

Espérance et variance

Corrigé de l'exercice 1 : Espérance et variance à partir d'une loi

1. Par définition de l'espérance :

$$E(X) = -2 \times 0,1 + 0 \times 0,3 + 1 \times 0,4 + 3 \times 0,2 = -0,2 + 0,4 + 0,6.$$

Donc $E(X) = 0,8$.

2. Les valeurs de X^2 sont 4, 0, 1 et 9. Elles sont deux à deux distinctes, donc Y prend la valeur 0 avec probabilité 0,3, 1 avec probabilité 0,4, 4 avec probabilité 0,1 et 9 avec probabilité 0,2. Avec cette loi, $E(Y) = 0 + 0,4 + 0,4 + 1,8 = 2,6$. Ensuite, la formule de transfert donne $E(X^2) = 4 \times 0,1 + 0 \times 0,3 + 1 \times 0,4 + 9 \times 0,2 = 2,6$. **Les deux méthodes donnent** $E(Y) = 2,6$.

3. Par la formule de König-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2,6 - 0,64 = 1,96$. **Ainsi** $V(X) = 1,96$ **et** $\sigma(X) = 1,4$.

4. On applique la formule de transfert avec $f(x) = |x - 1|$:

$$E(|X - 1|) = 3 \times 0,1 + 1 \times 0,3 + 0 \times 0,4 + 2 \times 0,2 = 0,3 + 0,3 + 0,4.$$

Donc $E(|X - 1|) = 1$.

Point de méthode : la formule de transfert évite de chercher la loi de $f(X)$. Elle est surtout utile quand f n'est pas injective.

Corrigé de l'exercice 2 : Loi à paramètre et formule de transfert

1. La somme des probabilités vaut 1 : $c(1 + 2 + 3 + 4) = 10c = 1$. De plus, avec $c = \frac{1}{10}$, toutes les probabilités sont positives. **Donc** $c = \frac{1}{10}$.

2. On calcule $E(X) = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^4 k^2 = \frac{30}{10} = 3$. Ensuite, par transfert,

$$E(X^2) = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^4 k^3 = \frac{1 + 8 + 27 + 64}{10} = 10. \text{ Par conséquent, } V(X) = 10 - 9. \text{ On obtient } E(X) = 3, E(X^2) = 10 \text{ et } V(X) = 1.$$

3. Par la formule de transfert, $E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k} \cdot \frac{k}{10} = \frac{4}{10}$. De même,

$$E(2X) = \frac{2 \times 1 + 4 \times 2 + 8 \times 3 + 16 \times 4}{10} = \frac{98}{10}.$$

Donc $E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{2}{5}$ et $E(2X) = \frac{49}{5}$. Enfin, $\frac{1}{E(X)} = \frac{1}{3} < \frac{2}{5}$: l'espérance de l'inverse n'est pas l'inverse de l'espérance.

Corrigé de l'exercice 3 : Transformation affine et variable centrée réduite

1. Par linéarité, $E(Y) = \frac{E(X) - m}{\sigma} = 0$. Ensuite, d'après $V(aX + b) = a^2 V(X)$, on a $V(Y) = \frac{V(X)}{\sigma^2} = 1$. **La variable Y est centrée réduite.**

2. Soit $Z = aX + b$ avec $a > 0$. D'une part, $E(Z) = am + b$, donc Z est centrée si et seulement si $b = -am$. D'autre part, $V(Z) = a^2 \sigma^2$ vaut 1 si et seulement si $a = \frac{1}{\sigma}$, car $a > 0$. **Ainsi** $a = \frac{1}{\sigma}$, $b = -\frac{m}{\sigma}$ et $Z = Y$.

3. D'abord, $E(D) = \frac{7}{2}$. Ensuite, $E(D^2) = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \frac{91}{6}$. Donc $V(D) = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182 - 147}{12} = \frac{35}{12}$. Par linéarité, $E(3 - 2D) = 3 - 7 = -4$. Enfin, $V(3 - 2D) = (-2)^2 V(D) = \frac{140}{12}$. **On trouve** $V(D) = \frac{35}{12}$, $E(3 - 2D) = -4$ et

$$V(3 - 2D) = \frac{35}{3}.$$

Corrigé de l'exercice 4 : Loi uniforme sur un intervalle d'entiers

1. On a $E(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{n+1}{2}$. Ensuite, par transfert,

$$E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}. \text{ Par König-Huygens :}$$

$$V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)(2(2n+1) - 3(n+1))}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12}.$$

Donc $E(X) = \frac{n+1}{2}$ **et** $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

2. On pose $n = b - a + 1$ et X uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. La variable $X + a - 1$ prend chaque valeur $u \in \{a, \dots, b\}$ avec probabilité $P(X = u - a + 1) = \frac{1}{n}$. Elle a donc la loi de U . Par conséquent, $E(U) = \frac{n+1}{2} + a - 1 = \frac{b-a+2}{2} + a - 1$. Enfin, une translation ne change pas la variance. **Donc** $E(U) = \frac{a+b}{2}$ **et** $V(U) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

3. Ici $a = 0$ et $b = 10$, donc $n = 11$. **L'espérance vaut 5 et la variance**
 $\frac{121-1}{12} = 10$.

Corrigé de l'exercice 5 : Moments de la loi binomiale par le calcul direct

1. Pour $1 \leq k \leq n$:

$$k \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Ensuite, pour $2 \leq k \leq n$, on applique cette formule deux fois, la seconde avec $n-1$ et $k-1$:

$$k(k-1) \binom{n}{k} = n(k-1) \binom{n-1}{k-1} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}. \text{ Les}$$

deux identités sont établies.

2. Le terme $k = 0$ est nul. Puis on pose $j = k - 1$:

$$E(X) = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j q^{n-1-j} = np(p+q)^{n-1}.$$

Comme $p+q=1$, on obtient $E(X) = np$.

3. Par transfert, les termes $k = 0$ et $k = 1$ sont nuls. On pose ensuite $j = k - 2$:

$$E(X(X-1)) = n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^j q^{n-2-j} = n(n-1)p^2.$$

Donc $E(X(X-1)) = n(n-1)p^2$.

4. Par linéarité, $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = n(n-1)p^2 + np$. Ainsi,
 $V(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2$. **On retrouve** $V(X) = np(1-p)$.

Point de méthode : le moment $E(X(X-1))$, dit factoriel, se calcule mieux que $E(X^2)$, car $k(k-1)$ se simplifie avec $k!$.

Corrigé de l'exercice 6 : Espérance d'une variable à valeurs complexes

1. Par la formule de transfert, puis par la formule du binôme :

$$E(e^{i\theta} X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^{i\theta})^k q^{n-k} = (q + pe^{i\theta})^n.$$

Donc $E(e^{i\theta} X) = (q + pe^{i\theta})^n$.

2. Pour $p = \frac{1}{2}$, on factorise par l'angle moitié :

$$\frac{1+e^{i\theta}}{2} = e^{i\theta/2} \frac{e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}}{2} = e^{i\theta/2} \cos(\theta/2).$$

Par conséquent,
 $E(e^{i\theta} X) = e^{in\theta/2} \cos^n(\theta/2)$. **Son module vaut** $|\cos(\theta/2)|^n$. Pour $\theta = \pi$, on obtient
 $E(e^{i\pi} X) = 0$, car $\cos(\pi/2) = 0$ et $n \geq 1$. Or $\cos(\pi X)$ est la partie réelle de

$e^{i\pi X}$, donc $E(\cos(\pi X)) = \operatorname{Re}(E(e^{i\pi X})) = 0$. Ainsi $E(\cos(\pi X)) = 0$. De plus, $\cos(\pi X) = (-1)^X$ vaut 1 si X est pair et -1 sinon. Donc $P(X \text{ pair}) - P(X \text{ impair}) = 0$. Autrement dit, $P(X \text{ pair}) = \frac{1}{2}$.

3. On note $\omega = e^{2i\pi k/n}$. Par transfert, $E(Z^k) = \frac{1}{n} \sum_{u=0}^{n-1} \omega^u$. Si n divise k , alors $\omega = 1$ et la somme vaut n . Sinon, $\omega \neq 1$ et la somme géométrique vaut $\frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0$, car $\omega^n = e^{2i\pi k} = 1$. Donc $E(Z^k) = 1$ si $n \mid k$ et $E(Z^k) = 0$ sinon. En particulier, comme $n \geq 2$, $E(Z) = 0$. Or $|Z| = 1$, donc $E(|Z|) = 1$. L'inégalité $|E(Z)| \leq E(|Z|)$ est ici stricte : $0 < 1$.

Corrigé de l'exercice 7 : Formule de transfert et inverse d'une binomiale

1. Pour $0 \leq k \leq n$, on a $(n+1) - (k+1) = n - k$. Donc

$$\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}.$$

L'identité est démontrée.

2. Par la formule de transfert, puis la question 1, et enfin avec $j = k + 1$:

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1}{(n+1)p} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} p^{k+1} q^{n-k} = \frac{1}{(n+1)p} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} p^j q^{n+1-j}.$$

La dernière somme est le binôme $(p+q)^{n+1} = 1$ privé de son terme $j = 0$, qui vaut q^{n+1} . Donc $E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1 - q^{n+1}}{(n+1)p}$.

3. Pour $n = 1$, X vaut 0 avec probabilité q et 1 avec probabilité p . Directement,

$$\frac{E\left(\frac{1}{X+1}\right)}{\frac{1-q^2}{2p}} = \frac{q + \frac{p}{2}}{\frac{(1-q)(1+q)}{2p}} = \frac{1+q}{2} = \frac{2-p}{2}. \text{ Les deux valent } 1 - \frac{p}{2}.$$

4. Pour $n = 2$ et $p = \frac{1}{2}$, la formule donne $\frac{1 - 1/8}{3/2} = \frac{7/8}{3/2} = \frac{7}{12}$. On le vérifie :

$$\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{12}. \text{ En revanche, } E(X) = 1, \text{ donc } \frac{1}{E(X)+1} = \frac{1}{2}. \text{ On a } E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{7}{12} > \frac{1}{2} = \frac{1}{E(X)+1}.$$

Corrigé de l'exercice 8 : Espérance à l'aide des probabilités $P(X \geq k)$

1. Pour $1 \leq k \leq n$, on a $P(X \geq k) = \sum_{j=k}^n P(X = j)$. On échange ensuite les deux sommes finies :

$$\sum_{k=1}^n P(X \geq k) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j P(X = j) = \sum_{j=1}^n j P(X = j).$$

Le terme $j = 0$ de l'espérance est nul. **Donc** $E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$.

2. Notons D_1 et D_2 les deux dés. L'événement $\{M \leq k\}$ est $\{D_1 \leq k\} \cap \{D_2 \leq k\}$. Par indépendance, $P(M \leq k) = \frac{k^2}{36}$. Ensuite,

$$P(M \geq k) = 1 - P(M \leq k-1) = 1 - \frac{(k-1)^2}{36}. \text{ Donc}$$

$$E(M) = \sum_{k=1}^6 \left(1 - \frac{(k-1)^2}{36}\right) = 6 - \frac{0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25}{36} = 6 - \frac{55}{36}.$$

Ainsi $E(M) = \frac{161}{36} \approx 4,47$.

3. Pour $1 \leq k \leq 6$, on a $P(M = k) = P(M \leq k) - P(M \leq k-1) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{36}$.

Donc $P(M = k) = \frac{2k-1}{36}$. On vérifie : $\sum_{k=1}^6 k(2k-1) = 2 \times 91 - 21 = 161$. On

retrouve bien $E(M) = \frac{161}{36}$.

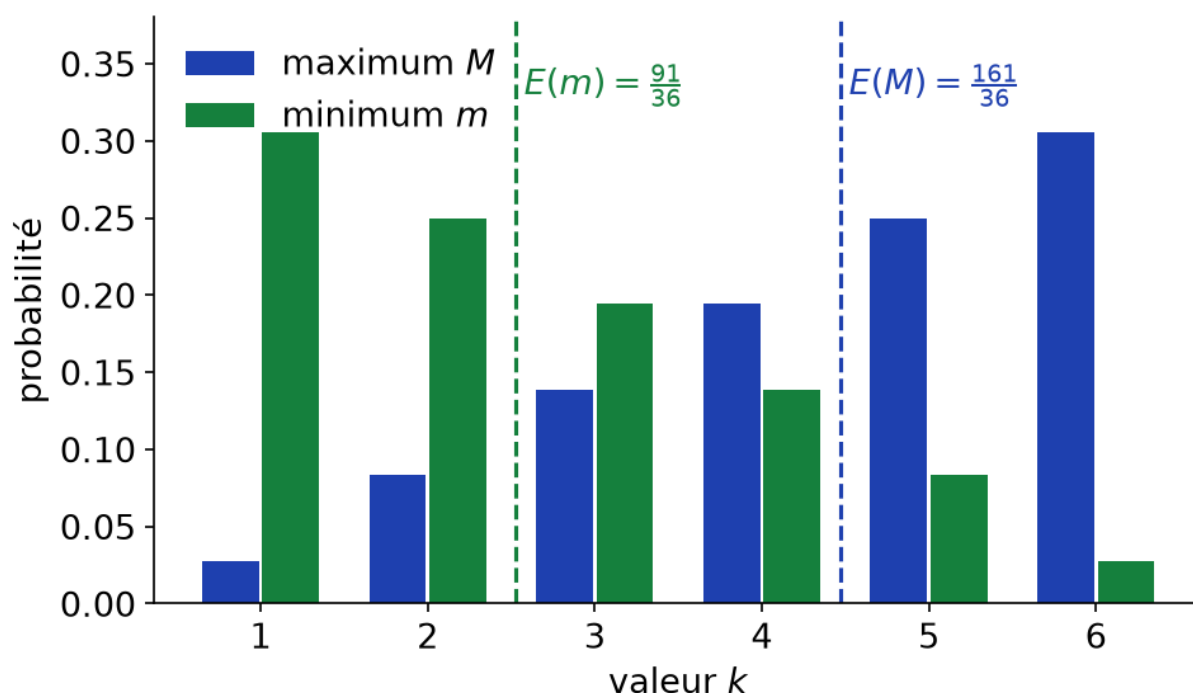
4. De même, $\{m \geq k\} = \{D_1 \geq k\} \cap \{D_2 \geq k\}$, donc $P(m \geq k) = \frac{(7-k)^2}{36}$. Par la question 1 :

$$E(m) = \frac{36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1}{36} = \frac{91}{36}.$$

Donc $E(m) = \frac{91}{36} \approx 2,53$. Contrôle : $M + m = D_1 + D_2$, donc

$E(M) + E(m) = 7$. Or $\frac{161 + 91}{36} = \frac{252}{36} = 7$. La figure ci-dessous montre les deux lois :

elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à $\frac{7}{2}$.



Corrigé de l'exercice 9 : Covariance nulle sans indépendance

- Par symétrie, $E(X) = \frac{-1+0+1}{3} = 0$. Ensuite, Y suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(X \neq 0) = \frac{2}{3}$, donc $E(Y) = \frac{2}{3}$. De plus, $XY = X^3 = X$, car $X \in \{-1, 0, 1\}$. Donc $E(XY) = 0$. Ainsi $\text{Cov}(X, Y) = 0 - 0 \times \frac{2}{3} = 0$.
- On a $P(X = 0, Y = 1) = 0$, car $X = 0$ impose $Y = 0$. Cependant, $P(X = 0)P(Y = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \neq 0$. **Les variables X et Y ne sont pas indépendantes, bien que décorrélées.**
- D'abord, $V(X) = E(X^2) = \frac{2}{3}$ et $V(Y) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$. Comme la covariance est nulle, $V(X + Y) = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$. Vérifions avec la loi. Si $X = -1$ ou $X = 0$, alors $X + Y = 0$; si $X = 1$, alors $X + Y = 2$. Donc $X + Y = 2B$, avec $B \sim \mathcal{B}(\frac{1}{3})$. Ainsi $V(X + Y) = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$. **Les deux méthodes donnent $V(X + Y) = \frac{8}{9}$.**

Corrigé de l'exercice 10 : Couple défini par un tableau

1. On somme les lignes, puis les colonnes. **On obtient** $P(X = 0) = 0,3$, $P(X = 1) = 0,3$, $P(X = 2) = 0,4$, **puis** $P(Y = 0) = 0,6$ **et** $P(Y = 1) = 0,4$.

2. On calcule $E(X) = 0,3 + 0,8 = 1,1$ et $E(X^2) = 0,3 + 1,6 = 1,9$. Donc $V(X) = 1,9 - 1,21$. Ensuite, $Y \sim \mathcal{B}(0,4)$. **Ainsi** $E(X) = 1,1$, $V(X) = 0,69$, $E(Y) = 0,4$ **et** $V(Y) = 0,24$.

3. Par transfert, seuls les termes où $xy \neq 0$ comptent :

$$E(XY) = 1 \times 1 \times 0,1 + 2 \times 1 \times 0,1 = 0,3 \text{ . Donc}$$

$\text{Cov}(X, Y) = 0,3 - 1,1 \times 0,4 = -0,14$. **La covariance vaut** $-0,14$. **Elle est non nulle, donc** X **et** Y **ne sont pas indépendantes.**

4. Par bilinéarité de la covariance :

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= 0,69 + 0,24 - 0,28 = 0,65, \\ V(X - Y) &= 0,69 + 0,24 + 0,28 = 1,21, \\ V(2X - 3Y) &= 4 \times 0,69 + 9 \times 0,24 - 12 \times (-0,14) = 6,6. \end{aligned}$$

Vérifions la première valeur. La variable $S = X + Y$ vaut 0 avec probabilité 0,1, 1 avec probabilité $0,2 + 0,2 = 0,4$, 2 avec probabilité $0,1 + 0,3 = 0,4$ et 3 avec probabilité 0,1. Ainsi $E(S) = 1,5$ et $E(S^2) = 0,4 + 1,6 + 0,9 = 2,9$. **On retrouve** $V(X + Y) = 2,9 - 2,25 = 0,65$; **de plus** $V(X - Y) = 1,21$ **et** $V(2X - 3Y) = 6,6$.

Corrigé de l'exercice 11 : Espérance et variance d'un produit indépendant

1. Les variables X et Y sont indépendantes. D'après le lemme des coalitions, X^2 et Y^2 le sont aussi. Donc $E(X^2Y^2) = E(X^2)E(Y^2)$ et $E(XY) = E(X)E(Y)$. On écrit $E(X^2) = V(X) + E(X)^2$, et de même pour Y . En développant :

$$V(XY) = (V(X) + E(X)^2)(V(Y) + E(Y)^2) - E(X)^2E(Y)^2.$$

Après simplification, $V(XY) = V(X)V(Y) + V(X)E(Y)^2 + V(Y)E(X)^2$.

2. Le produit XY prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$. Par indépendance,
 $P(XY = 1) = P(X = 1)P(Y = 1) = pp'$. **Donc** $XY \sim \mathcal{B}(pp')$ et
 $V(XY) = pp'(1 - pp')$. Avec $q = 1 - p$ et $q' = 1 - p'$, la formule donne
 $pqp'q' + pqp'^2 + p'q'p^2 = pp'(q(q' + p') + q'p)$. Cette quantité vaut
 $pp'(q + q'p) = pp'(1 - pp')$. On retrouve bien le résultat.

3. Par indépendance, $E(XY) = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$. Ensuite, avec $V(X) = V(Y) = \frac{35}{12}$:

$$V(XY) = \frac{1225}{144} + 2 \cdot \frac{35}{12} \cdot \frac{49}{4} = \frac{1225 + 10290}{144}.$$

Donc $E(XY) = \frac{49}{4}$ et $V(XY) = \frac{11515}{144} \approx 79,97$. Contrôle :
 $E(X^2)^2 - E(XY)^2 = \frac{8281}{36} - \frac{2401}{16} = \frac{33124 - 21609}{144}$, ce qui redonne $\frac{11515}{144}$.

4. Prenons $Y = X$ avec $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$. Alors $XY = X^2 = X$, donc $V(XY) = \frac{1}{4}$. La
 formule donnerait $\frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$. **La formule est fautive sans indépendance.**

Corrigé de l'exercice 12 : Points fixes d'une permutation aléatoire

1. On note $A_i = \{\sigma(i) = i\}$. Alors $N = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$. Les permutations qui fixent i
 correspondent aux permutations des $n - 1$ autres éléments. Elles sont $(n-1)!$ parmi $n!$,
 donc $P(A_i) = \frac{1}{n}$. Par linéarité, $E(N) = n \cdot \frac{1}{n}$. **Donc** $E(N) = 1$.

2. De même, les permutations qui fixent i et j sont au nombre de $(n-2)!$. Ainsi,
 $P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{n(n-1)}$. Comme $1_{A_i} 1_{A_j} = 1_{A_i \cap A_j}$:

$$\text{Cov}(1_{A_i}, 1_{A_j}) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{n - (n-1)}{n^2(n-1)}.$$

Cette covariance vaut $\frac{1}{n^2(n-1)}$.

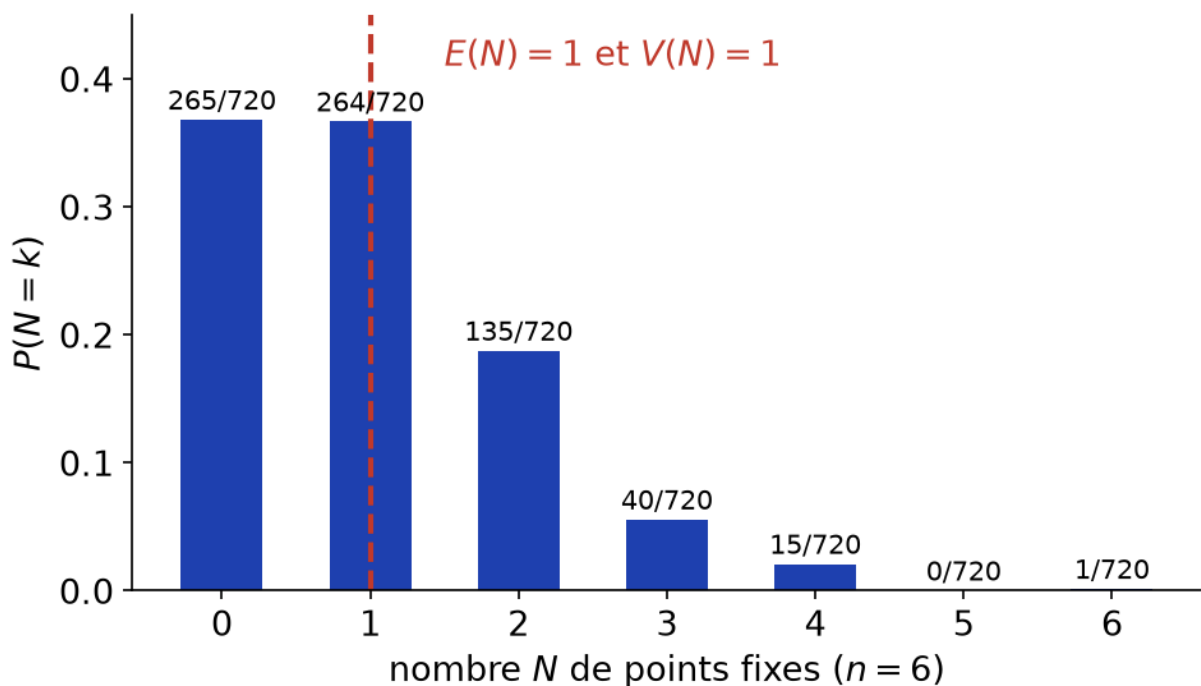
3. Par la formule de la variance d'une somme, avec $n(n-1)$ couples ordonnés (i, j) , $i \neq j$:

$$V(N) = n \cdot \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + n(n-1) \cdot \frac{1}{n^2(n-1)} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}.$$

Donc $V(N) = 1$, quel que soit $n \geq 2$.

4. La variable N est positive. Par l'inégalité de Markov, $P(N \geq 3) \leq \frac{E(N)}{3} = \frac{1}{3}$. Ensuite, $N \geq 3$ implique $N - 1 \geq 2$, donc $\{N \geq 3\} \subset \{|N - 1| \geq 2\}$. Par Bienaymé-Tchebychev, $P(N \geq 3) \leq \frac{V(N)}{4} = \frac{1}{4}$. **La borne de Bienaymé-Tchebychev, $\frac{1}{4}$, est meilleure que celle de Markov, $\frac{1}{3}$.**

La figure ci-dessous donne la loi exacte de N pour $n = 6$, obtenue en énumérant les 720 permutations. On y lit $P(N \geq 3) = \frac{56}{720} \approx 0,078$, bien sous les deux bornes. On note aussi que $P(N = 5) = 0$: une permutation qui fixe 5 éléments fixe forcément le sixième.



Corrigé de l'exercice 13 : Tirages sans remise et loi hypergéométrique

1. L'univers Ω est l'ensemble des n -uplets de boules distinctes, muni de la probabilité uniforme. Son cardinal est $A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!}$. Pour réaliser B_k , on choisit la k -ième boule parmi les b blanches, puis les $n-1$ autres parmi les $N-1$ restantes, dans l'ordre. D'où $|B_k| = b A_{N-1}^{n-1}$. Or $A_N^n = N A_{N-1}^{n-1}$. Donc $P(B_k) = \frac{b}{N}$, quel que soit le rang k .

2. On a $X = \sum_{k=1}^n 1_{B_k}$. Par linéarité, $E(X) = \frac{nb}{N}$.

3. Pour $k \neq l$, on choisit de même les boules des rangs k et l parmi les blanches, puis les autres. Ainsi $|B_k \cap B_l| = b(b-1)A_{N-2}^{n-2}$ et $A_N^n = N(N-1)A_{N-2}^{n-2}$. Donc $P(B_k \cap B_l) = \frac{b(b-1)}{N(N-1)}$. Ensuite :

$$\text{Cov}(1_{B_k}, 1_{B_l}) = \frac{b(b-1)}{N(N-1)} - \frac{b^2}{N^2} = \frac{b(N(b-1) - b(N-1))}{N^2(N-1)} = \frac{b(b-N)}{N^2(N-1)}.$$

La covariance vaut $-\frac{b(N-b)}{N^2(N-1)}$: elle est négative.

4. Chaque 1_{B_k} a pour variance $\frac{b}{N}(1 - \frac{b}{N}) = \frac{b(N-b)}{N^2}$. Avec $n(n-1)$ couples ordonnés :

$$V(X) = \frac{nb(N-b)}{N^2} - \frac{n(n-1)b(N-b)}{N^2(N-1)} = \frac{nb(N-b)}{N^2} \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right).$$

Or $1 - \frac{n-1}{N-1} = \frac{N-n}{N-1}$. On obtient $V(X) = n \frac{b}{N} (1 - \frac{b}{N}) \frac{N-n}{N-1}$.

5. Avec $N = 10$, $b = 4$ et $n = 5$, on trouve $E(X) = 2$ et $V(X) = 5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{2}{3}$. Avec remise, le nombre de blanches suivrait la loi $\mathcal{B}(5; 0,4)$, d'espérance 2 et de variance 1,2. Les espérances sont égales ; sans remise, la variance $\frac{2}{3}$ est plus petite que $\frac{6}{5}$. En effet, le facteur $\frac{N-n}{N-1} = \frac{5}{9}$ traduit la corrélation négative des tirages.

Corrigé de l'exercice 14 : Urnes vides

1. Soit E_j l'événement « l'urne j est vide ». Chaque boule évite l'urne j avec probabilité $1 - \frac{1}{r}$, et les boules sont placées indépendamment. Donc $P(E_j) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n = a$. Comme

$V = \sum_{j=1}^r 1_{E_j}$, la linéarité donne $E(V) = ra$. **Donc** $E(V) = r(1 - \frac{1}{r})^n$, et le nombre d'urnes occupées a pour espérance $r - r(1 - \frac{1}{r})^n$.

2. Pour $j \neq k$, chaque boule évite les deux urnes avec probabilité $1 - \frac{2}{r}$. Donc $P(E_j \cap E_k) = b$ et $\text{Cov}(1_{E_j}, 1_{E_k}) = b - a^2$. Par ailleurs, $V(1_{E_j}) = a(1-a)$. Il y a $r(r-1)$ couples ordonnés (j, k) avec $j \neq k$. **Donc**
 $V(V) = ra(1-a) + r(r-1)(b - a^2)$.

3. Pour $n = r = 4$: $a = \frac{81}{256}$ et $b = \frac{1}{16} = \frac{16}{256}$. D'abord, $E(V) = 4 \cdot \frac{81}{256} = \frac{81}{64}$. Ensuite :

$$V(V) = 4 \cdot \frac{81}{256} \cdot \frac{175}{256} + 12 \left(\frac{4096 - 6561}{65536} \right) = \frac{56700 - 29580}{65536} = \frac{27120}{65536}.$$

Donc $E(V) = \frac{81}{64} \approx 1,27$ et $V(V) = \frac{1695}{4096} \approx 0,41$.

4. Il y a $4^4 = 256$ répartitions équiprobables. On compte les cas :
- $V = 3$: toutes les boules dans une même urne, soit 4 cas ;
 - $V = 2$: on choisit 2 urnes, puis une répartition qui les remplit toutes deux, soit $6 \times (2^4 - 2) = 84$ cas ;
 - $V = 0$: une boule par urne, soit $4! = 24$ cas ;
 - $V = 1$: le reste, soit $256 - 4 - 84 - 24 = 144$ cas.

Ainsi $E(V) = \frac{144 + 168 + 12}{256} = \frac{324}{256} = \frac{81}{64}$. Ensuite,
 $E(V^2) = \frac{144 + 336 + 36}{256} = \frac{8256}{4096}$. Donc $V(V) = \frac{8256 - 6561}{4096}$. La loi
 $(\frac{24}{256}, \frac{144}{256}, \frac{84}{256}, \frac{4}{256})$ confirme $E(V) = \frac{81}{64}$ et $V(V) = \frac{1695}{4096}$.

Corrigé de l'exercice 15 : Nombre de changements dans une suite de lancers

1. L'événement $\{C_i = 1\}$ est la réunion disjointe de $\{X_i = 1, X_{i+1} = 0\}$ et de $\{X_i = 0, X_{i+1} = 1\}$. Par indépendance, $P(C_i = 1) = pq + qp = 2pq$. Comme

$$C = \sum_{i=1}^{n-1} C_i, \text{ on obtient } E(C) = 2(n-1)pq.$$

- La variable C_i est une fonction de (X_i, X_{i+1}) , et C_j une fonction de (X_j, X_{j+1}) . Si $|i - j| \geq 2$, les ensembles d'indices $\{i, i+1\}$ et $\{j, j+1\}$ sont disjoints. **Par le lemme des coalitions, C_i et C_j sont indépendantes, donc décorrélées.**
- On a $C_i C_{i+1} = 1$ si et seulement si $X_i \neq X_{i+1}$ et $X_{i+1} \neq X_{i+2}$. Les triplets possibles sont $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 0)$. Donc
 $E(C_i C_{i+1}) = p^2 q + q^2 p = pq(p + q) = pq$. Ainsi
 $\text{Cov}(C_i, C_{i+1}) = pq - 4p^2 q^2 = pq(1 - 4pq)$.
- Chaque C_i suit la loi $\mathcal{B}(2pq)$, donc $V(C_i) = 2pq(1 - 2pq)$. Dans la somme des covariances, seuls les couples $i < j$ avec $j = i + 1$ comptent, d'après la question 2. Il y en a $n - 2$. **Par conséquent** $V(C) = 2(n-1)pq(1 - 2pq) + 2(n-2)pq(1 - 4pq)$.
- Pour $p = \frac{1}{2}$, $pq = \frac{1}{4}$: la covariance est nulle et $V(C_i) = \frac{1}{4}$. Avec $n - 1 = 100$, on trouve $E(C) = 50$ et $V(C) = 25$. Par Bienaymé-Tchebychev,
 $P(|C - 50| \geq 10) \leq \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Corrigé de l'exercice 16 : Inégalité de Markov et somme de dés

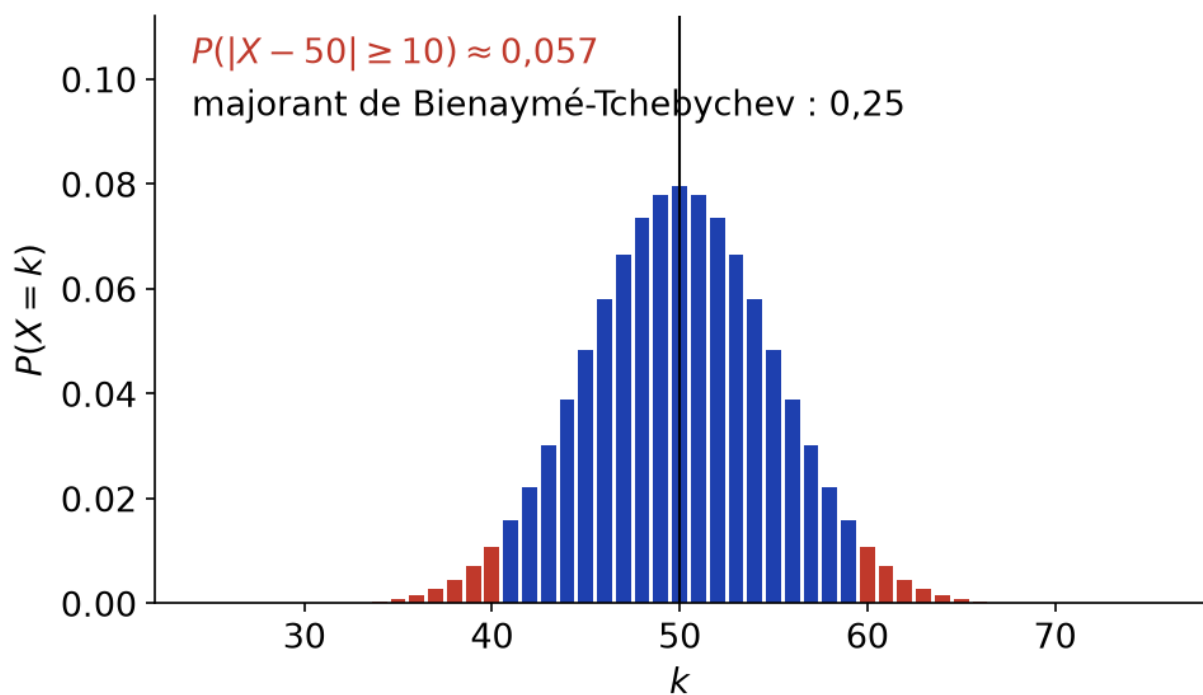
- On a $S = D_1 + D_2$ avec D_1, D_2 indépendants de loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$. Par linéarité, $E(S) = 7$. Par indépendance, $V(S) = 2 \times \frac{35}{12}$. **Donc $E(S) = 7$ et $V(S) = \frac{35}{6}$.**
- La variable S est positive. Par Markov, $P(S \geq 10) \leq \frac{7}{10}$. Ensuite, $S \geq 10$ implique $|S - 7| \geq 3$. Par Bienaymé-Tchebychev, $P(S \geq 10) \leq \frac{35/6}{9} = \frac{35}{54} \approx 0,65$. Enfin, les couples qui donnent $S \geq 10$ sont $(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$, $(5, 6)$, $(6, 5)$ et $(6, 6)$. **La valeur exacte vaut $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,17$, loin des bornes $0,7$ et $0,65$.** On peut d'ailleurs améliorer la seconde borne. En effet, la loi de S est symétrique par rapport à 7 , donc
 $P(S \geq 10) = \frac{1}{2}P(|S - 7| \geq 3) \leq \frac{35}{108} \approx 0,32$.
- Comme $0 < m \leq a$, le nombre $\frac{m}{a}$ est dans $]0, 1]$. On définit X par $P(X = a) = \frac{m}{a}$ et $P(X = 0) = 1 - \frac{m}{a}$. Alors $X \geq 0$ et $E(X) = a \cdot \frac{m}{a} = m$. De plus,
 $P(X \geq a) = \frac{m}{a} = \frac{E(X)}{a}$. **L'inégalité de Markov est une égalité pour cette variable :**

on ne peut pas l'améliorer sans autre information sur la loi.

Corrigé de l'exercice 17 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour une binomiale

1. Les lancers sont indépendants et chacun donne pile avec probabilité $\frac{1}{2}$. **Donc** $X \sim \mathcal{B}(100, \frac{1}{2})$, avec $E(X) = 50$ et $V(X) = 25$.
2. Par Bienaymé-Tchebychev, $P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{25}{10^2} = \frac{1}{4}$. Or $\{40 < X < 60\} = \{|X - 50| < 10\}$ est l'événement contraire. **Donc** $P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{1}{4}$ **et** $P(40 < X < 60) \geq \frac{3}{4}$.
3. On veut $\frac{25}{t^2} \leq 0,05$, c'est-à-dire $t^2 \geq 500$. Or $22^2 = 484$ et $23^2 = 529$. **Le plus petit entier convenable est** $t = 23$.
4. Par Markov, $P(X \geq 60) \leq \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$. Ensuite, $100 - X$ compte les faces et suit la même loi que X . Donc $P(X \geq 60) = P(100 - X \geq 60) = P(X \leq 40)$. Ces deux événements disjoints ont pour réunion $\{|X - 50| \geq 10\}$. Ainsi $2P(X \geq 60) \leq \frac{1}{4}$. **On obtient** $P(X \geq 60) \leq \frac{1}{8}$, **bien meilleur que** $\frac{5}{6}$.

La figure ci-dessous montre la loi de X . Les valeurs en rouge forment l'événement $\{|X - 50| \geq 10\}$. Sa probabilité exacte, environ $0,057$, reste loin du majorant $0,25$. De même, $P(X \geq 60) \approx 0,028$.



Corrigé de l'exercice 18 : Taille d'un sondage

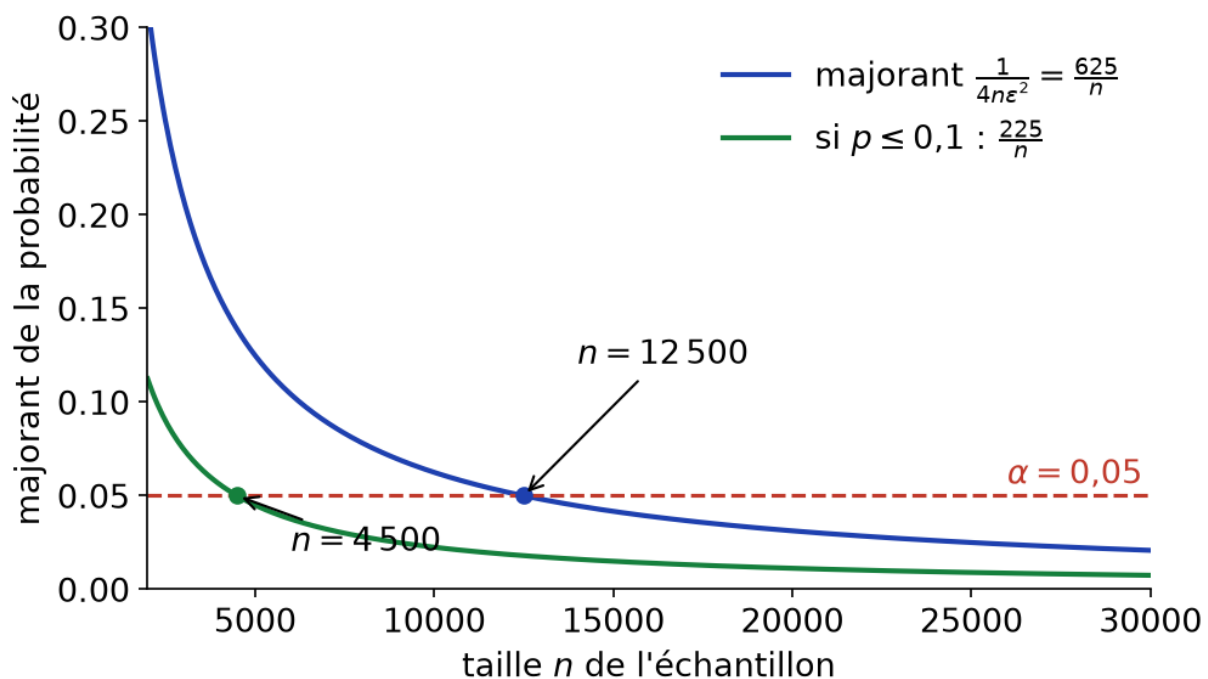
1. Par linéarité, $E(F_n) = p$. Les X_i sont indépendantes, donc

$$V(F_n) = \frac{1}{n^2} \cdot np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}. \text{ Or } p(1-p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}. \text{ Donc } E(F_n) = p \text{ et } V(F_n) \leq \frac{1}{4n}.$$

2. Par Bienaymé-Tchebychev et la question 1, $P(|F_n - p| \geq 0,02) \leq \frac{1}{4n \times 0,0004} = \frac{625}{n}$. Cette borne est au plus 0,05 si et seulement si $n \geq 12\,500$. **Interroger 12 500 personnes suffit.**

3. Avec $\varepsilon = 0,01$, la borne devient $\frac{2500}{n}$, et il faut $n \geq 50\,000$. **Diviser la précision par 2 multiplie la taille suffisante par 4.** En effet, cette taille est proportionnelle à $\frac{1}{\varepsilon^2}$.

4. La fonction $p \rightarrow p(1-p)$ est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$. Donc, si $p \leq 0,1$, $p(1-p) \leq 0,09$. La borne devient $\frac{0,09}{n \times 0,0004} = \frac{225}{n}$. **Il suffit alors de $n \geq 4\,500$.** La figure ci-dessous compare les deux majorants et leur seuil commun 0,05.



Corrigé de l'exercice 19 : Moyenne de lancers de dés

- Les résultats $D_1, \dots, D_n$ sont indépendants, d'espérance $\frac{7}{2}$ et de variance $\frac{35}{12}$. Par linéarité, $E(M_n) = \frac{7}{2}$. Par indépendance, $V(M_n) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \frac{35}{12}$. **Donc** $E(M_n) = \frac{7}{2}$ et $V(M_n) = \frac{35}{12n}$.
- Par Bienaymé-Tchebychev, $P(|M_n - 3,5| \geq 0,1) \leq \frac{35}{12n \times 0,01}$. On impose que cette borne soit au plus 0,05, soit $n \geq \frac{35}{0,006} \approx 5833,3$. **Il suffit de 5 834 lancers.**
- La fréquence F_n est la moyenne de n Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{6}$. Donc $V(F_n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36n}$. On impose $\frac{5}{36n \times 10^{-4}} \leq 0,1$, soit $n \geq \frac{5}{36 \times 10^{-5}} \approx 13\,888,9$. **Il suffit de 13 889 lancers.**
- Pour tout $\epsilon > 0$, $0 \leq P(|M_n - 3,5| \geq \epsilon) \leq \frac{35}{12n\epsilon^2}$. Le majorant tend vers 0. **Par encadrement, la probabilité tend vers 0 : c'est la loi faible des grands nombres pour les dés.**

Corrigé de l'exercice 20 : Variance nulle et meilleure approximation par une constante

1. Par transfert, $V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - m)^2 P(X = x)$. C'est une somme de termes positifs. Elle est nulle si et seulement si chaque terme est nul, c'est-à-dire $P(X = x) = 0$ pour tout $x \neq m$. Cela équivaut à $P(X = m) = 1$. **Donc $V(X) = 0$ si et seulement si X est presque sûrement égale à m .**
2. De même, $E(X) = \sum_x x P(X = x)$ est une somme de termes positifs, car $X \geq 0$. Si elle est nulle, alors $P(X = x) = 0$ pour tout $x > 0$. **Donc $P(X = 0) = 1$.**
3. On écrit $X - a = (X - m) + (m - a)$. En développant, puis par linéarité :
$$g(a) = V(X) + 2(m - a)E(X - m) + (m - a)^2 = V(X) + (m - a)^2,$$
car $E(X - m) = 0$. **Ainsi g atteint son minimum $V(X)$ en $a = m$, et seulement en ce point.**
4. On pose $c = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Comme $\alpha \leq X \leq \beta$, on a $|X - c| \leq \frac{\beta - \alpha}{2}$. Par la question 3 et la croissance de l'espérance, $V(X) = g(m) \leq g(c) \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{4}$. **Donc $V(X) \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{4}$.** Il y a égalité si X vaut α et β avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacune. En effet, dans ce cas $m = c$ et $(X - c)^2 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{4}$. Par exemple, une Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ a pour variance $\frac{1}{4}$.

Corrigé de l'exercice 21 : Coefficient de corrélation et régression linéaire

1. Par bilinéarité, $h(\lambda) = V(Y - \lambda X) = V(Y) - 2\lambda \text{Cov}(X, Y) + \lambda^2 V(X)$. C'est un trinôme du second degré, car $V(X) > 0$. Il est positif pour tout réel λ , donc son discriminant est négatif ou nul : $4 \text{Cov}(X, Y)^2 - 4V(X)V(Y) \leq 0$. **Donc $\text{Cov}(X, Y)^2 \leq V(X)V(Y)$.**
2. En prenant la racine carrée, $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$, donc $|\rho| \leq 1$. Supposons

$|\rho| = 1$. Le discriminant est nul, donc h s'annule en $\lambda_0 = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)}$. D'après l'exercice 20, $Y - \lambda_0 X$ est presque sûrement égale à sa moyenne b . Donc

$P(Y = \lambda_0 X + b) = 1$. Réciproquement, supposons $P(Y = aX + b) = 1$. Alors Y et $aX + b$ ont les mêmes moments, car les formules de transfert ne diffèrent que sur un événement de probabilité nulle. Ainsi $\text{Cov}(X, Y) = aV(X)$ et $V(Y) = a^2V(X)$, avec $a \neq 0$ car $V(Y) > 0$. Donc $\rho = \frac{aV(X)}{|a|V(X)} = \pm 1$. **On a $|\rho| \leq 1$, avec égalité si et seulement si $Y = aX + b$ presque sûrement.**

3. Fixons a et posons $W = Y - aX$. D'après l'exercice 20,

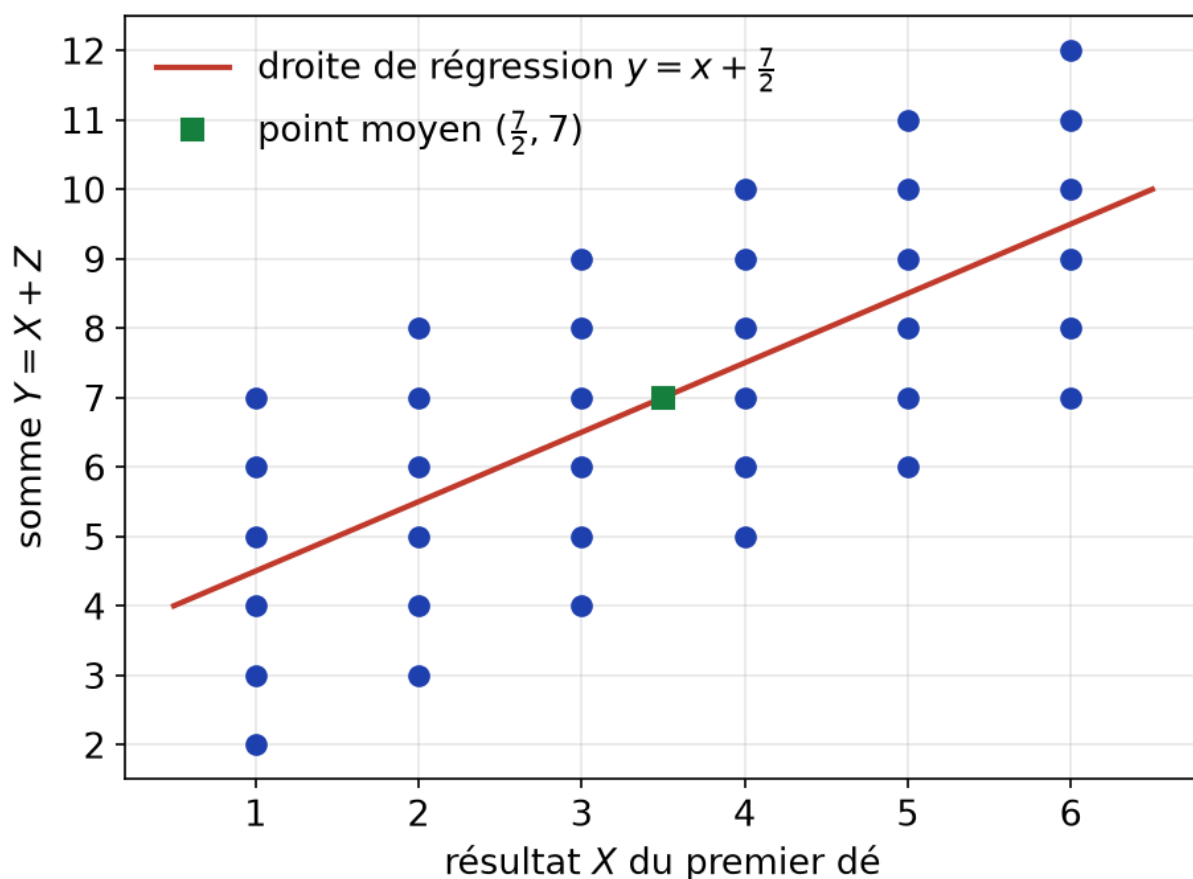
$\varphi(a, b) = E((W - b)^2) = V(W) + (E(W) - b)^2$. Donc $\varphi(a, b) \geq h(a)$, avec égalité si et seulement si $b = E(Y) - aE(X)$. Ensuite, le trinôme h atteint son minimum en un unique point $a_0 = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)}$. Ce minimum vaut

$$h(a_0) = V(Y) - \frac{\text{Cov}(X, Y)^2}{V(X)} = V(Y)(1 - \rho^2).$$

Le minimum de φ est atteint au seul couple $a_0 = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)}$, $b_0 = E(Y) - a_0 E(X)$, et il vaut $V(Y)(1 - \rho^2)$.

4. Par bilinéarité et indépendance, $\text{Cov}(X, Y) = V(X) + \text{Cov}(X, Z) = \frac{35}{12}$. De plus,

$V(Y) = \frac{35}{6}$. Donc $\rho = \frac{35/12}{\sqrt{(35/12)(35/6)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ensuite, $a_0 = 1$ et $b_0 = 7 - \frac{7}{2}$. Enfin, le minimum vaut $\frac{35}{6}(1 - \frac{1}{2})$. **On obtient $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_0 = 1$, $b_0 = \frac{7}{2}$ et un minimum égal à $\frac{35}{12}$.** Ce minimum est $V(Z)$: la meilleure prévision affine de la somme remplace le second dé par sa moyenne. La figure ci-dessous montre les 36 couples équiprobables et la droite $y = x + \frac{7}{2}$.



Corrigé de l'exercice 22 : Problème : polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass

- La variable S_n prend la valeur $k \in \{0, \dots, n\}$ avec probabilité $\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, avec la convention $0^0 = 1$ pour $x \in \{0, 1\}$. La formule de transfert donne alors l'expression demandée. **Chaque terme est un polynôme en x de degré au plus n , donc $B_n(f)$ est une fonction polynomiale.**
- Pour $f = 1$, $B_n(f)(x) = E(1) = 1$. Pour $f(t) = t$, $B_n(f)(x) = \frac{E(S_n)}{n} = x$.
Pour $f(t) = t^2$, on utilise König-Huygens :
 $E(S_n^2) = V(S_n) + E(S_n)^2 = nx(1-x) + n^2x^2$. **Donc $B_n(1) = 1$,**
 $B_n(t) = x$ et $B_n(t^2) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$.
- La variance de $|Y|$ est positive, et $|Y|^2 = Y^2$. Donc $0 \leq V(|Y|) = E(Y^2) - E(|Y|)^2$.
Comme $E(|Y|) \geq 0$, on obtient $E(|Y|) \leq \sqrt{E(Y^2)}$.

4. Par linéarité, $B_n(f)(x) - f(x) = E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right)$. Ensuite, on utilise successivement l'inégalité triangulaire, le caractère lipschitzien de f et la question 3 :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq K E\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right|\right) \leq K \sqrt{V\left(\frac{S_n}{n}\right)} = K \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}.$$

En effet, $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = x$. Enfin, $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. **Donc** $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{K}{2\sqrt{n}}$ pour tout $x \in [0, 1]$.

5. La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$. Par le théorème de Heine, elle y est uniformément continue. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $|s - t| < \delta$ implique $|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$. Notons $A = \left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right\}$. En tout point de Ω , on a

$$\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon + 2\|f\|_{\infty} 1_A.$$

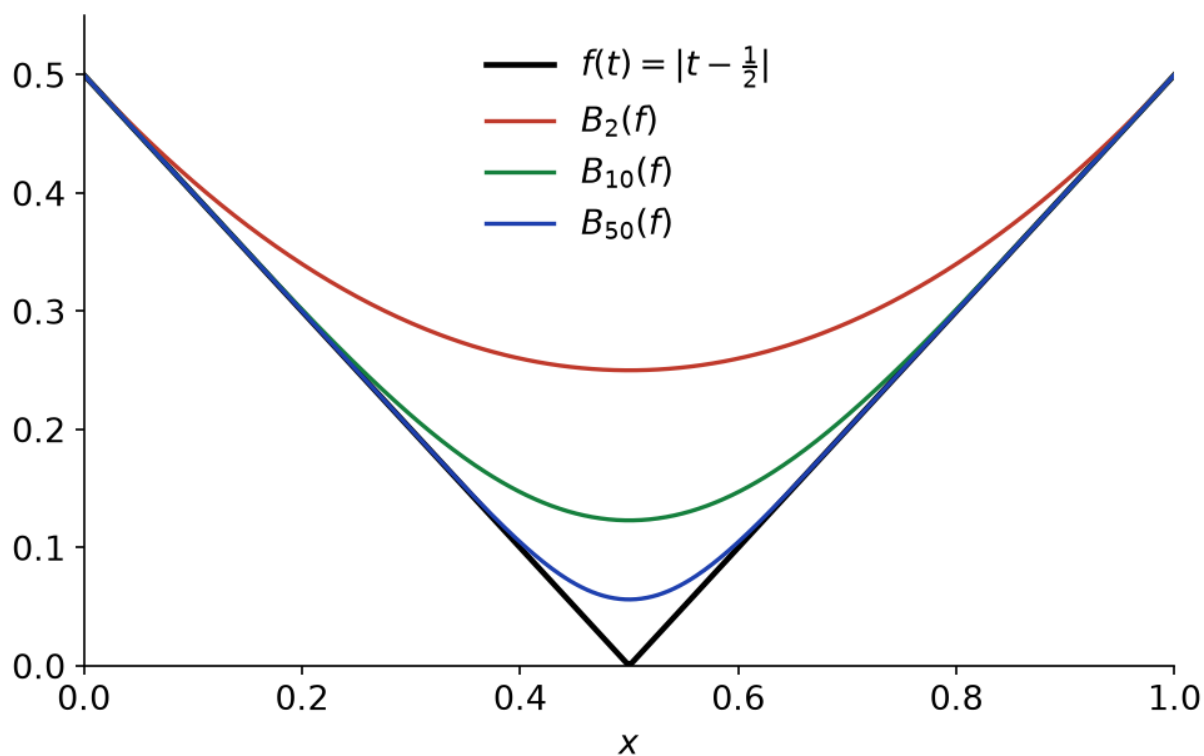
En effet, hors de A , le membre de gauche est au plus ε ; sur A , il est au plus $2\|f\|_{\infty}$. Par croissance de l'espérance, $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_{\infty} P(A)$. Or Bienaymé-Tchebychev donne $P(A) \leq \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$. **Ainsi** $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_{\infty}}{2n\delta^2}$. Ce majorant ne dépend pas de x , car δ n'en dépend pas. Pour $n \geq \frac{\|f\|_{\infty}}{2\varepsilon\delta^2}$, on a donc $\sup_{x \in [0, 1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$. **Par conséquent,** $\sup_{x \in [0, 1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \rightarrow 0$.

6. Avec $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$:

$$B_2(f)(x) = \frac{1}{2}(1-x)^2 + 2x(1-x) \times 0 + \frac{1}{2}x^2 = x^2 - x + \frac{1}{2}.$$

Donc $B_2(f)(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$. En $x = \frac{1}{2}$, $B_2(f)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, donc l'écart avec $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ vaut $\frac{1}{4}$. Or f est 1-lipschitzienne, par l'inégalité triangulaire renversée. La question 4 donne donc la borne $\frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0,354$. **On vérifie bien** $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$. La figure ci-dessous montre $B_2(f)$, $B_{10}(f)$ et $B_{50}(f)$: l'écart maximal, atteint en $\frac{1}{2}$, diminue lentement.

Point de méthode : on vient de démontrer le théorème de Weierstrass sur $[0, 1]$, étudié plus en détail en seconde année. L'idée clé consiste à couper selon que $\frac{S_n}{n}$ est proche de x ou non, puis à contrôler le second cas par Bienaymé-Tchebychev.



[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [espérance et variance, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur espérance et variance](#)
- À maîtriser avant : [Probabilités sur un univers fini et variables aléatoires](#)
- Chapitre précédent : [Probabilités sur un univers fini et variables aléatoires](#)
- Chapitre suivant : [Espaces préhilbertiens réels](#)
- Le même thème en maths spé : [espérance et variance, exercices de maths spé](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)

- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)