

Espaces vectoriels normés

I. Normes et espaces vectoriels normés

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un espace vectoriel normé est un espace métrique particulier : la distance y est compatible avec la structure linéaire. Ainsi, tous les résultats du chapitre sur les espaces métriques s'appliquent. En revanche, la linéarité apporte des outils nouveaux et beaucoup plus précis.

1. Définition et premières propriétés

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une **norme** sur E est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que, pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

- séparation : $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$;
- homogénéité : $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;
- inégalité triangulaire : $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Le couple (E, N) est un **espace vectoriel normé**. On note souvent $|x|$ au lieu de $N(x)$.

Une norme définit une distance par $d(x, y) = |x - y|$. Cette distance est invariante par translation et homogène. De plus, on dispose de la seconde inégalité triangulaire, très utile en pratique.

Propriété :

Pour tous $x, y \in E$, on a $||x| - |y|| \leq |x - y|$. Par conséquent, l'application $x \rightarrow |x|$ est 1-lipschitzienne, donc continue sur E .

Démonstration :

On écrit $x = (x - y) + y$. L'inégalité triangulaire donne $|x| \leq |x - y| + |y|$, donc $|x| - |y| \leq |x - y|$. En échangeant les rôles de x et y , on obtient l'autre inégalité.

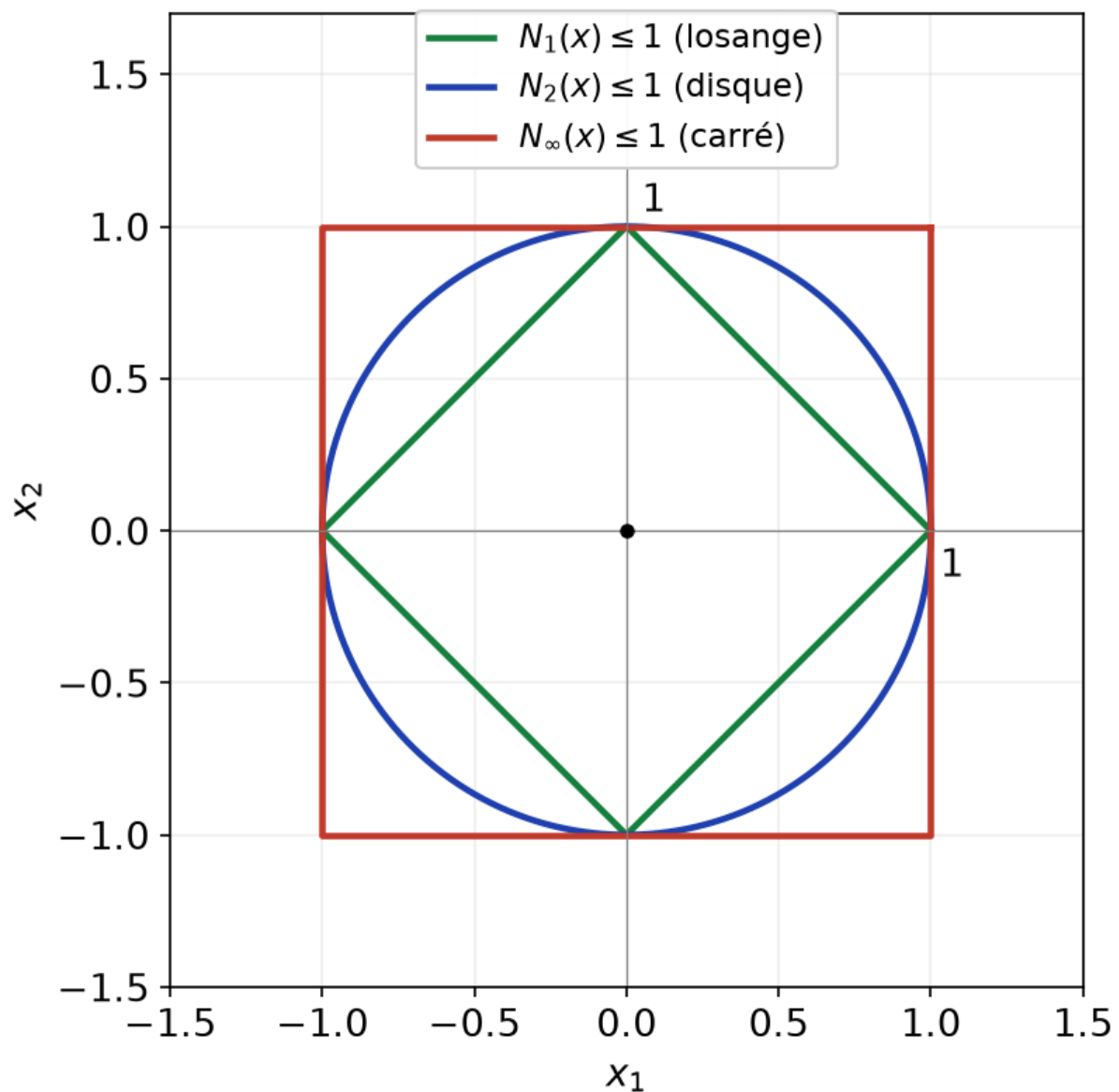
2. Les normes usuelles de $\mathbb{K}^n$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad N_2(x) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}, \quad N_\infty(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Les trois axiomes se vérifient directement pour N_1 et N_∞ . Pour N_2 , l'inégalité triangulaire découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\sum x_i \overline{y_i}| \leq N_2(x) N_2(y)$.

La forme d'une norme se lit sur sa boule unité fermée $B(0,1) = \{x \in E \mid |x| \leq 1\}$. Comme le montre la figure ci-dessous, dans $\mathbb{R}^2$, la boule de N_1 est un losange, celle de N_2 un disque et celle de N_∞ un carré.



Remarque :

Une boule d'un espace normé est toujours **convexe** et symétrique par rapport à son centre. En effet, si $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ et $t \in [0,1]$, alors $|tx + (1-t)y| \leq t + (1-t) = 1$.

3. Espaces de suites et de fonctions

En dimension infinie, les exemples fondamentaux sont des espaces de suites et de fonctions. On indexe les suites par $\mathbb{N}$.

Définition :

On note ℓ^1 l'espace des suites $u = (u_n)$ telles que $\sum |u_n|$ converge, muni de $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. On note ℓ^∞ l'espace des suites bornées, muni de $\|u\|_\infty = \sup_n |u_n|$.

On note $C([a,b])$ l'espace des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. On le munit de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|$, ou de la norme de la moyenne $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$.

La séparation de $\|\cdot\|_1$ sur $C([a,b])$ utilise la continuité. En effet, une fonction continue positive d'intégrale nulle est nulle. Cet argument disparaît pour les fonctions seulement intégrables, et c'est l'une des raisons d'être de la théorie de la mesure.

Exemple :

Toute suite de ℓ^1 est bornée, car $|u_n| \leq \|u\|_1$. Donc $\ell^1 \subset \ell^\infty$ et $\|u\|_\infty \leq \|u\|_1$. L'inclusion est stricte : la suite constante égale à 1 est bornée, mais sa série diverge. De même, sur $C([a,b])$, on a $\|f\|_1 \leq (b-a) \|f\|_\infty$.

II. Normes équivalentes

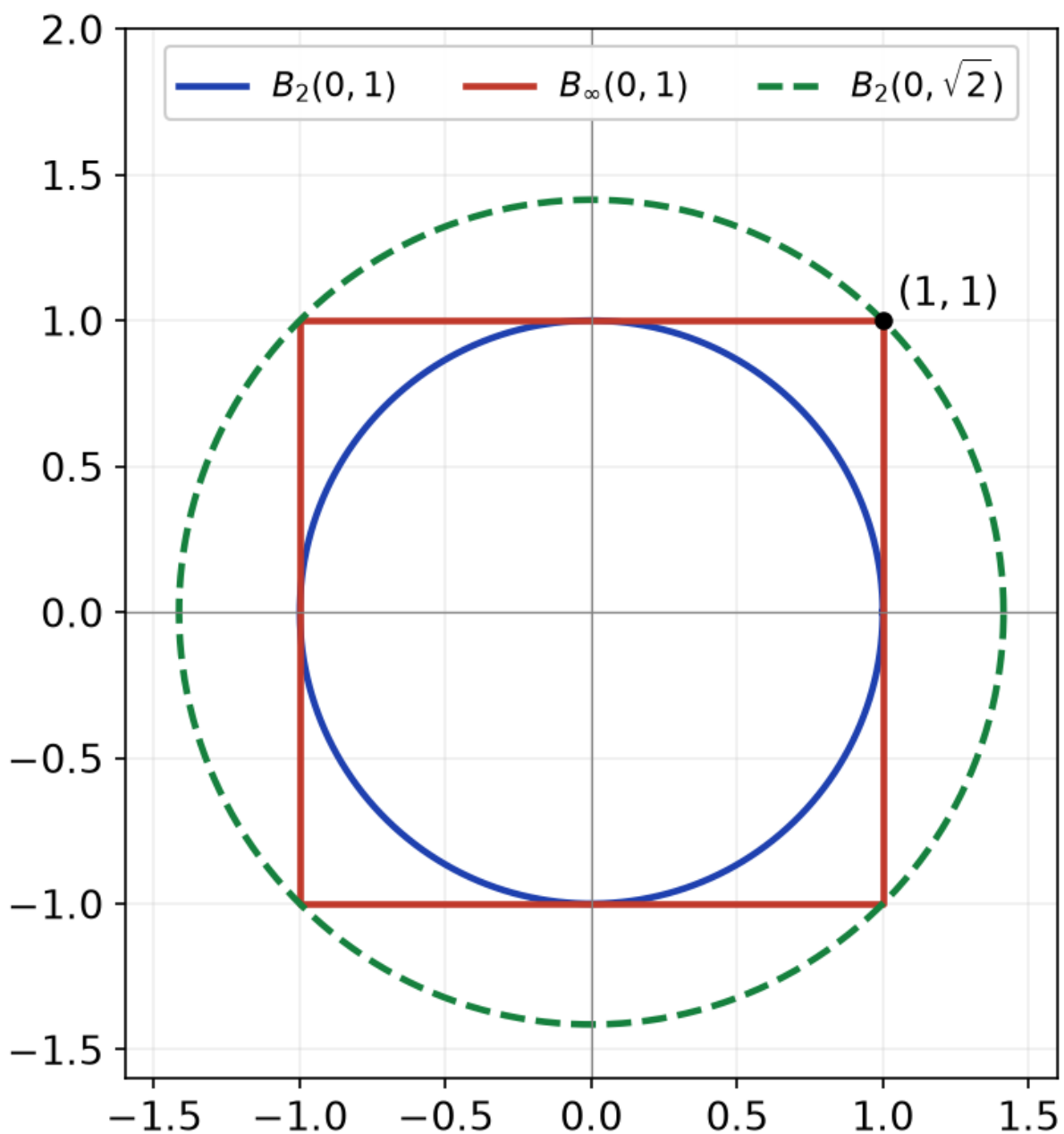
Sur un même espace, plusieurs normes coexistent. Certaines définissent les mêmes suites convergentes, d'autres non. Cette distinction est au cœur du chapitre.

Définition :

Deux normes N et N' sur E sont **équivalentes** s'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que

$$\forall x \in E, \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x).$$

Géométriquement, cela signifie que chaque boule de l'une contient une boule de l'autre, de même centre. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, on a $N_\infty \leq N_2 \leq \sqrt{2} N_\infty$. La figure ci-dessous traduit ces inégalités par les inclusions $B_2(0,1) \subset B_\infty(0,1) \subset B_2(0,\sqrt{2})$.



Proposition :

Si N et N' sont équivalentes, elles ont les mêmes ouverts, les mêmes fermés, les mêmes parties bornées et les mêmes suites convergentes (avec la même limite). De plus, une application est continue pour l'une si et seulement si elle l'est pour l'autre.

Démonstration :

Si $N'(x_k - \ell) \leq \beta N(x_k - \ell)$ et si $N(x_k - \ell) \rightarrow 0$, alors $N'(x_k - \ell) \rightarrow 0$. L'autre inégalité donne la réciproque. Les notions topologiques d'un espace métrique se caractérisent par les suites, d'où le résultat. Enfin, une partie bornée pour N est contenue dans une boule $B_N(0, R)$, donc dans $B_{N'}(0, \beta R)$.

La proposition fournit aussitôt un critère négatif. Pour montrer que deux normes **ne sont pas** équivalentes, il suffit de trouver une suite qui tend vers 0 pour l'une et pas pour l'autre. Plus simplement encore, on cherche une suite de vecteurs sur laquelle le quotient $N'(x_k) / N(x_k)$ n'est pas borné.

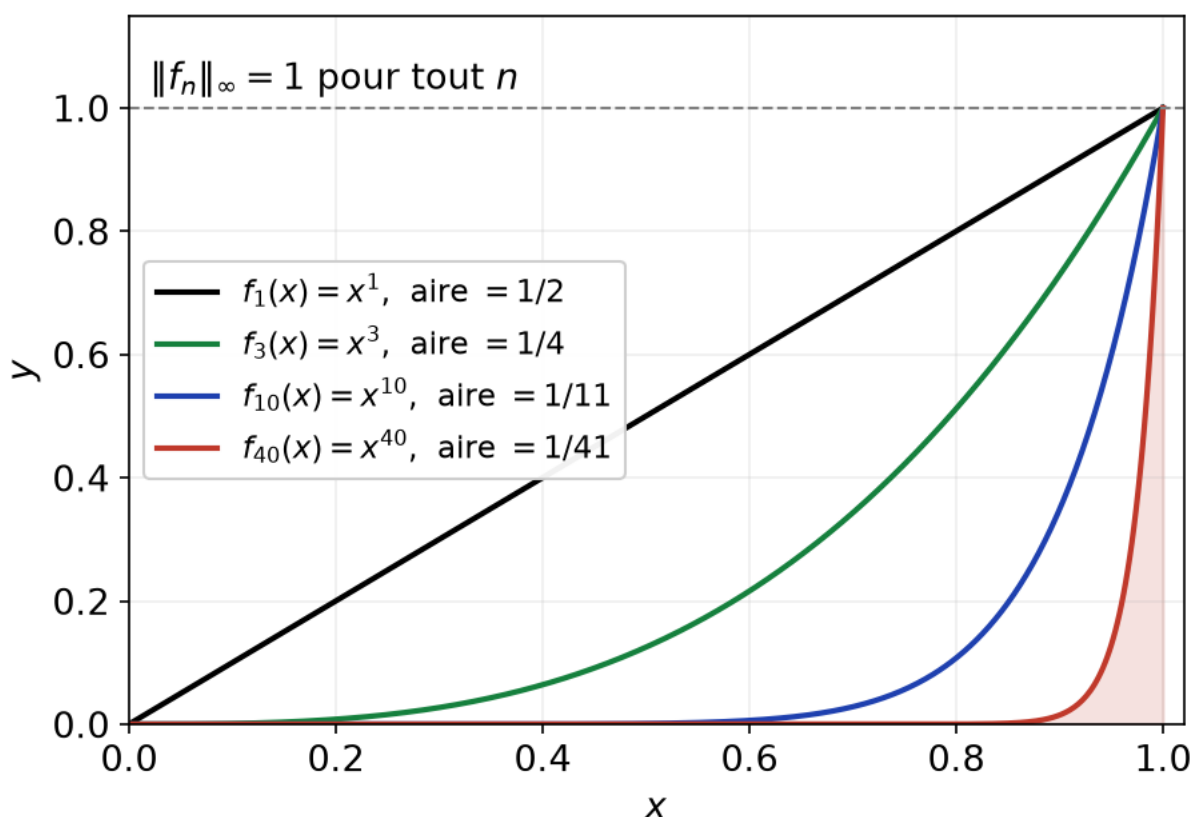
Méthode :

Montrer que deux normes ne sont pas équivalentes. On cherche une suite (x_k) de vecteurs non nuls telle que $N'(x_k) / N(x_k) \rightarrow +\infty$ (ou $\rightarrow 0$). Les candidats naturels sont les fonctions qui « se concentrent » : puissances x^k sur $[0,1]$, pics de plus en plus étroits, polynômes X^k , suites à support fini de plus en plus long.

Exemple :

Sur $C([0,1])$, posons $f_k(x) = x^k$. On a $|f_k|_\infty = 1$ et $|f_k|_1 = \frac{1}{k+1}$. Donc le quotient $|f_k|_\infty / |f_k|_1 = k+1$ tend vers $+\infty$. Ainsi, il n'existe aucune constante β telle que $|f|_\infty \leq \beta |f|_1$: les deux normes ne sont pas équivalentes.

La figure ci-dessous illustre ce phénomène. Les fonctions x^k gardent un maximum égal à 1, tandis que l'aire sous leur courbe s'effondre.



De même, sur ℓ^1 , la suite $u^{(k)}$ formée de k termes égaux à 1 suivis de zéros vérifie $\|u^{(k)}\|_1 = k$ et $\|u^{(k)}\|_\infty = 1$. Par conséquent, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur ℓ^1 .

III. Applications linéaires continues

Une application linéaire est, en dimension infinie, rarement continue « gratuitement ». Heureusement, sa continuité se teste en un seul point et se ramène à une inégalité.

1. Caractérisation de la continuité

Théorème :

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés et $u: E \rightarrow F$ linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est continue sur E ;
2. u est continue en 0 ;
3. u est bornée sur la boule unité fermée de E ;
4. il existe $C \geq 0$ tel que $\|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E$ pour tout $x \in E$;
5. u est lipschitzienne.

Démonstration :

L'implication $1 \Rightarrow 2$ est immédiate. Supposons 2. Il existe $\delta > 0$ tel que $\|x\|_E \leq \delta$ entraîne $\|u(x)\|_F \leq 1$. Si $\|x\|_E \leq 1$, alors $\|\delta x\|_E \leq \delta$, donc $\|u(x)\|_F \leq 1/\delta$: c'est 3.

Supposons 3, avec $\|u(x)\|_F \leq M$ sur la boule unité. Pour $x \neq 0$, le vecteur $x / \|x\|_E$ est de norme 1. Par linéarité, $\|u(x)\|_F \leq M \|x\|_E$, d'où 4 avec $C = M$.

Ensuite, 4 donne $\|u(x) - u(y)\|_F = \|u(x - y)\|_F \leq C \|x - y\|_E$, soit 5. Enfin, une application lipschitzienne est continue.

L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$. On le note $\mathcal{L}_c(E, F)$. Lorsque $F = \mathbb{K}$, on parle de **formes linéaires continues** et l'on note $E' = \mathcal{L}_c(E, \mathbb{K})$ le dual topologique.

Méthode :

Prouver la continuité d'une application linéaire. On vérifie d'abord la linéarité. Ensuite, on majore $\|u(x)\|_F$ en partant de sa définition, jusqu'à faire apparaître $C \|x\|_E$ avec une constante C indépendante de x . Les outils usuels sont l'inégalité triangulaire, la majoration d'une intégrale par la borne supérieure et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Prouver la non-continuité. On exhibe une suite (x_k) avec $\|x_k\|_E \leq 1$ et $\|u(x_k)\|_F \rightarrow +\infty$, ou bien $x_k \rightarrow 0$ avec $u(x_k)$ qui ne tend pas vers 0 .

Exemple :

Sur $E = C([0,1])$, la forme linéaire $\delta_0 : f \rightarrow f(0)$ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$, car $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$. En revanche, elle n'est pas continue pour $\|\cdot\|_1$. En effet, $g_k(x) = (1-x)^k$ vérifie $\|g_k\|_1 = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0$, alors que $\delta_0(g_k) = 1$. La continuité dépend donc des normes choisies, et pas seulement de l'application.

2. Noyau d'une forme linéaire

Pour les formes linéaires, un critère géométrique complète le théorème. Il sera démontré en exercice.

Proposition :

Une forme linéaire φ sur un espace normé E est continue si et seulement si son noyau est fermé. Lorsque φ n'est pas continue, son noyau est même **dense** dans E .

IV. Norme subordonnée d'une application linéaire continue

La meilleure constante C du théorème précédent mesure la « taille » de u . Elle définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Définition :

Pour $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, la **norme subordonnée** (ou norme d'opérateur) de u est

$$\|u\|_{\text{op}} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F.$$

Les trois bornes supérieures coïncident par homogénéité (pour la dernière, on suppose $E \neq \{0\}$). Par construction, $|u(x)|_F \leq \|u\|_{op} |x|_E$ pour tout x , et $\|u\|_{op}$ est la plus petite constante qui convient.

Proposition :

L'application $u \rightarrow \|u\|_{op}$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$. De plus, elle est **sous-multiplicative** : si $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$, alors $v \circ u$ est continue et

$$\|v \circ u\|_{op} \leq \|v\|_{op} \|u\|_{op}.$$

Démonstration :

Si $\|u\|_{op} = 0$, alors $u(x) = 0$ pour tout x . L'homogénéité est claire. Pour l'inégalité triangulaire, $|(u+v)(x)| \leq (\|u\|_{op} + \|v\|_{op}) |x|$, puis on passe à la borne supérieure. Enfin, $|v(u(x))| \leq \|v\|_{op} |u(x)| \leq \|v\|_{op} \|u\|_{op} |x|$.

Méthode :

Calculer une norme subordonnée. On procède en deux temps.

1. On majore : on établit $|u(x)| \leq C |x|$ pour tout x , avec la constante C la plus fine possible. Ainsi $\|u\|_{op} \leq C$.
2. On minore : on cherche un vecteur $x_0 \neq 0$ tel que $|u(x_0)| = C |x_0|$. À défaut, on construit une suite (x_k) telle que $|u(x_k)| / |x_k| \rightarrow C$. Alors $\|u\|_{op} = C$.

Les cas d'égalité dans les majorations indiquent où chercher x_0 .

Exemple :

Sur $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, considérons $\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt$. D'abord, $|\varphi(f)| \leq \int_0^1 |f| \leq \|f\|_\infty$, donc $\|\varphi\|_{op} \leq 1$. Ensuite, la fonction constante $f = 1$ donne $\varphi(1) = 1 = \|1\|_\infty$. Par conséquent, $\|\varphi\|_{op} = 1$, et la borne supérieure est atteinte.

Attention :

En dimension infinie, la borne supérieure qui définit $\|\cdot\|_{op}$ n'est pas toujours atteinte. Par exemple, sur ℓ^1 , l'opérateur $M : u \rightarrow ((1 - 2^{-n}) u_n)_n$ a pour norme 1, mais $\|Mu\|_1 < \|u\|_1$ pour tout $u \neq 0$. Il faut alors une suite minimisante.

V. Dimension finie contre dimension infinie

La dimension finie est un cadre très confortable : toutes les normes y sont équivalentes. On admet ici le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{K}^n$ muni de $\|\cdot\|_\infty$: toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

1. Équivalence des normes en dimension finie

Théorème :

Sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie, **toutes les normes sont équivalentes**.

Démonstration :

On fixe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et l'on pose $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ si $x = \sum x_i e_i$. Il suffit de montrer que toute norme N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

D'abord, $N(x) \leq \sum |x_i| N(e_i) \leq \beta \|x\|_\infty$ avec $\beta = \sum N(e_i)$. En particulier, $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq \beta \|x - y\|_\infty$, donc N est continue pour $\|\cdot\|_\infty$.

Ensuite, la sphère $S = \{x \mid \|x\|_\infty = 1\}$ est fermée et bornée, donc compacte d'après Bolzano-Weierstrass. La fonction continue N y atteint son minimum α en un point x_0 . Comme $x_0 \neq 0$, on a $\alpha = N(x_0) > 0$. Enfin, pour $x \neq 0$, $x / \|x\|_\infty \in S$, d'où $N(x) \geq \alpha \|x\|_\infty$.

Ce théorème a des conséquences nombreuses. Il permet de parler de convergence, de fermé ou de compact dans un espace de dimension finie sans préciser la norme.

Corollaire :

Soit E de dimension finie. Alors :

- E est complet, et ses parties compactes sont ses parties fermées bornées ;
- une suite converge si et seulement si ses coordonnées dans une base convergent ;
- tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé quelconque est fermé.

2. Continuité automatique en dimension finie

Théorème :

Si E est de dimension finie et F un espace normé quelconque, **toute application linéaire** $u : E \rightarrow F$ est continue.

Démonstration :

Avec les notations précédentes, $\|u(x)\|_F \leq \sum |x_i| \|u(e_i)\|_F \leq \left(\sum \|u(e_i)\|_F \right) \|x\|_\infty$. Ainsi, u est continue pour $\|\cdot\|_\infty$. Or toutes les normes de E sont équivalentes, donc u est

continue pour la norme donnée.

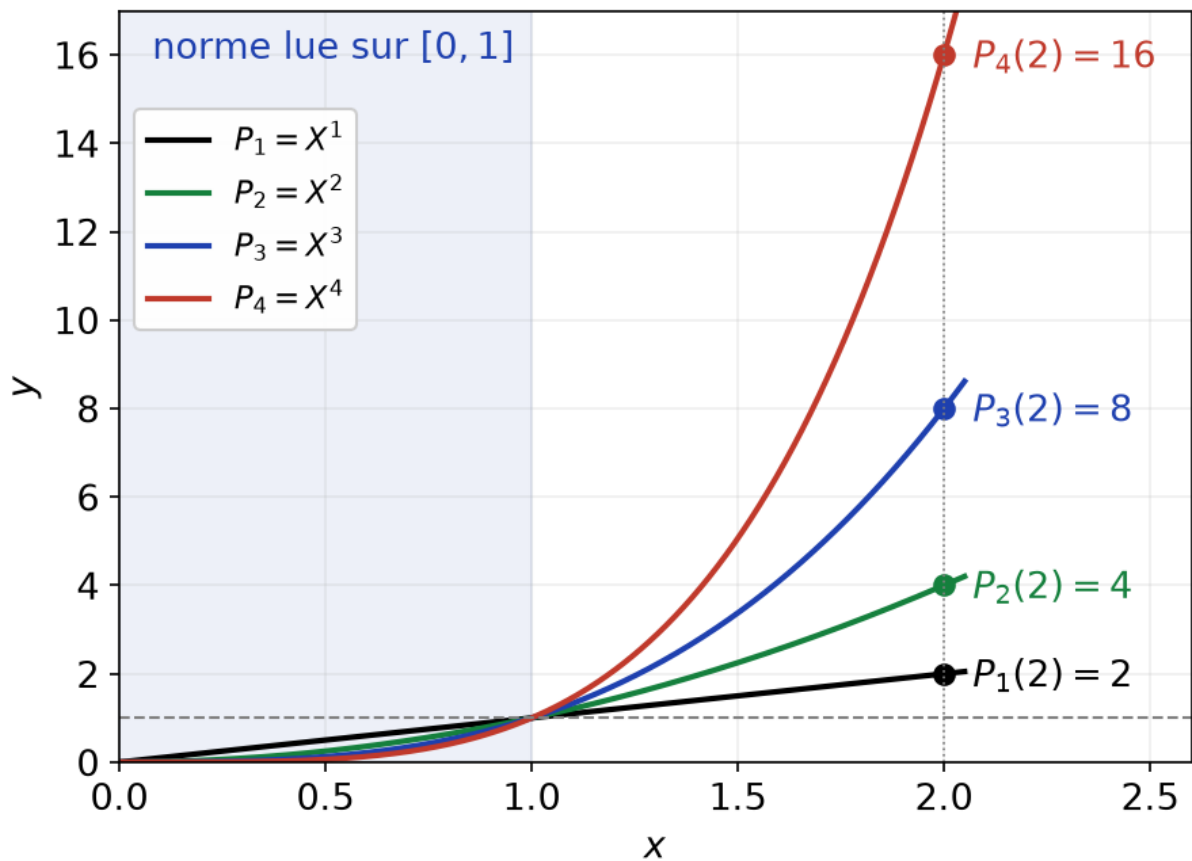
3. Une forme linéaire non continue

En dimension infinie, en revanche, la continuité peut tomber en défaut, même pour une forme linéaire très simple.

Exemple :

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de $\|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$. C'est une norme, car un polynôme nul sur $[0,1]$ a une infinité de racines, donc il est nul. Considérons $\varphi(P) = P(2)$. Pour $P_k = X^k$, on a $\|P_k\| = 1$ et $\varphi(P_k) = 2^k$. Donc φ n'est pas bornée sur la boule unité : elle n'est pas continue.

Comme le montre la figure ci-dessous, les polynômes X^k restent sous la valeur 1 sur $[0,1]$, mais leurs valeurs en 2 explosent.



Remarque :

Sur ce même espace, les normes $\sup_{[0,1]} |P|$ et $\sup_{[0,2]} |P|$ ne sont donc pas équivalentes. Elles le deviennent toutes deux si l'on se restreint à $\mathbb{R}_n[X]$, qui est de dimension finie. C'est exactement la frontière entre dimension finie et dimension infinie. Par ailleurs, le théorème de Riesz, hors programme ici, affirme que la boule unité fermée d'un espace normé est compacte si et seulement si l'espace est de dimension finie.

VI. Applications multilinéaires continues

Le produit scalaire, le produit de fonctions ou le produit matriciel sont bilinéaires. Leur continuité se caractérise comme dans le cas linéaire.

Théorème :

Soient $E_1, \dots, E_p, F$ des espaces normés et $B: E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ une application p -linéaire. Alors B est continue si et seulement s'il existe $C \geq 0$ tel que

$$\forall (x_1, \dots, x_p), \|B(x_1, \dots, x_p)\|_F \leq C \|x_1\| \dots \|x_p\|.$$

Démonstration :

On traite $p = 2$, le cas général étant identique. Si B est continue en $(0,0)$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|x\| \leq \delta$ et $\|y\| \leq \delta$ entraînent $\|B(x,y)\| \leq 1$. Par bilinéarité, pour x, y non nuls, $B(x,y) = \frac{\|x\| \|y\|}{\delta^2} B\left(\frac{\delta x}{\|x\|}, \frac{\delta y}{\|y\|}\right)$, d'où la majoration avec $C = \delta^{-2}$.

Réciproquement, on écrit $B(x,y) - B(a,b) = B(x-a, y) + B(a, y-b)$. Il vient $\|B(x,y) - B(a,b)\| \leq C \|x-a\| \|y\| + C \|a\| \|y-b\|$, qui tend vers 0 quand $(x,y) \rightarrow (a,b)$.

Attention :

Une application bilinéaire continue n'est **pas** lipschitzienne sur tout $E \times F$. Par exemple, $(x,y) \rightarrow xy$ sur $\mathbb{R}^2$ est continue, mais $|(x+h)y - xy| = |h| |y|$ n'est pas majoré par $C|h|$ uniformément en y .

Exemple :

Sur $C([0,1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, le produit $(f,g) \rightarrow fg$ est bilinéaire et $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$: il est continu. De même, $(f,g) \rightarrow \int_0^1 fg$ est continu. En dimension finie, toute application multilinéaire est continue, par exemple le déterminant $(C_1, \dots, C_n) \rightarrow \det(C_1, \dots, C_n)$.

VII. Normes matricielles

On identifie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à l'endomorphisme $x \rightarrow Ax$ de $\mathbb{K}^n$. Toute norme sur $\mathbb{K}^n$ induit alors une norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition :

Une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une **norme matricielle** si elle est sous-multiplicative :

$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$. Toute norme subordonnée $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \|Ax\| / \|x\|$ est matricielle et vérifie $\|I_n\| = 1$.

Propriété :

Pour $A = (a_{ij})$, les normes subordonnées à N_1 , N_∞ et N_2 valent

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^* A)},$$

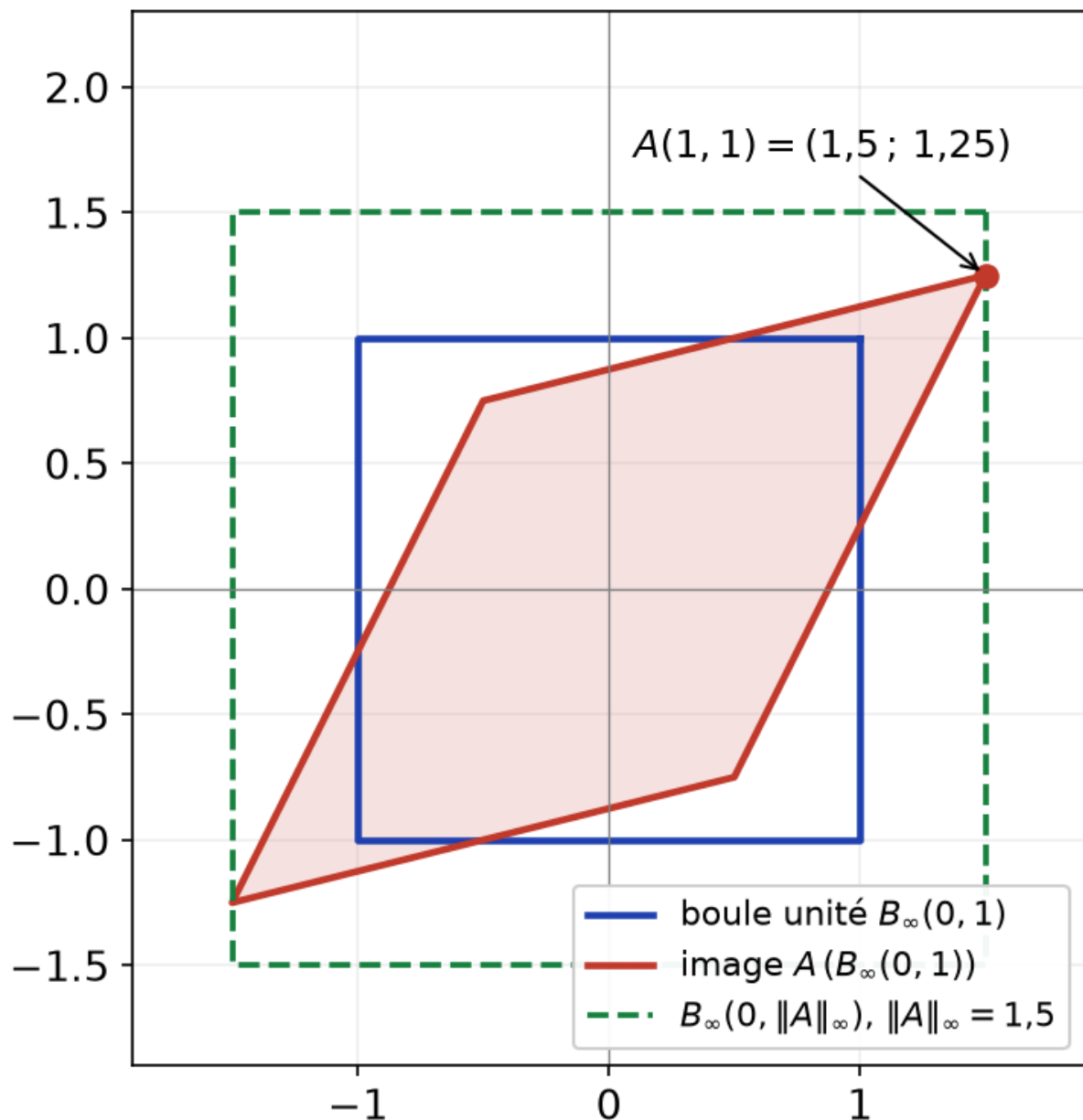
où ρ désigne le rayon spectral, c'est-à-dire le plus grand module des valeurs propres.

Démonstration :

Traisons $\|\cdot\|_\infty$. Notons $L = \max_i \sum_j |a_{ij}|$. Pour tout i ,

$|(Ax)_i| \leq \sum_j |a_{ij}| |x_j| \leq L N_\infty(x)$, donc $\|A\|_\infty \leq L$. Soit i_0 une ligne réalisant le maximum. On choisit x_j de module 1 tel que $a_{i_0 j} x_j = |a_{i_0 j}|$. Alors $N_\infty(x) = 1$ et $(Ax)_{i_0} = L$, d'où l'égalité. Le cas de $\|\cdot\|_1$ se traite de même en choisissant pour x un vecteur de la base canonique. Pour $\|\cdot\|_2$, on écrit $\|Ax\|_2^2 = \langle A^* A x, x \rangle$ et l'on diagonalise la matrice hermitienne positive $A^* A$ en base orthonormée.

La figure ci-dessous représente la boule unité de N_∞ et son image par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}$. Ici, $|A|_\infty = \max(3/2, 5/4) = 3/2$. L'image est un parallélogramme contenu dans la boule de rayon $3/2$, qu'il touche au point $A(1,1)$.



Proposition :

Pour toute norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(A) \leq |A|$. En conséquence, si $|A| < 1$, alors $I_n - A$ est inversible et $(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$.

Exemple :

La norme de Frobenius $\|A\|_F = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$ est matricielle, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Cependant, elle n'est subordonnée à aucune norme pour $n \geq 2$, car $\|I_n\|_F = \sqrt{n} \neq 1$.

Ce qu'il faut retenir

- Une norme vérifie séparation, homogénéité et inégalité triangulaire ; sa boule unité est convexe et symétrique.
- Deux normes sont équivalentes si $\alpha N \leq N' \leq \beta N$; elles ont alors mêmes suites convergentes et mêmes ouverts.
- Pour prouver une non-équivalence, on exhibe une suite sur laquelle le quotient N' / N n'est pas borné.
- Sur ℓ^1 et $C([a,b])$, les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
- Une application linéaire est continue si et seulement si $|u(x)| \leq C \|x\|$ pour une constante C .
- La norme subordonnée $\|u\|_{op}$ est la meilleure constante ; on la calcule par une majoration puis un vecteur ou une suite extrémale.
- En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et toute application linéaire est continue.
- En dimension infinie, il existe des formes linéaires non continues, comme $P \rightarrow P(2)$ pour la norme $\sup_{[0,1]}$.
- Une application multilinéaire est continue si et seulement si $|B(x_1, \dots, x_p)| \leq C \prod \|x_i\|$.
- Les normes subordonnées $\|A\|_1$ et $\|A\|_\infty$ sont les maxima des sommes par colonne et par ligne ; toutes vérifient $\rho(A) \leq \|A\|$.

Questions fréquentes sur espaces vectoriels normés

Comment montrer que deux normes ne sont pas équivalentes ?

On exhibe une suite de vecteurs non nuls sur laquelle le quotient $N'(x_k)/N(x_k)$ tend vers l'infini ou vers 0. Sur $C([0,1])$, les fonctions x^k ou des pics de plus en plus étroits donnent en général le résultat. Il suffit d'une seule suite pour réfuter l'équivalence.

Pourquoi toute application linéaire est-elle continue en dimension finie ?

On majore $|u(x)|$ par $(\sum |u(e_i)|) \max |x_i|$ dans une base. Cette inégalité donne la continuité pour la norme N_∞ . Comme toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, la continuité vaut pour n'importe quelle norme.

Comment calculer une norme subordonnée ?

On majore d'abord $|u(x)|$ par $C|x|$ avec la constante la plus fine possible. Ensuite, on cherche un vecteur qui réalise l'égalité, ou une suite de vecteurs dont le quotient tend vers C . La norme vaut alors exactement C , même si elle n'est pas atteinte.

Quelle est la différence entre norme matricielle et norme subordonnée ?

Une norme matricielle est simplement sous-multiplicative : $|AB| \leq |A| |B|$. Une norme subordonnée provient d'une norme sur $\mathbb{K}^n$ et vérifie en plus $|I_n| = 1$. La norme de Frobenius est matricielle mais pas subordonnée, car $|I_n|_F = \sqrt{n}$.

Pour aller plus loin en L3

- Les énoncés : [exercices de maths en L3 sur espaces vectoriels normés](#)
- À maîtriser avant : [Espaces métriques : ouverts, fermés, continuité](#)
- Chapitre précédent : [Espaces métriques : ouverts, fermés, continuité](#)
- Chapitre suivant : [Compacité et connexité](#)

- Le même thème en maths spé : [espaces vectoriels normés, cours de maths spé](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)