

Espaces vectoriels normés

Exercice 1 : Vérifier qu'une application est une norme

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on considère les quatre applications suivantes :

$$N_1(x, y) = |x| + 2|y|, \quad N_2(x, y) = \max(|x + y|, |x - y|), \quad N_3(x, y) = |x - y|, \quad N_4(x, y) = |2x + y| + |x - y|.$$

1. Montrer que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que, pour tous réels a et b , $\max(|a + b|, |a - b|) = |a| + |b|$. En déduire que N_2 est une norme.
3. L'application N_3 est-elle une norme ?
4. Montrer que N_4 est une norme, en l'écrivant $N_4 = \|\cdot\|_1 \circ u$ pour une application linéaire u bien choisie.

Exercice 2 : Distance associée à une norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel non réduit à $\{0\}$ et $d(x, y) = \|x - y\|$ la distance associée.

1. Montrer que $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ et $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ pour tous $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Sur $\mathbb{R}^2$, on pose $\delta(x, y) = 0$ si $x = y$ et $\delta(x, y) = 1$ sinon. Montrer que δ est une distance.

3. Montrer qu'il n'existe aucune norme sur $\mathbb{R}^2$ dont δ soit la distance associée.
4. Déterminer, pour δ , les boules ouvertes $B(0, 1)$ et $B(0, 2)$.

Exercice 3 : Comparaison des normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

Soit $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{K}^n$.

1. Montrer que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$.
2. Montrer que $\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$ et $\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$.
3. Montrer que les quatre constantes $1, 1, \sqrt{n}, \sqrt{n}$ sont optimales.
4. En déduire la meilleure constante c telle que $\|x\|_1 \leq c \|x\|_\infty$ pour tout x .

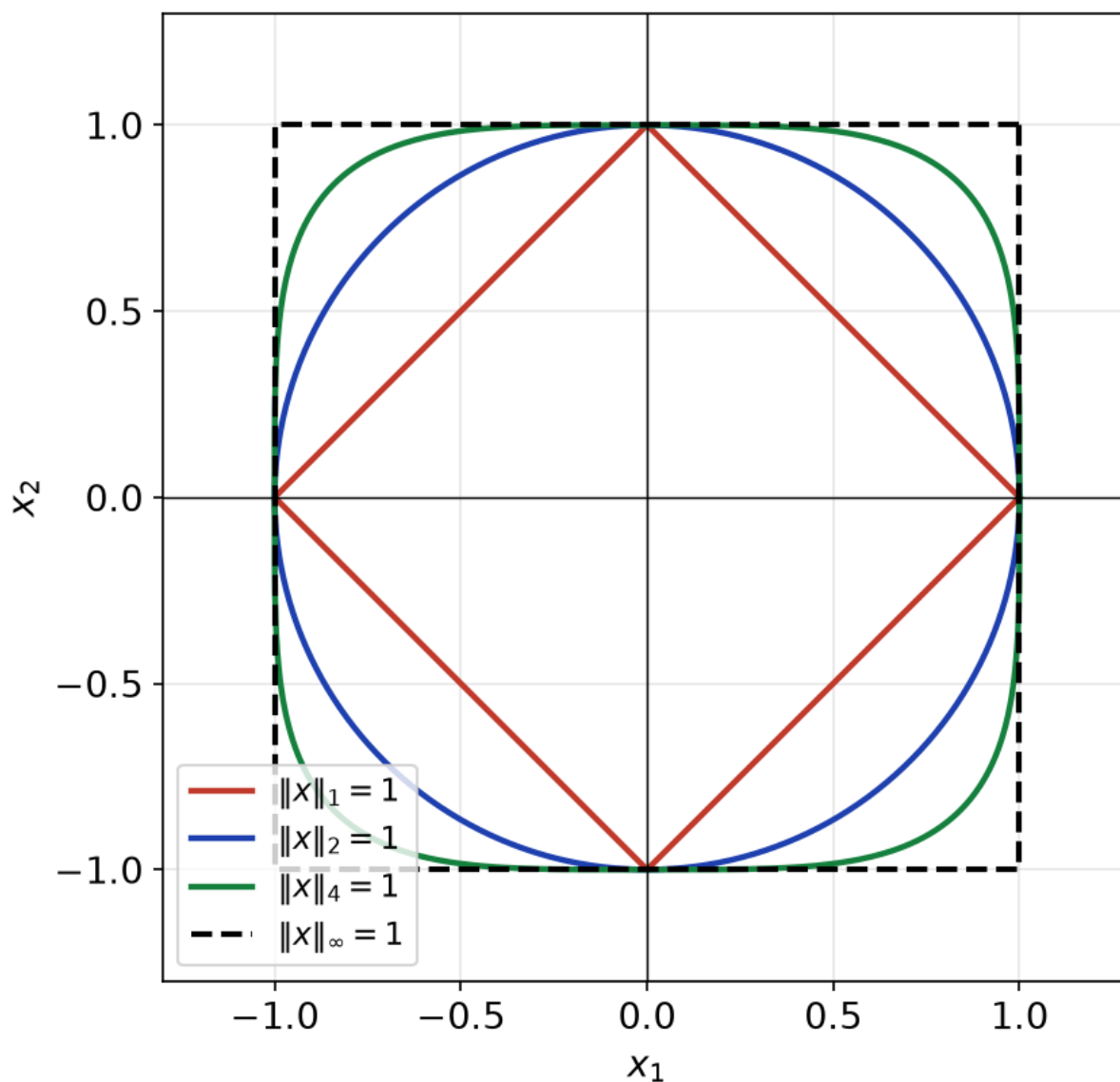
Exercice 4 : Boule unité d'une norme hexagonale

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x, y) = \max(|x|, |y|, |x - y|)$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter la boule unité fermée de N et préciser ses sommets.
3. Montrer que $\|v\|_\infty \leq N(v) \leq 2 \|v\|_\infty$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, avec des constantes optimales.
4. Montrer de même que $N(v) \leq \|v\|_1 \leq 2 N(v)$, avec des constantes optimales.

Exercice 5 : Boules unité des normes p

Soit $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $p \geq 1$ un réel. On pose $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$ et l'on admet que $\|\cdot\|_p$ est une norme. La figure ci-dessous représente les sphères unités de $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_4$ et $\|\cdot\|_\infty$ dans $\mathbb{R}^2$.



1. Montrer que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$.
2. En déduire que $\|x\|_p \rightarrow \|x\|_\infty$ lorsque $p \rightarrow +\infty$.
3. Soit $1 \leq p \leq q$. Montrer que $\|x\|_q \leq \|x\|_p$. On pourra d'abord traiter le cas $\|x\|_p = 1$. Interpréter la figure.
4. Calculer $\|(3, 4)\|_1$, $\|(3, 4)\|_2$ et $\|(3, 4)\|_\infty$, et vérifier l'ordre obtenu.

Exercice 6 : Une application qui n'est pas une norme

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x, y) = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$.

1. Montrer que N vérifie la séparation et l'homogénéité.
2. Calculer $N(1, 0)$, $N(0, 1)$ et $N(1, 1)$. L'application N est-elle une norme ?
3. Montrer que l'ensemble $B = \left\{ v \in \mathbb{R}^2, N(v) \leq 1 \right\}$ n'est pas convexe.
4. Plus généralement, soit E un espace vectoriel réel et $\nu : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application qui vérifie la séparation et l'homogénéité. On note $B_\nu = \left\{ x \in E, \nu(x) \leq 1 \right\}$. Montrer que ν est une norme si et seulement si B_ν est convexe.

Exercice 7 : Une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$

Pour $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(v) = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$.

1. Montrer que $\varphi((x, y), (x', y')) = xx' + \frac{1}{2}(xy' + x'y) + yy'$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. En déduire que N est une norme.
2. Montrer que $\frac{1}{2}\|v\|_2^2 \leq N(v)^2 \leq \frac{3}{2}\|v\|_2^2$, et que ces constantes sont optimales.
3. En déduire deux disques centrés en l'origine qui encadrent la boule unité de N . Décrire cette boule.

Exercice 8 : Parties et fonctions bornées

On munit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Soit A l'ensemble des $f \in E$ telles que $f(0) = 0$ et $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ pour tous $x, y \in [0, 1]$. Montrer que A est une partie bornée de E .
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n$ et $g_n(x) = nx$. Les suites (f_n) et (g_n) sont-elles bornées dans E ?
3. Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, les fonctions $\varphi(t) = (\cos t, \sin 2t)$ et $\psi(t) = (t \cos t, \sin t)$, définies sur $\mathbb{R}$, sont-elles bornées ?
4. Dans $M_2(\mathbb{R})$, on pose $A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$. L'ensemble $\left\{ A^n, n \in \mathbb{N} \right\}$ est-il borné ? On justifiera que la réponse ne dépend pas de la norme choisie parmi $\|M\|_\infty = \max |m_{ij}|$ et $\|M\|_1 = \sum |m_{ij}|$.

Exercice 9 : Une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $n \geq 1$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $N(P) = \sum_{k=0}^n |P(k)|$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour $n = 2$, calculer $N(X)$, $N(X^2)$ et $N((X-1)^2)$.
3. On pose $N'(P) = \sum_{k=0}^{n-1} |P(k)|$. Montrer que N' n'est pas une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.
4. L'application N est-elle une norme sur $\mathbb{R}_{n+1}[X]$?

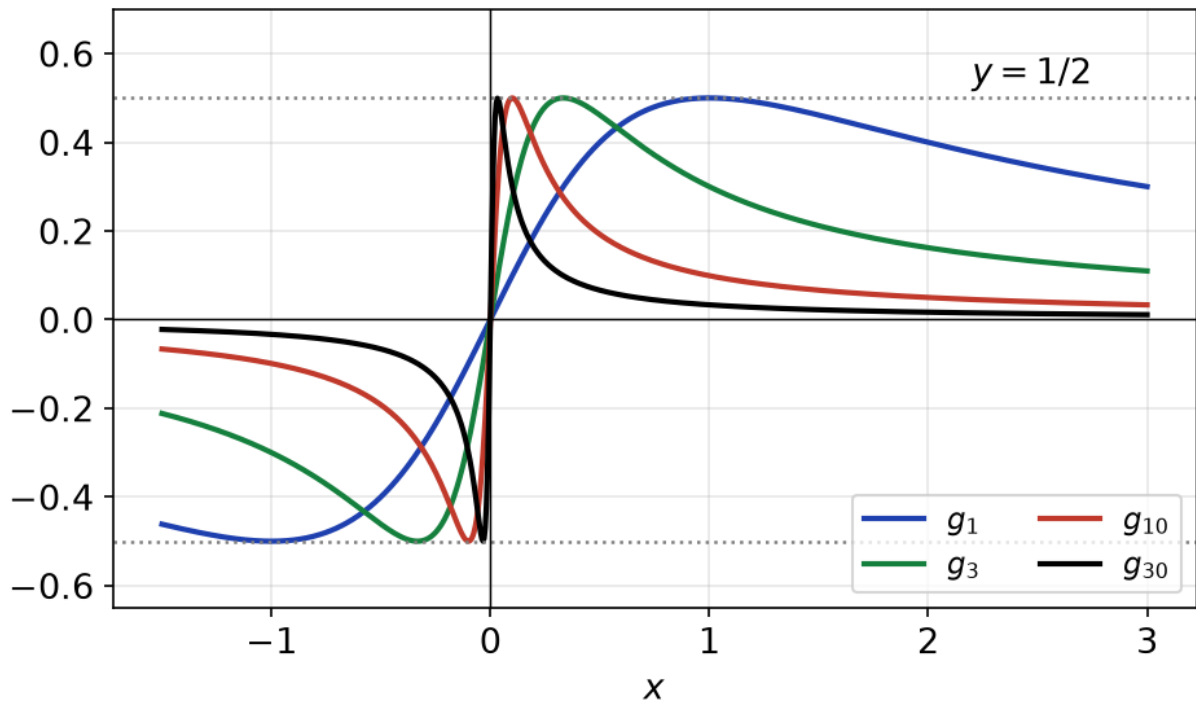
Exercice 10 : Norme de la convergence uniforme

On note $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions bornées, muni de $\|\cdot\|_\infty$. Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$,

on pose

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n x^2} \text{ et } g_n(x) = \frac{n x}{1+n^2 x^2}.$$

La figure ci-dessous représente quelques fonctions g_n .



1. Montrer que $f_n \in \mathcal{B}$ et calculer $|f_n|_\infty$. La suite (f_n) converge-t-elle dans $\mathcal{B}$?
2. Calculer $|g_n|_\infty$. Montrer que, pour tout réel x , $g_n(x) \rightarrow 0$.
3. Montrer que (g_n) ne converge pas dans $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 11 : Normes 1, 2 et infini sur $\mathcal{C}([0,1])$

On munit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

1. Montrer que $|f|_1 \leq |f|_2 \leq |f|_\infty$ pour toute $f \in E$.

2. Avec $f_n(x) = x^n$, montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes, puis que $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne le sont pas non plus.
3. Avec $h_n(x) = \sqrt{n} x^n$, montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.
4. Étudier la convergence de (h_n) vers 0 pour chacune des trois normes.

Exercice 12 : Convergence en moyenne sans convergence uniforme

Pour $n \geq 2$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = \max\left(0, 1 - n \left|x - \frac{1}{2}\right|\right)$.

1. Justifier que f_n est continue et décrire son graphe.
2. Calculer $\|f_n\|_\infty$, $\|f_n\|_1$ et $\|f_n\|_2$.
3. En déduire que (f_n) converge vers 0 en moyenne et en moyenne quadratique.
4. Montrer que (f_n) ne converge pas dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, où $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 13 : Une norme sur les fonctions de classe C^1

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ et $M(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

1. Montrer que N est une norme sur E .
2. Montrer que $\|f\|_\infty \leq N(f)$ pour toute $f \in E$.
3. Montrer que N et M sont équivalentes.
4. Avec $f_n(x) = \sin(n\pi x)$, montrer que N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E .

5. On pose $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} f_n$. Étudier la convergence de (u_n) dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, puis dans (E, N) .

Exercice 14 : Produit d'espaces normés

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Pour $(x, y) \in E \times F$, on pose $N(x, y) = \max(\|x\|_E, \|y\|_F)$ et $N'(x, y) = \|x\|_E + \|y\|_F$.

1. Montrer que N et N' sont des normes sur $E \times F$, et que $N \leq N' \leq 2N$.
2. Montrer que (x_n, y_n) converge vers (a, b) pour N si et seulement si $x_n \rightarrow a$ dans E et $y_n \rightarrow b$ dans F .
3. Montrer que la boule ouverte de centre (a, b) et de rayon r pour N est $B_E(a, r) \times B_F(b, r)$.
4. Application : dans $\mathbb{R} \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, étudier la suite $(\frac{n}{n+1}, \frac{1}{n} I_2)$.

Exercice 15 : Inclusion de boules

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé non réduit à $\{0\}$, $a, b \in E$ et $r, s > 0$. On note $B(c, \rho)$ la boule ouverte de centre c et de rayon ρ .

1. Montrer que si $\|a - b\| + r \leq s$, alors $B(a, r) \subset B(b, s)$.
2. Réciproquement, on suppose $B(a, r) \subset B(b, s)$. En considérant les points $a + t u$, où u est un vecteur unitaire bien choisi et $t \in [0, r[$, montrer que $\|a - b\| + r \leq s$.
3. En déduire que $B(a, r) = B(b, s)$ implique $a = b$ et $r = s$.
4. Pour quels a a-t-on $B(0, 1) \subset B(a, 2)$?

Exercice 16 : Suites de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

On travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni de l'une des normes usuelles. Pour $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \sin \frac{1}{n}, \frac{n^2 + 1}{2n^2 - n} \right), \quad v_n = \left(\frac{1}{n}, \ln n, 0 \right), \quad w_n = \left(\frac{(-1)^n}{n}, \cos(n\pi), 1 \right).$$

1. Expliquer pourquoi la nature de ces suites ne dépend pas de la norme usuelle choisie.
2. Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.
3. Montrer que (v_n) diverge.
4. Déterminer deux valeurs d'adhérence de (w_n) et conclure.

Exercice 17 : Puissances d'une matrice

On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la norme $\|M\|_\infty = \max_{i,j} |m_{ij}|$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire $A = \frac{1}{2}I_2 + J$ et calculer A^n pour $n \geq 1$.
2. Montrer que la suite (A^n) converge et préciser sa limite.
3. Calculer B^2 et B^4 . Déterminer les valeurs d'adhérence de (B^n) . La suite converge-t-elle ?

Exercice 18 : Suite récurrente dans $\mathbb{R}^2$

On définit une suite $U_n = (x_n, y_n)$ de $\mathbb{R}^2$ par $U_0 = (3, 0)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2y_n}{3}, \quad y_{n+1} = \frac{2x_n + y_n}{3}.$$

1. Montrer que $s_n = x_n + y_n$ est constante et que $d_n = x_n - y_n$ est géométrique.
2. En déduire x_n et y_n en fonction de n .
3. Montrer que (U_n) converge dans $\mathbb{R}^2$ et calculer $|U_n - L|_\infty$, où L est la limite.
4. Écrire $U_{n+1} = M U_n$ avec une matrice M et en déduire la limite de (M^n) .

Exercice 19 : Valeurs d'adhérence dans $\mathbb{C}$

Pour $n \geq 1$, on pose $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{i n \pi / 3}$.

1. Montrer que la suite (z_n) est bornée.
2. Pour $r \in \{0, 1, \dots, 5\}$, déterminer la limite de la suite extraite $(z_{6k+r})_{k \geq 1}$.
3. En déduire que (z_n) diverge.
4. Montrer que (z_n) n'a pas d'autre valeur d'adhérence que les six nombres trouvés.

Exercice 20 : Suites extraites et convergence

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et (u_n) une suite de E .

1. On suppose que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers le même vecteur ℓ . Montrer que (u_n) converge vers ℓ .
2. On suppose que (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.
3. Montrer par un exemple que la convergence de (u_{2n}) et de (u_{2n+1}) seules ne suffit pas.
4. Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, déterminer les valeurs d'adhérence de $u_n = \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)$.

Exercice 21 : Normes matricielles

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ et $|A|_\infty = \max_{i,j} |a_{ij}|$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et que $|A|_\infty \leq N(A) \leq n |A|_\infty$.
2. Montrer que $N(AB) \leq N(A)N(B)$ pour toutes matrices A, B .
3. En déduire que si $N(A) < 1$, alors $A^k \rightarrow 0$. Application à $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$.
4. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ ne vérifie pas $|AB|_\infty \leq |A|_\infty |B|_\infty$ pour tout A, B , dès que $n \geq 2$.

Exercice 22 : Caractérisation séquentielle des normes équivalentes

Soit N et N' deux normes sur un espace vectoriel E .

1. Montrer que s'il existe $C > 0$ tel que $N' \leq C N$, alors toute suite qui tend vers 0 pour N tend vers 0 pour N' .
2. Réciproquement, on suppose qu'aucune constante C ne vérifie $N' \leq C N$. Construire une suite (y_n) telle que $N(y_n) \rightarrow 0$ et $N'(y_n) \rightarrow +\infty$.
3. En déduire que N et N' sont équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes suites de limite nulle.
4. Montrer que l'équivalence des normes est une relation d'équivalence.

Exercice 23 : Problème : normes sur $\mathbb{R}[X]$

Pour $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^d |a_k|, \quad N_\infty(P) = \max_{0 \leq k \leq d} |a_k|, \quad S_a(P) = \sup_{t \in [0, a]} |P(t)| \quad (a > 0).$$

1. Montrer que N_1 , N_∞ et S_a sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $N_\infty \leq N_1$. Avec $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$, montrer que N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
3. Montrer que $S_1 \leq N_1$. Avec $Q_n = (1 - X)^n$, montrer que S_1 et N_1 ne sont pas équivalentes.
4. Soit $0 < a < b$. Montrer que $S_a \leq S_b$, puis que S_a et S_b ne sont pas équivalentes.
5. On pose $T_n = \frac{1}{n} X^n$ pour $n \geq 1$. Étudier la convergence de (T_n) pour N_1 , pour S_1 et pour S_2 .
6. Montrer qu'il n'existe aucune constante C telle que $N_\infty \leq C S_1$, ni aucune constante C' telle que $S_1 \leq C' N_\infty$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [espaces vectoriels normés, cours de maths spé](#)
- Chapitre précédent : [Polynômes d'endomorphismes et Cayley-Hamilton](#)
- Chapitre suivant : [Topologie d'un espace normé et continuité](#)
- Le même thème en L3 : [espaces vectoriels normés, exercices de maths en L3](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)