La 4e ligne se remplit avec la règle des signes du produit de deux nombres relatifs :
a) des facteurs de même signe donnent un produit positif ;
b) des facteurs de signes contraires donnent un produit négatif.

Exemple :

Résoudre l'inéquation $(3x+4)(-2x+6) \leq 0$.
On étudie le signe de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par h(x) = (3x + 4)(−2x + 6).

Recherche des valeurs qui annulent :

- 3x + 4 = 0 implique $x = -\frac{4}{3}$.
- −2x + 6 = 0 implique x = 3.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		3		$+\infty$
$3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Les solutions de cette inéquation sont les nombres de l'ensemble $[3;+\infty[$.;

III. Signe d'une fonction homographique

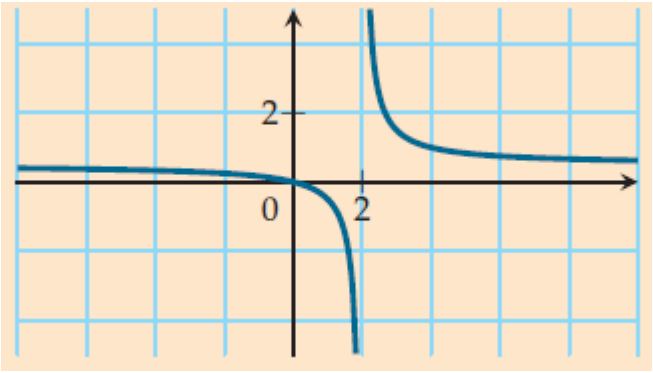
Définition : fonction homographique.

On appelle fonction homographique toute fonction h qui peut s'écrire comme quotient de fonctions affines. Soit a, b, c, d quatre réels tels que $ad-bc \neq 0$ et $c \neq 0$: $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Propriété :

Une fonction homographique est définie sur $\mathbb{R}$ privé de la valeur qui annule son dénominateur dite « valeur interdite ».
Sa courbe représentative est une hyperbole qui comporte deux branches disjointes.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



1.Méthode : donner le domaine de définition d'une fonction homographique.

Méthode :

> Pour identifier ce domaine de définition, il suffit de trouver la valeur interdite.

Exemple :

Quel est le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \frac{5x+4}{3x-7}$?

Recherche de la valeur interdite : $3x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$.
Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \frac{5x+4}{3x-7}$ est $\mathbb{R} - \left\{\frac{7}{3}\right\}$.

2.Méthode : donner le tableau de signes d'une fonction homographique.

Méthode :

> La méthode est similaire à celle du produit de deux fonctions affines.
> La valeur qui annule le dénominateur ne faisant pas partie du domaine de définition de la fonction doit être indiquée par une double barre.

Exemple :

Résoudre l'inéquation $\frac{3x-5}{2x+7} > 0$.

On étudie le signe de la fonction l définie par $l(x) = \frac{3x-5}{2x+7}$.

- Recherche de la valeur interdite :

$2x + 7 \neq 0$ implique $x = -\frac{7}{2}$ donc l est définie sur R %5C $\left\{-\frac{7}{2}\right\}$.

- Recherche de la valeur qui annule l :

3x − 5 = 0 implique $x = \frac{5}{3}$.

- Comparaison des valeurs trouvées pour les ranger sur la 1re ligne du tableau : $-\frac{7}{2} < \frac{5}{3}$.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$l(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Les solutions de l'inéquation $\frac{3x-5}{2x+7} > 0$ sont les nombres de l'ensemble $]-\infty;-\frac{7}{2}[\cup]\frac{5}{3};+\infty[$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.