

Espérance et variance

Exercice 1 : Loi géométrique par la formule des queues

Soit $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$ et X une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$:
 $P(X = k) = p q^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $P(X \geq n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire $E(X)$ à l'aide de la formule $E(X) = \sum_{n \geq 1} P(X \geq n)$.
3. Justifier l'existence de $E(X(X-1))$ et la calculer par la formule de transfert.
4. En déduire $V(X)$, puis donner $E(X)$ et $\sigma(X)$ pour $p = \frac{1}{3}$.

Exercice 2 : Loi de Poisson et formule de transfert

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. Justifier que $\frac{1}{1+X}$ est d'espérance finie et calculer $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$.
2. Pour $t \in \mathbb{R}$, justifier l'existence de $E(t^X)$ et la calculer.
3. Calculer $E(X(X-1)(X-2))$, puis en déduire $E(X^3)$.

Exercice 3 : Loi uniforme sur un ensemble d'entiers

Soit $n \geq 1$ et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$.

1. Calculer $E(X)$ et $E(X^2)$, puis $V(X)$.
2. Calculer $E(2^X)$ et exprimer $E\left(\frac{1}{X}\right)$ à l'aide de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
3. Retrouver $E(X)$ par la formule des queues.

Exercice 4 : Une variable d'espérance infinie

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Vérifier que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité.
2. Calculer $P(X \geq n)$, puis montrer que $E(X) = +\infty$ de deux façons.
3. La variable $\sqrt{X}$ est-elle d'espérance finie ?
4. Pour quels réels $\alpha > 0$ la variable X^α est-elle d'espérance finie ?

Exercice 5 : Somme et différence de variables de Poisson

Soient $\lambda, \mu > 0$ et X, Y deux variables indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$.

1. Calculer $E(XY)$, $E(X + Y)$ et $V(X + Y)$.

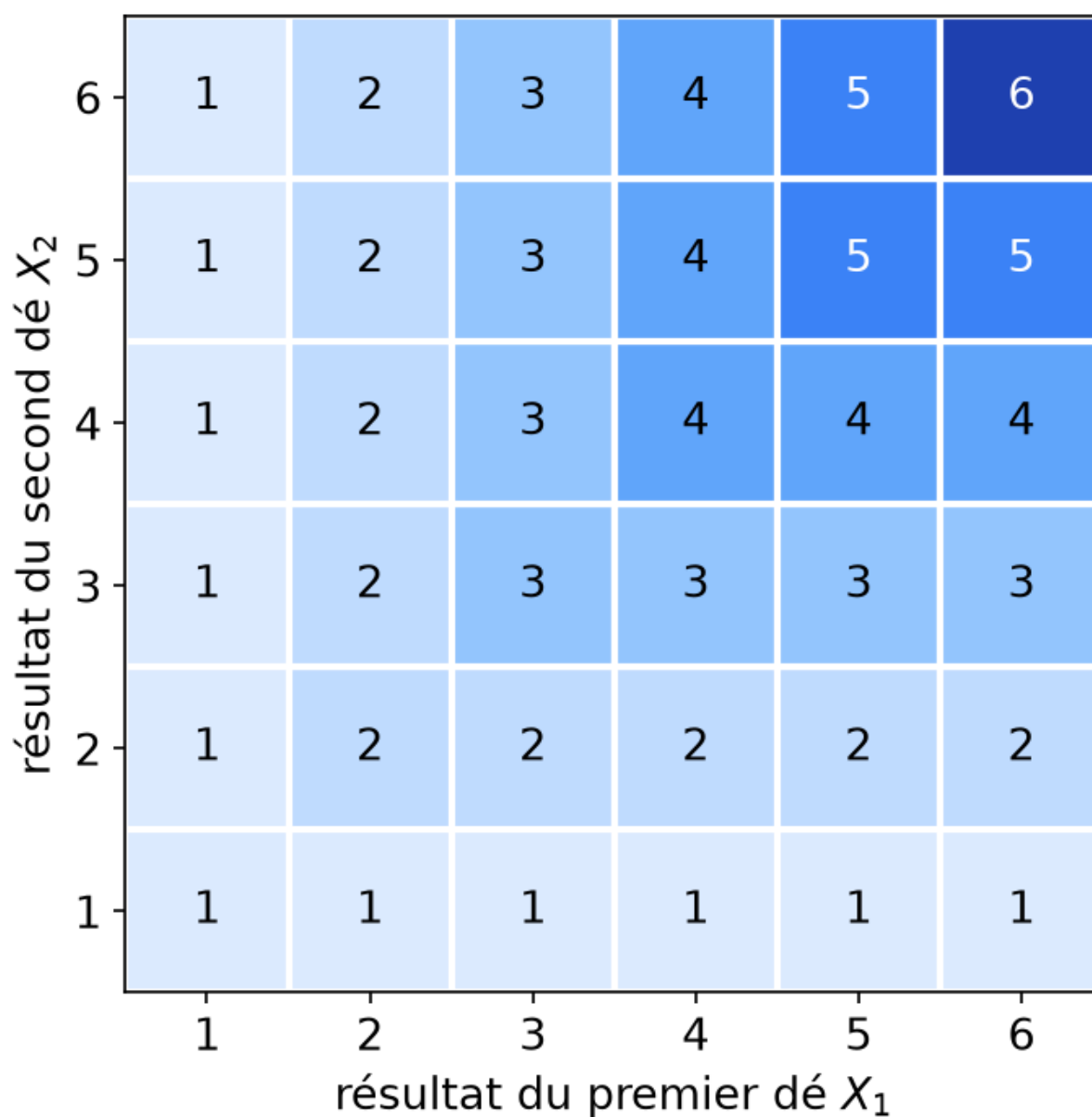
2. Calculer $V(X - Y)$ et $\text{Cov}(X + Y, X - Y)$.
3. On suppose $\lambda = \mu$. Les variables $X + Y$ et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 : Variables centrées réduites

1. Soit X une variable admettant un moment d'ordre 2 avec $\sigma(X) > 0$. Montrer qu'il existe un unique couple (a, b) , avec $a > 0$, tel que $aX + b$ soit centrée réduite.
2. Déterminer la variable centrée réduite associée à $X \sim \mathcal{G}(p)$, puis celle associée à $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
3. Soit $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et Y^* sa variable centrée réduite. Montrer que $P(|Y^*| \geq 2) \leq \frac{1}{4}$ et interpréter ce résultat en termes de Y .

Exercice 7 : Minimum et maximum de deux dés

On lance deux dés équilibrés à six faces, de façon indépendante. On note X_1, X_2 les résultats, $M = \min(X_1, X_2)$ et $M' = \max(X_1, X_2)$. La figure ci-dessous donne la valeur de M pour chacun des 36 résultats.



1. Calculer $P(M \geq n)$ pour $n \in \{1, \dots, 6\}$ et en déduire $E(M)$.
2. Calculer $E(M')$ par la même méthode.
3. Vérifier le résultat grâce à la relation $M + M' = X_1 + X_2$.
4. Plus généralement, on lance k dés à N faces. Exprimer l'espérance du minimum à l'aide de $\sum_{j=1}^N j^k$.

Exercice 8 : Minimum de deux variables géométriques

Soient $p, r \in]0, 1[$ et X, Y deux variables indépendantes de lois $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(r)$. On pose $Z = \min(X, Y)$.

1. Calculer $P(Z \geq n)$ pour $n \geq 1$. Reconnaître la loi de Z .
2. En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.
3. Calculer $P(X = Y)$.

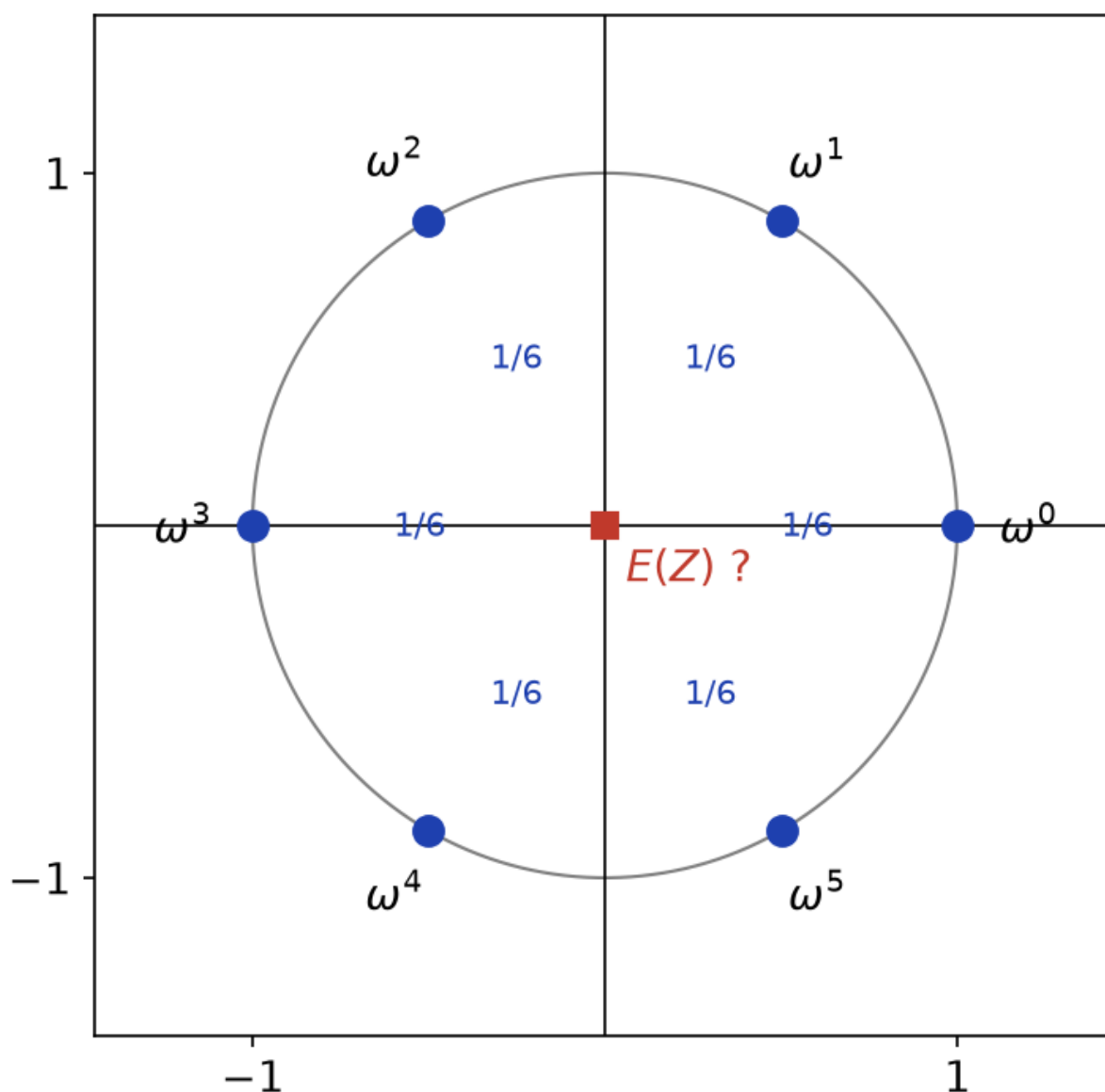
Exercice 9 : Covariance nulle sans indépendance

Soit X une variable de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et $Y = X^2$.

1. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ et $V(Y)$.
2. Montrer que $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
3. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.
4. Calculer $V(X + Y)$ de deux manières : par la formule de la variance d'une somme, puis à partir de la loi de $X + Y$.

Exercice 10 : Espérance d'une variable complexe

Soit $n \geq 2$, $\omega = e^{2i\pi/n}$ et X une variable de loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, n-1\}$. On pose $Z = \omega^X$. La figure représente les valeurs possibles de Z pour $n = 6$, chacune de probabilité $\frac{1}{6}$.



1. Justifier que Z est d'espérance finie et calculer $E(Z)$ et $E(|Z|^2)$.
2. Pour $m \in \mathbb{Z}$, calculer $E(Z^m)$.
3. Soit $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $t \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence de $E(e^{itY})$ et la calculer.
4. En déduire $E(\cos(tY))$ et $E(\sin(tY))$.

Exercice 11 : Une minoration par Cauchy-Schwarz

Soit X une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant un moment d'ordre 2, avec $E(X) > 0$.

1. Soit U une variable réelle admettant un moment d'ordre 2. Montrer que $E(|U|) \leq \sqrt{E(U^2)}$.
2. En remarquant que $X = X 1_{(X \geq 1)}$, montrer que $P(X \geq 1) \geq \frac{E(X)^2}{E(X^2)}$.
3. Application : si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, en déduire une minoration de $P(X \geq 1)$ et la comparer à la valeur exacte.
4. Application : si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, minorer $P(X \geq 1)$.

Exercice 12 : Nombre de points fixes d'une permutation

Soit $n \geq 2$. On choisit une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ selon la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. On note N le nombre de points fixes de σ .

1. Écrire N comme somme d'indicateurs et calculer $E(N)$.
2. Pour $i \neq j$, calculer $\text{Cov}(1_{(\sigma(i)=i)}, 1_{(\sigma(j)=j)})$.
3. En déduire $V(N)$.
4. Majorer $P(N \geq 3)$ par l'inégalité de Markov, puis par celle de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 13 : Urnes vides

On répartit m boules dans $n \geq 2$ urnes : chaque boule est placée dans une urne choisie uniformément, indépendamment des autres. On note N le nombre d'urnes restées vides.

1. Calculer $E(N)$.

2. Calculer $V(N)$ à l'aide des covariances.
3. Donner des valeurs approchées de $E(N)$ et $V(N)$ pour $m = n = 10$.
4. On prend $m = n$ et on note N_n le nombre d'urnes vides. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{N_n}{n} - e^{-1}\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0.$$

Exercice 14 : Coefficient de corrélation de deux comptages

On lance n fois un dé équilibré. On note X le nombre de « 1 » obtenus et Y le nombre de « 6 ».

1. Montrer que $|\text{Cov}(U, V)| \leq \sigma(U) \sigma(V)$ pour des variables admettant un moment d'ordre 2.
2. Déterminer les lois de X et de Y , puis $V(X)$ et $V(Y)$.
3. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$ et le coefficient de corrélation $\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.
4. Calculer $V(X + Y)$ et vérifier le résultat à l'aide de la loi de $X + Y$.

Exercice 15 : Inégalité de Markov et borne exponentielle

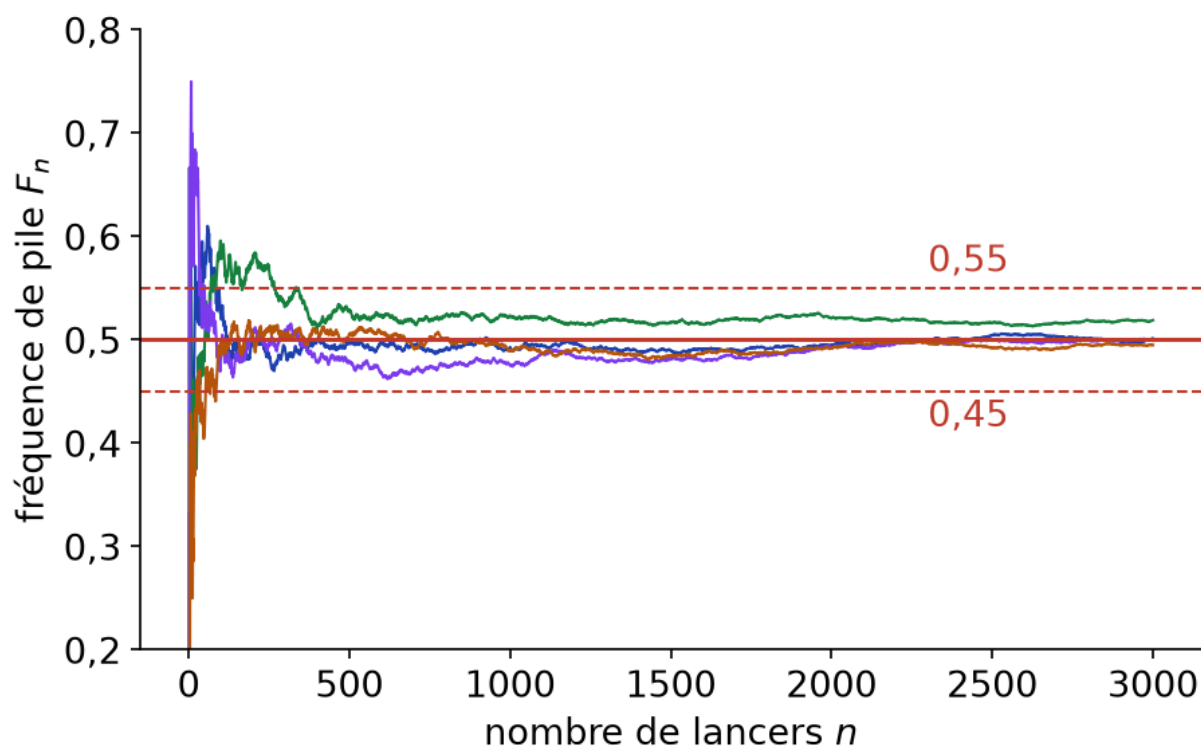
Soit $\lambda > 0$ et $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. On cherche à majorer $P(X \geq 2\lambda)$.

1. Donner la majoration fournie par l'inégalité de Markov.
2. Donner celle fournie par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. Pour $t > 0$, calculer $E(e^{tX})$ et montrer que $P(X \geq 2\lambda) \leq \exp(\lambda(e^t - 1 - 2t))$.
4. Choisir t au mieux et en déduire $P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$.

5. Comparer les trois bornes pour $\lambda = 10$, sachant que $P(X \geq 20) \approx 0,0035$.

Exercice 16 : Taille d'échantillon par Bienaymé-Tchebychev

On lance n fois une pièce équilibrée et on note F_n la fréquence de « pile ». La figure montre quatre trajectoires simulées de F_n avec la bande $[0,45 ; 0,55]$.



1. Calculer $E(F_n)$ et $V(F_n)$.
2. Déterminer un entier n tel que $P(|F_n - 0,5| \geq 0,05) \leq 0,05$.
3. Une pièce a une probabilité inconnue p de tomber sur pile. Combien de lancers suffisent pour que $P(|F_n - p| \geq 0,01) \leq 0,1$, quel que soit p ?
4. Énoncer la loi faible des grands nombres pour la suite des lancers et relier ce résultat aux questions précédentes.

Exercice 17 : Une seconde formule des queues

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que, dans $[0, +\infty]$: $\sum_{n=1}^{+\infty} n P(X \geq n) = E\left(\frac{X(X+1)}{2}\right)$.
2. En déduire que X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum n P(X \geq n)$ converge.
3. Retrouver la variance de la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
4. Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $P(X \geq n) = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$. Donner la loi de X , montrer que X est d'espérance finie et calculer $E(X)$. La variable X admet-elle un moment d'ordre 2 ?

Exercice 18 : Loi faible pour des variables corrélées

Soit $(Y_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables indépendantes de même loi :

$P(Y_k = 1) = P(Y_k = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $X_k = Y_k + Y_{k+1}$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Calculer $E(X_k)$ et $V(X_k)$.
2. Calculer $\text{Cov}(X_k, X_{k+1})$, puis $\text{Cov}(X_k, X_l)$ pour $|k - l| \geq 2$. Les variables X_k sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $V(S_n)$ de deux manières.
4. Montrer que $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.
5. Plus généralement, soit (X_k) une suite de variables de même espérance m , avec $V(X_k) \leq C$ et $\text{Cov}(X_k, X_l) = 0$ dès que $|k - l| \geq 2$. Montrer que

$$P(|S_n / n - m| \geq \epsilon) \leq \frac{3C}{n\epsilon^2}.$$

Exercice 19 : Polynômes de Bernstein

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$, on pose

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Pour $x \in [0, 1]$, on note S_n une variable de loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$.

1. Montrer que $B_n(f)(x) = E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$. Calculer $B_n(f)$ pour $f(t) = t$ et pour $f(t) = t^2$.
2. Soit $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ associé à ϵ par l'uniforme continuité de f . Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \epsilon + \frac{|f|_{\infty}}{2n\delta^2}.$$

3. En déduire que $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.
4. On suppose f lipschitzienne de rapport L . Montrer que $|B_n(f) - f|_{\infty} \leq \frac{L}{2\sqrt{n}}$. Application à $f(t) = |t - \frac{1}{2}|$.

Exercice 20 : Problème, le collectionneur de vignettes

Une collection comporte $n \geq 2$ vignettes différentes. Chaque achat donne une vignette choisie

uniformément, indépendamment des achats précédents. On note T_n le nombre d'achats nécessaires pour obtenir la collection complète. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on note G_k le nombre d'achats effectués après l'obtention de la $(k-1)$ -ième vignette distincte jusqu'à l'obtention de la k -ième (avec $G_1 = 1$).

1. Justifier que G_k suit la loi géométrique de paramètre $p_k = \frac{n-k+1}{n}$. On admet que $G_1, \dots, G_n$ sont indépendantes.
2. Exprimer T_n à l'aide des G_k . En déduire $E(T_n) = n H_n$, où $H_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$.
3. Calculer $E(T_n)$ pour $n = 6$, puis une valeur approchée pour $n = 50$.
4. Montrer que $V(T_n) \leq n^2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \leq \frac{\pi^2 n^2}{6}$.
5. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|T_n - n H_n| \geq \varepsilon n \ln n) \leq \frac{\pi^2}{6 \varepsilon^2 (\ln n)^2}$.
6. Rappeler que $H_n \sim \ln n$. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{T_n}{n \ln n} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [espérance et variance, cours de maths spé](#)
- À maîtriser avant : [Variables aléatoires discrètes et lois usuelles](#)
- Chapitre précédent : [Variables aléatoires discrètes et lois usuelles](#)
- Chapitre suivant : [Fonctions génératrices](#)
- Le même thème en maths sup : [espérance et variance, exercices de maths sup](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)