

## Espérance et variance

### Exercice 1 : Espérance et variance à partir d'une loi

Une variable aléatoire  $X$  prend les valeurs  $-2$ ,  $0$ ,  $1$  et  $3$  avec les probabilités respectives  $0,1$ ,  $0,3$ ,  $0,4$  et  $0,2$ .

1. Calculer  $E(X)$ .
2. Déterminer la loi de  $Y = X^2$ , puis calculer  $E(Y)$  de deux façons : avec cette loi, puis avec la formule de transfert.
3. En déduire  $V(X)$  et  $\sigma(X)$ .
4. Calculer  $E(|X - 1|)$ .

### Exercice 2 : Loi à paramètre et formule de transfert

Soit  $c$  un réel et  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\{1, 2, 3, 4\}$  telle que  $P(X = k) = ck$  pour tout  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

1. Déterminer  $c$ .
2. Calculer  $E(X)$ ,  $E(X^2)$  et  $V(X)$ .
3. Calculer  $E\left(\frac{1}{X}\right)$  et  $E(2^X)$ . Comparer  $E\left(\frac{1}{X}\right)$  et  $\frac{1}{E(X)}$ .

### Exercice 3 : Transformation affine et variable centrée réduite

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle d'espérance  $m$  et de variance  $\sigma^2 > 0$ , avec  $\sigma > 0$ .

1. Montrer que  $Y = \frac{X - m}{\sigma}$  est d'espérance 0 et de variance 1.
2. Montrer que  $Y$  est la seule variable de la forme  $aX + b$ , avec  $a > 0$ , qui est centrée et de variance 1.
3. On note  $D$  le résultat d'un dé équilibré à six faces. Rappeler  $E(D)$  et calculer  $V(D)$ .  
Calculer ensuite  $E(3 - 2D)$  et  $V(3 - 2D)$ .

### Exercice 4 : Loi uniforme sur un intervalle d'entiers

1. Soit  $n \geq 1$  et  $X$  de loi uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$ . Montrer que  $E(X) = \frac{n+1}{2}$  et  $V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$ .
2. Soient  $a \leq b$  deux entiers et  $U$  de loi uniforme sur  $\{a, a+1, \dots, b\}$ .  
Exprimer  $U$  à l'aide d'une variable uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$  pour un  $n$  à préciser. En déduire  $E(U)$  et  $V(U)$ .
3. Application : calculer l'espérance et la variance d'un entier choisi uniformément dans  $\{0, 1, \dots, 10\}$ .

### Exercice 5 : Moments de la loi binomiale par le calcul direct

Soient  $n \geq 2$ ,  $p \in [0, 1]$ ,  $q = 1 - p$  et  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ . On veut retrouver  $E(X)$  et  $V(X)$  sans utiliser de variables de Bernoulli.

1. Montrer que  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$  pour  $1 \leq k \leq n$ , puis que  $k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$  pour  $2 \leq k \leq n$ .
2. En déduire  $E(X) = np$ .
3. Calculer  $E(X(X-1))$  par la formule de transfert.
4. En déduire  $V(X)$ .

### Exercice 6 : Espérance d'une variable à valeurs complexes

1. Soient  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ ,  $q = 1 - p$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer  $E(e^{i\theta} X)$ .
2. On prend  $p = \frac{1}{2}$ . Montrer que  $E(e^{i\theta} X) = \cos(\theta/2)^n$ .  
En déduire  $E(\cos(\theta X))$  lorsque  $\theta = \pi$ , puis interpréter ce résultat avec  $P(X \text{ pair})$ .
3. Soient  $n \geq 2$ ,  $U$  de loi uniforme sur  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  et  $Z = e^{2i\pi U/n}$ . Pour  $k \in \mathbb{Z}$ , calculer  $E(Z^k)$ . Comparer  $|E(Z)|$  et  $E(|Z|)$ .

### Exercice 7 : Formule de transfert et inverse d'une binomiale

Soient  $n \geq 1$ ,  $p \in ]0, 1[$ ,  $q = 1 - p$  et  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

1. Montrer que  $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$  pour  $0 \leq k \leq n$ .
2. En déduire que  $E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1 - q^{n+1}}{(n+1)p}$ .
3. Vérifier la formule pour  $n = 1$  par un calcul direct.
4. Pour  $n = 2$  et  $p = \frac{1}{2}$ , comparer  $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$  et  $\frac{1}{E(X) + 1}$ .

### Exercice 8 : Espérance à l'aide des probabilités $P(X \geq k)$

1. Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\{0, 1, \dots, n\}$ . Montrer que

$$E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k).$$

2. On lance deux dés équilibrés indépendants et on note  $M$  le plus grand des deux résultats. Calculer  $P(M \leq k)$  pour  $k \in \{1, \dots, 6\}$ , puis  $E(M)$  à l'aide de la question 1.
3. Déterminer la loi de  $M$  et vérifier le résultat précédent.
4. On note  $m$  le plus petit des deux résultats. Calculer  $E(m)$  par la même méthode. Contrôler le résultat à l'aide de  $M + m$ .

### Exercice 9 : Covariance nulle sans indépendance

Soit  $X$  de loi uniforme sur  $\{-1, 0, 1\}$  et  $Y = X^2$ .

1. Calculer  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $E(XY)$ , puis  $\text{Cov}(X, Y)$ .
2. Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
3. Calculer  $V(X + Y)$  de deux façons : avec la formule de la variance d'une somme, puis avec la loi de  $X + Y$ .

### Exercice 10 : Couple défini par un tableau

La loi conjointe d'un couple  $(X, Y)$  est donnée par le tableau suivant, où la case de la ligne  $x$  et de la colonne  $y$  contient  $P(X = x, Y = y)$ .

$$\begin{array}{c|cc} & Y = 0 & Y = 1 \\ \hline X = 0 & 0,1 & 0,2 \\ X = 1 & 0,2 & 0,1 \\ X = 2 & 0,3 & 0,1 \end{array}$$

1. Déterminer les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .
2. Calculer  $E(X)$ ,  $V(X)$ ,  $E(Y)$  et  $V(Y)$ .
3. Calculer  $E(XY)$  puis  $\text{Cov}(X, Y)$ . Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
4. Calculer  $V(X + Y)$ ,  $V(X - Y)$  et  $V(2X - 3Y)$ . Vérifier la valeur de  $V(X + Y)$  à l'aide de la loi de  $X + Y$ .

### Exercice 11 : Espérance et variance d'un produit indépendant

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles indépendantes.

1. Montrer que  $V(XY) = V(X)V(Y) + V(X)E(Y)^2 + V(Y)E(X)^2$ .
2. Application :  $X \sim \mathcal{B}(p)$  et  $Y \sim \mathcal{B}(p')$ . Déterminer la loi de  $XY$  et retrouver la formule de la question 1.
3. Application :  $X$  et  $Y$  sont les résultats de deux dés équilibrés indépendants. Calculer  $E(XY)$  et  $V(XY)$ .
4. La formule de la question 1 reste-t-elle vraie sans indépendance ? On pourra tester  $Y = X$  avec  $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ .

### Exercice 12 : Points fixes d'une permutation aléatoire

Soit  $n \geq 2$ . On choisit une permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$  selon la loi uniforme sur le groupe

symétrique. On note  $N$  le nombre de points fixes de  $\sigma$ , c'est-à-dire le nombre d'entiers  $i$  tels que  $\sigma(i) = i$ .

1. Écrire  $N$  comme une somme d'indicatrices. Calculer  $P(\sigma(i) = i)$  puis  $E(N)$ .
2. Pour  $i \neq j$ , calculer  $P(\sigma(i) = i, \sigma(j) = j)$  et la covariance des indicatrices correspondantes.
3. En déduire  $V(N)$ .
4. Majorer  $P(N \geq 3)$  par l'inégalité de Markov, puis par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Quelle borne est la meilleure ?

### Exercice 13 : Tirages sans remise et loi hypergéométrique

Une urne contient  $N$  boules, dont  $b$  blanches, avec  $1 \leq b \leq N - 1$ . On tire successivement et sans remise  $n$  boules, avec  $2 \leq n \leq N$ . On note  $X$  le nombre de boules blanches obtenues et  $B_k$  l'événement « la  $k$ -ième boule tirée est blanche ».

1. En modélisant le tirage par un  $n$ -uplet de boules distinctes choisi uniformément, montrer que  $P(B_k) = \frac{b}{N}$  pour tout  $k$ .
2. En déduire  $E(X)$ .
3. Pour  $k \neq l$ , calculer  $P(B_k \cap B_l)$ , puis  $\text{Cov}(1_{B_k}, 1_{B_l})$ .
4. Montrer que  $V(X) = n \frac{b}{N} \left(1 - \frac{b}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$ .
5. Application :  $N = 10$ ,  $b = 4$ ,  $n = 5$ . Comparer avec des tirages avec remise.

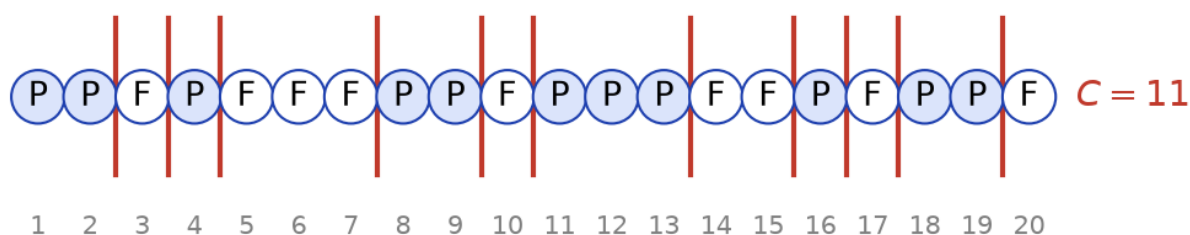
### Exercice 14 : Urnes vides

On place  $n$  boules dans  $r \geq 2$  urnes. Chaque boule est placée dans une urne choisie uniformément, indépendamment des autres. On note  $V$  le nombre d'urnes vides.

1. Calculer  $E(V)$ . En déduire l'espérance du nombre d'urnes occupées.
2. Montrer que  $V(V) = r a(1-a) + r(r-1)(b-a^2)$ , avec  $a = \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n$  et  $b = \left(1 - \frac{2}{r}\right)^n$ .
3. Application :  $n = r = 4$ . Calculer  $E(V)$  et  $V(V)$ .
4. Toujours pour  $n = r = 4$ , déterminer la loi de  $V$  par dénombrement et vérifier les résultats de la question 3.

### Exercice 15 : Nombre de changements dans une suite de lancers

Soient  $n \geq 2$ ,  $p \in ]0, 1[$  et  $q = 1 - p$ . On lance  $n$  fois une pièce qui donne pile avec probabilité  $p$ . Les lancers sont indépendants. On note  $X_i = 1$  si le  $i$ -ième lancer donne pile et  $X_i = 0$  sinon. Un **changement** a lieu entre les lancers  $i$  et  $i+1$  si  $X_i \neq X_{i+1}$ . On note  $C$  le nombre de changements. Sur la figure ci-dessous, 20 lancers donnent  $C = 11$ .

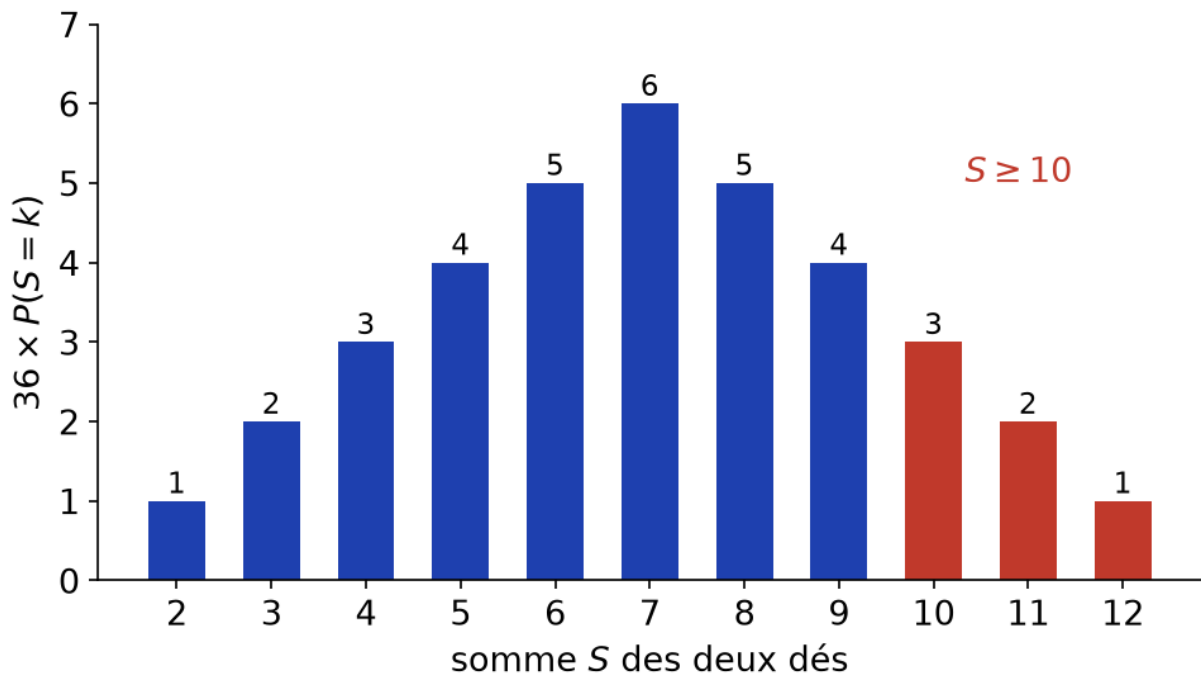


1. On pose  $C_i = 1_{\{X_i \neq X_{i+1}\}}$  pour  $1 \leq i \leq n-1$ . Calculer  $P(C_i = 1)$ , puis  $E(C)$ .
2. Montrer que  $C_i$  et  $C_j$  sont indépendantes si  $|i - j| \geq 2$ .
3. Calculer  $\text{Cov}(C_i, C_{i+1})$ .

4. En déduire  $V(C) = 2(n-1)pq(1-2pq) + 2(n-2)pq(1-4pq)$ .
5. On prend  $p = \frac{1}{2}$  et  $n = 101$ . Calculer  $E(C)$  et  $V(C)$ , puis majorer  $P(|C - 50| \geq 10)$ .

### Exercice 16 : Inégalité de Markov et somme de dés

On lance deux dés équilibrés indépendants et on note  $S$  la somme des résultats. La loi de  $S$  est représentée ci-dessous.



1. Calculer  $E(S)$  et  $V(S)$ .
2. Majorer  $P(S \geq 10)$  par l'inégalité de Markov, puis par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Comparer avec la valeur exacte.
3. Soient  $m > 0$  et  $a \geq m$ . Construire une variable positive  $X$ , d'espérance  $m$ , telle que  $P(X \geq a) = \frac{m}{a}$ . Que peut-on en conclure sur l'inégalité de Markov ?

### Exercice 17 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour une binomiale

On lance 100 fois une pièce équilibrée et on note  $X$  le nombre de piles.

1. Donner la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.
2. Majorer  $P(|X - 50| \geq 10)$ , puis minorer  $P(40 < X < 60)$ .
3. Déterminer le plus petit entier  $t$  pour lequel l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev garantit  $P(|X - 50| \geq t) \leq 0,05$ .
4. Majorer  $P(X \geq 60)$  par l'inégalité de Markov. En utilisant la symétrie de la loi de  $X$ , obtenir un meilleur majorant par Bienaymé-Tchebychev.

### Exercice 18 : Taille d'un sondage

Une proportion inconnue  $p$  d'une grande population approuve un projet. On interroge  $n$  personnes. On modélise les réponses par des variables  $X_1, \dots, X_n$  indépendantes de loi  $\mathcal{B}(p)$ . On note

$$F_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n).$$

1. Calculer  $E(F_n)$  et  $V(F_n)$ . Montrer que  $V(F_n) \leq \frac{1}{4n}$ .
2. Déterminer un nombre  $n$  de personnes qui garantit  $P(|F_n - p| \geq 0,02) \leq 0,05$ .
3. Même question avec une précision de 0,01. Commenter.
4. On sait désormais que  $p \leq 0,1$ . Reprendre la question 2.

### Exercice 19 : Moyenne de lancers de dés

On lance  $n$  fois un dé équilibré. Les lancers sont indépendants. On note  $M_n$  la moyenne des résultats

et  $F_n$  la fréquence des six.

1. Calculer  $E(M_n)$  et  $V(M_n)$ .
2. Déterminer un nombre de lancers qui garantit  $P(|M_n - 3,5| \geq 0,1) \leq 0,05$ .
3. Déterminer un nombre de lancers qui garantit  $P(|F_n - \frac{1}{6}| \geq 0,01) \leq 0,1$ .
4. Montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $P(|M_n - 3,5| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

### Exercice 20 : Variance nulle et meilleure approximation par une constante

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle, de moyenne  $m$ .

1. Montrer que  $V(X) = 0$  si et seulement si  $P(X = m) = 1$ .
2. Montrer que si  $X \geq 0$  et  $E(X) = 0$ , alors  $P(X = 0) = 1$ .
3. Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on pose  $g(a) = E((X - a)^2)$ . Montrer que  $g(a) = V(X) + (m - a)^2$ .  
En déduire le minimum de  $g$  et le point où il est atteint.
4. On suppose que  $X$  prend ses valeurs dans  $[\alpha, \beta]$ . Montrer que  $V(X) \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{4}$ . Donner un cas d'égalité.

### Exercice 21 : Coefficient de corrélation et régression linéaire

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles telles que  $V(X) > 0$  et  $V(Y) > 0$ .

1. En étudiant  $\lambda \rightarrow V(Y - \lambda X)$ , montrer que  $\text{Cov}(X, Y)^2 \leq V(X)V(Y)$ .

- On pose  $\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ . Montrer que  $|\rho| \leq 1$ , avec égalité si et seulement s'il existe des réels  $a$  et  $b$  tels que  $P(Y = aX + b) = 1$ .
- Pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $\varphi(a, b) = E((Y - aX - b)^2)$ . Montrer que  $\varphi$  atteint son minimum en un unique couple  $(a_0, b_0)$ , à déterminer. Montrer que ce minimum vaut  $V(Y)(1 - \rho^2)$ .
- Application :  $X$  et  $Z$  sont les résultats de deux dés équilibrés indépendants et  $Y = X + Z$ . Calculer  $\rho$ ,  $a_0$ ,  $b_0$  et le minimum de  $\varphi$ .

## Exercice 22 : Problème : polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Pour  $n \geq 1$  et  $x \in [0, 1]$ , on considère  $S_n \sim \mathcal{B}(n, x)$  et on pose

$$B_n(f)(x) = E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right).$$

- Montrer que  $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ . En déduire que  $B_n(f)$  est une fonction polynomiale.
- Calculer  $B_n(f)$  pour  $f(t) = 1$ ,  $f(t) = t$  et  $f(t) = t^2$ .
- Soit  $Y$  une variable aléatoire réelle. Montrer que  $E(|Y|) \leq \sqrt{E(Y^2)}$ .
- On suppose  $f$  lipschitzienne de rapport  $K$ . Montrer que, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{K}{2\sqrt{n}}$ .
- On suppose seulement  $f$  continue et on note  $|f|_\infty = \sup_{[0, 1]} |f|$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$  donné par le théorème de Heine. Montrer que, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{|f|_\infty}{2n\delta^2}.$$

En déduire que  $\sup_{x \in [0, 1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \rightarrow 0$ .

6. Exemple :  $f(t) = \lfloor \text{big}[?]t - \frac{1}{2} \rfloor \lfloor \text{big}[?] \rfloor$ . Calculer  $B_2(f)$  et vérifier la majoration de la question 4 en  $x = \frac{1}{2}$ .

## Le corrigé des exercices

---

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



## Pour aller plus loin en maths sup

---

- Le cours : [espérance et variance, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Probabilités sur un univers fini et variables aléatoires](#)
- Chapitre précédent : [Probabilités sur un univers fini et variables aléatoires](#)
- Chapitre suivant : [Espaces préhilbertiens réels](#)
- Le même thème en maths spé : [espérance et variance, exercices de maths spé](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)