

Espaces vectoriels normés

Exercice 1 : Une norme sur $\mathbb{R}^2$ et sa boule unité

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x, y) = \max(|x|, |x - y|)$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Décrire et dessiner la boule unité fermée de N . Préciser ses sommets.
3. Déterminer les meilleures constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que $\alpha N_\infty \leq N \leq \beta N_\infty$, où $N_\infty(x, y) = \max(|x|, |y|)$.

Exercice 2 : Comparaison des normes usuelles de $\mathbb{K}^n$

Soit $n \geq 2$. Sur $\mathbb{K}^n$, on considère les normes N_1 , N_2 et N_∞ .

1. Montrer que $N_\infty \leq N_2 \leq N_1$.
2. Montrer que $N_1 \leq \sqrt{n} N_2$ et que $N_2 \leq \sqrt{n} N_\infty$.
3. Montrer que toutes les constantes obtenues sont optimales.

Exercice 3 : Suites sommables et suites bornées

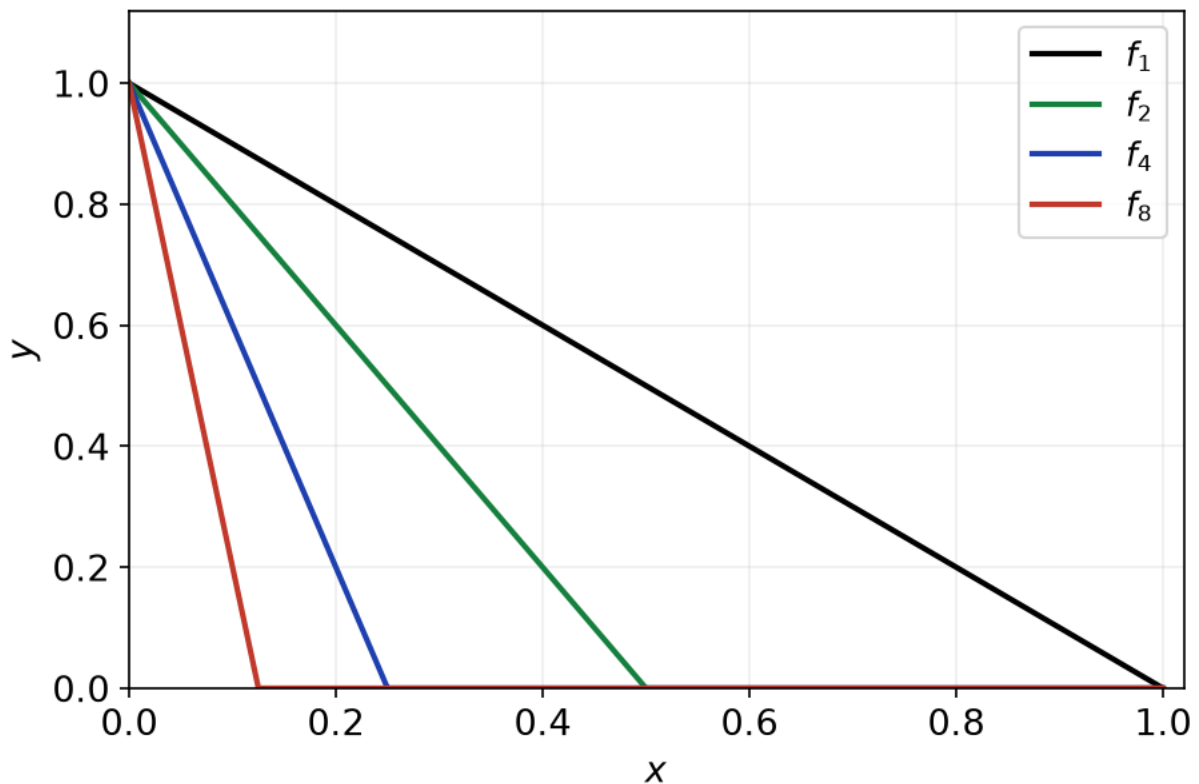
On rappelle que ℓ^1 et ℓ^∞ désignent les espaces de suites réelles sommables et bornées, indexées par $\mathbb{N}$.

1. Montrer que $\ell^1 \subset \ell^\infty$, que l'inclusion est stricte et que $\|u\|_\infty \leq \|u\|_1$ pour tout $u \in \ell^1$.
2. Pour $k \geq 1$, soit $v^{(k)}$ la suite dont les k premiers termes valent $1/k$ et les autres 0. Calculer $\|v^{(k)}\|_1$ et $\|v^{(k)}\|_\infty$.
3. En déduire que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur ℓ^1 . La suite $(v^{(k)})$ converge-t-elle dans $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$? Dans $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$?

Exercice 4 : Normes intégrales sur $C([0,1])$

Sur $E = C([0,1], \mathbb{R})$, on considère $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$, $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$.

Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \max(0, 1 - nx)$. La figure ci-dessous représente quelques-unes de ces fonctions.



1. Montrer que $|f|_1 \leq |f|_2 \leq |f|_\infty$ pour tout $f \in E$.
2. Calculer $|f_n|_1$, $|f_n|_2$ et $|f_n|_\infty$.
3. En déduire que deux quelconques de ces trois normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 5 : Une norme de type C^1

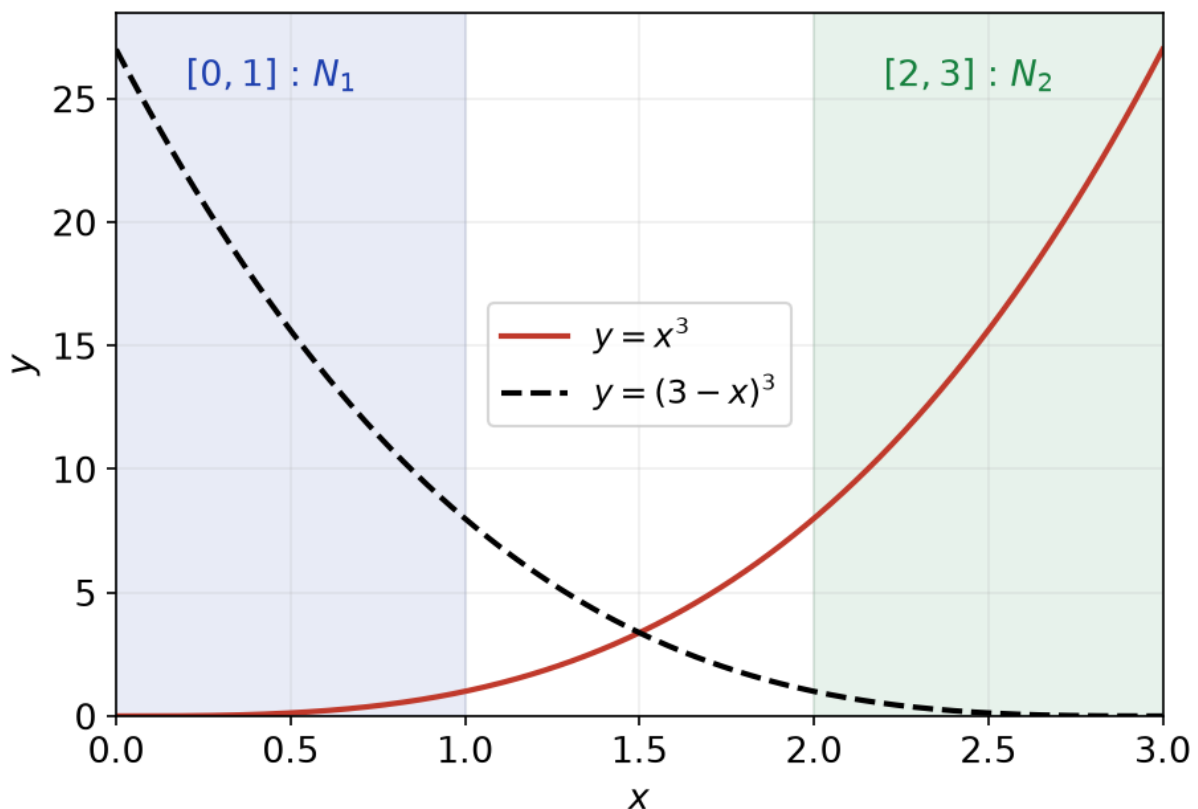
Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = |f(0)| + |f'|_\infty$.

1. Montrer que N est une norme sur E .
2. Montrer que $|f|_\infty \leq N(f)$ pour tout $f \in E$.
3.    l'aide des fonctions $x \rightarrow x^n$, montrer que N et $|f|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E .

4. On note $D : f \rightarrow f'$, de E dans $C([0,1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Est-elle continue lorsque E est muni de N ? Lorsque E est muni de $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 6 : Deux normes non équivalentes sur $\mathbb{R}[X]$

Sur $\mathbb{R}[X]$, on pose $N_1(P) = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$ et $N_2(P) = \sup_{x \in [2,3]} |P(x)|$. La figure ci-dessous montre les graphes de x^3 et $(3-x)^3$ sur $[0,3]$.



1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il n'existe aucune constante C telle que $N_2 \leq C N_1$.
3. Montrer qu'il n'existe aucune constante C telle que $N_1 \leq C N_2$.
4. Que peut-on dire des restrictions de N_1 et N_2 à $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 7 : Continuité de formes linéaires sur $C([0,1])$

On munit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Montrer que $\psi : f \rightarrow \int_0^1 t f(t) dt$ est une forme linéaire continue et calculer $\|\psi\|_{\text{op}}$.
2. Même question pour $\chi : f \rightarrow f(0) + f(1)$.
3. Même question pour $\theta : f \rightarrow f(0) - f(1)$.

Exercice 8 : Une norme subordonnée non atteinte

Sur $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, on considère $\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt - f(1/2)$.

1. Montrer que φ est continue et que $\|\varphi\|_{\text{op}} \leq 2$.
2. Pour $k \geq 3$, on note f_k la fonction affine par morceaux égale à 1 hors de $[\frac{1}{2} - \frac{1}{k}, \frac{1}{2} + \frac{1}{k}]$, égale à -1 en $\frac{1}{2}$ et affine sur $[\frac{1}{2} - \frac{1}{k}, \frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{k}]$. Calculer $\varphi(f_k)$. En déduire $\|\varphi\|_{\text{op}}$.
3. Montrer qu'il n'existe aucune $f \in E$ telle que $\|f\|_\infty = 1$ et $|\varphi(f)| = 2$.

Exercice 9 : Évaluation en un point et choix de la norme

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et $\delta_0 : f \rightarrow f(0)$. On note $H = \ker \delta_0$.

1. Montrer que δ_0 est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et calculer sa norme.
2. À l'aide de $g_n(x) = (1-x)^n$, montrer que δ_0 n'est pas continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$.
3. Montrer que H est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
4. Montrer que H est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

Exercice 10 : Dérivation des polynômes

Soit $D: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$, $P \rightarrow P'$. Pour $P = \sum_k a_k X^k$, on pose $N_\infty(P) = \max_k |a_k|$ et $N(P) = \sum_k k! |a_k|$.

1. Montrer que D n'est pas continue de $(\mathbb{R}[X], N_\infty)$ dans lui-même.
2. Montrer que D n'est pas continue lorsque $\mathbb{R}[X]$ est muni, au départ et à l'arrivée, de $\|P\| = \sup_{[0,1]} |P|$.
3. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$, que D est continue de $(\mathbb{R}[X], N)$ dans lui-même et calculer $\|D\|_{\text{op}}$.

Exercice 11 : Opérateur de Volterra

Sur $E = C([0,1], \mathbb{R})$, on définit $V f(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1. Montrer que V est un endomorphisme de E .
2. On munit E de $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que V est continue et calculer $\|V\|_{\text{op}}$.

3. On munit E de $\|\cdot\|_1$. Montrer que $\|Vf\|_1 \leq \int_0^1 (1-t)|f(t)| dt$, puis que V est continue.
4. Avec $h_n(t) = 2n \max(0, 1 - nt)$, calculer $\|h_n\|_1$ et $\|Vh_n\|_1$. En déduire la norme de V pour $\|\cdot\|_1$ et montrer qu'elle n'est pas atteinte.

Exercice 12 : Opérateurs de multiplication sur ℓ^1

Soit $a = (a_n) \in \ell^\infty$ une suite réelle bornée. Pour $u \in \ell^1$, on pose $M_a(u) = (a_n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Montrer que M_a est un endomorphisme continu de ℓ^1 et que $\|M_a\|_{\text{op}} = \|a\|_\infty$.
- Montrer que la borne supérieure qui définit $\|M_a\|_{\text{op}}$ est atteinte si et seulement si $\sup_n |a_n|$ est atteint.
- Donner un exemple de suite a pour laquelle la norme de M_a n'est pas atteinte.
- Montrer que si $a_n = n$, la formule $M_a(u)$ ne définit pas une application de ℓ^1 dans ℓ^1 .

Exercice 13 : Calculs de normes matricielles

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|B\|_1$ et $\|B\|_\infty$.
- Calculer $N_2(Ax)$ et $N_2(Bx)$ pour $x = (x_1, x_2)$. En déduire $\|A\|_2$ et $\|B\|_2$.
- Calculer les rayons spectraux $\rho(A)$ et $\rho(B)$, puis les normes de Frobenius. Comparer.

Exercice 14 : Formules des normes subordonnées N_1 et N_∞

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la norme subordonnée à N_∞ vaut $|A|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$.
2. Montrer que la norme subordonnée à N_1 vaut $|A|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$.
3. Montrer que $|A|_1 = |A^T|_\infty$.
4. Montrer que la norme de Frobenius est sous-multiplicative, mais n'est subordonnée à aucune norme si $n \geq 2$.

Exercice 15 : Rayon spectral et série de Neumann

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$ et $\|\cdot\|_{op}$ la norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\rho(A) \leq |A|_{op}$ pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que l'inégalité peut être stricte et que ρ n'est pas une norme.
3. On suppose $|A|_{op} < 1$. Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ converge, que $I_n - A$ est inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ et que $|(I_n - A)^{-1}|_{op} \leq \frac{1}{1 - |A|_{op}}$.
4. Vérifier ce résultat pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$ avec la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 16 : Équivalence des normes sur $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $n \geq 1$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $N(P) = \sum_{k=0}^n |P(k)|$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$. Est-ce encore une norme sur $\mathbb{R}_{n+1}[X]$?
2. Montrer qu'il existe $C_n > 0$ tel que $\sup_{[0,1]} |P'| \leq C_n N(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
3. Pour $n = 1$, déterminer la meilleure constante C_1 .
4. Soit (P_m) une suite de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $P_m(k) \rightarrow 0$ pour $k = 0, \dots, n$. Montrer que les coefficients de P_m tendent vers 0 et que P_m converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

Exercice 17 : Applications bilinéaires continues

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et $B(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t) dt$.

1. Montrer que B est bilinéaire continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)^2$ et que la meilleure constante C dans $|B(f, g)| \leq C \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ vaut 1.
2. Avec $f_n(x) = n \max(0, 1 - nx)$, montrer que B n'est pas continue sur $(E, \|\cdot\|_1)^2$.
3. Montrer que B est continue sur $(E, \|\cdot\|_2)^2$, où $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2}$.
4. Montrer que le produit $\Pi : (f, g) \rightarrow fg$ est bilinéaire continu de $(E, \|\cdot\|_\infty)^2$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 18 : Produit matriciel et ouverture de GL_n

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme subordonnée $\|\cdot\|$.

1. Montrer que $(A, B) \rightarrow AB$ est bilinéaire continue.
2. Montrer que $|A^2 - B^2| \leq (\|A\| + \|B\|) \|A - B\|$.
3. Montrer que $\det$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert.
4. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 19 : Opérateur à noyau

Sur $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, on pose $Tf(x) = \int_0^1 (x-t)f(t) dt$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E dont l'image est contenue dans $\mathbb{R}_1[X]$.

2. Calculer $g(x) = \int_0^1 |x-t| dt$ pour $x \in [0,1]$ et en déduire $\|T\|_{op} \leq \sup_{[0,1]} g$.

3. Calculer Tf pour $f = -1$. En déduire $\|T\|_{op}$.

4. On munit maintenant l'espace de départ de $\|\cdot\|_1$ et celui d'arrivée de $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que T reste continue, de norme au plus 1.

Exercice 20 : Dual de ℓ^1

On travaille avec des suites réelles. On note e_n la suite dont le terme d'indice n vaut 1 et les autres

0.

1. Soit $a \in \ell^\infty$. Montrer que $\varphi_a(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$ définit une forme linéaire continue sur ℓ^1 et que $|\varphi_a|_{\text{op}} = \|a\|_\infty$.
2. Soit $u \in \ell^1$ et $S_N = \sum_{n=0}^N u_n e_n$. Montrer que $S_N \rightarrow u$ dans ℓ^1 .
3. Soit φ une forme linéaire continue sur ℓ^1 . On pose $a_n = \varphi(e_n)$. Montrer que $a \in \ell^\infty$ et que $\varphi = \varphi_a$.
4. En déduire que $a \rightarrow \varphi_a$ est une bijection linéaire isométrique de ℓ^∞ sur le dual topologique de ℓ^1 .
5. Montrer que la question 2 tombe en défaut dans ℓ^∞ pour la suite constante égale à 1.

Exercice 21 : Problème : dimension finie contre dimension infinie

Ce problème rassemble les phénomènes qui distinguent la dimension infinie.

Partie A. Une boule non compacte. On munit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ de $\|\cdot\|_\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction « bosse » nulle hors de $[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}]$, affine sur chaque moitié de cet intervalle et valant 1 en son milieu.

1. Montrer que $\|f_n\|_\infty = 1$ et que $\|f_n - f_m\|_\infty = 1$ pour $n \neq m$.
2. En déduire que la boule unité fermée de E n'est pas compacte. Comparer avec le cas de la dimension finie.

Partie B. Un hyperplan dense. On munit $\mathbb{R}[X]$ de $\|P\| = \sup_{[0,1]} |P|$ et l'on pose $\varphi(P) = P(2)$.

1. Montrer que φ n'est pas continue.
2. Soit $P_n = (X/2)^n$. Calculer $\|P_n\|$ et $\varphi(P_n)$. En déduire que $\ker \varphi$ est dense dans $\mathbb{R}[X]$.

Partie C. Le cas général. Soit φ une forme linéaire sur un espace normé E .

1. Montrer que si φ est continue, alors $\ker \varphi$ est fermé.
2. On suppose φ non continue. Montrer qu'il existe une suite (y_n) qui tend vers 0 avec $\varphi(y_n) = 1$ pour tout n . En déduire que $\ker \varphi$ est dense dans E .
3. Conclure : φ est continue si et seulement si $\ker \varphi$ est fermé. Que dire des hyperplans d'un espace de dimension finie ?

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [espaces vectoriels normés, cours de maths en L3](#)
- À maîtriser avant : [Espaces métriques : ouverts, fermés, continuité](#)

- Chapitre précédent : [Espaces métriques : ouverts, fermés, continuité](#)
- Chapitre suivant : [Compacité et connexité](#)
- Le même thème en maths spé : [espaces vectoriels normés, exercices de maths spé](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)