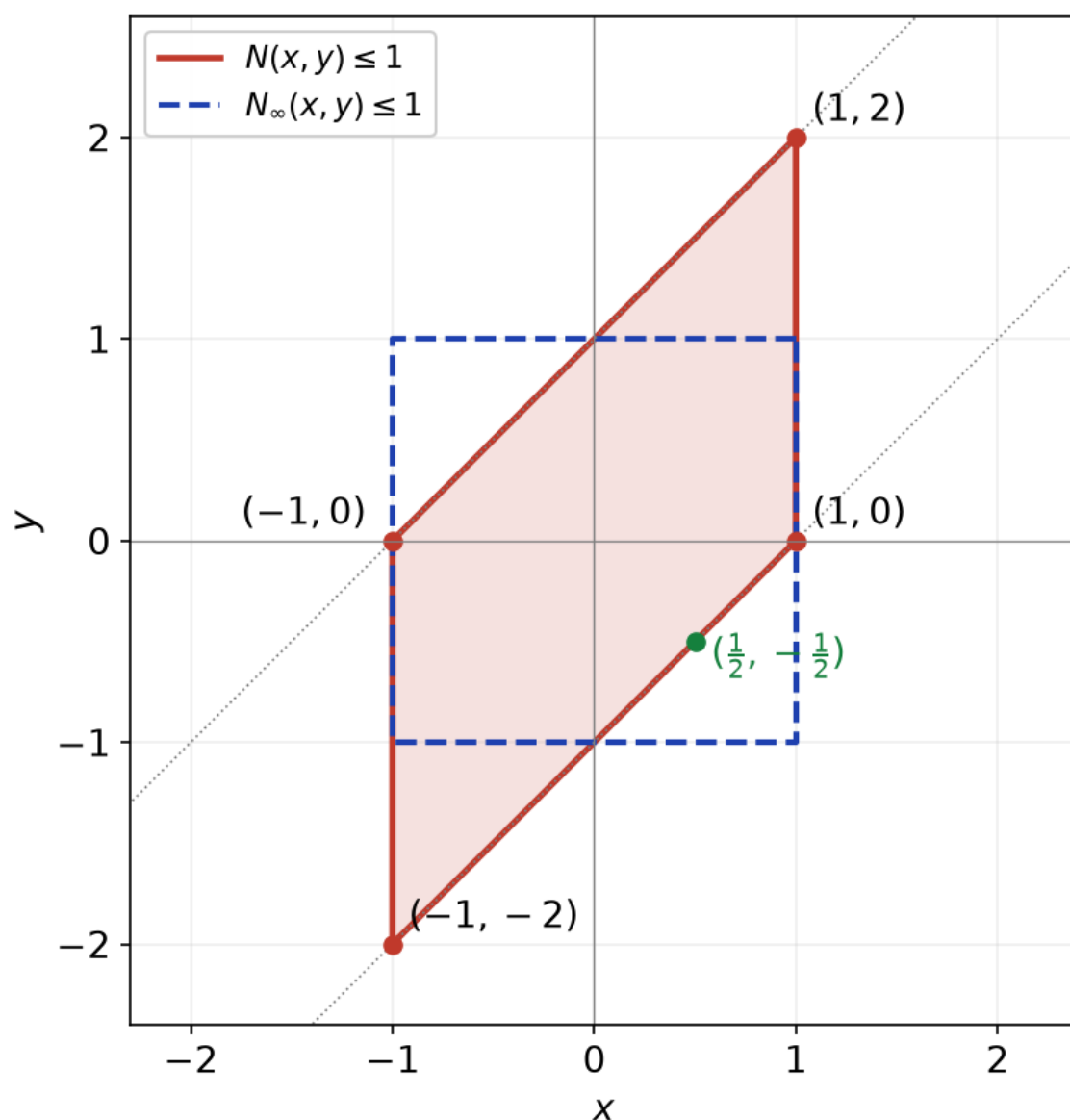


Espaces vectoriels normés

Corrigé de l'exercice 1 : Une norme sur $\mathbb{R}^2$ et sa boule unité

1. L'application N est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Si $N(x,y) = 0$, alors $|x| = 0$ et $|x - y| = 0$, donc $x = 0$ puis $y = x = 0$. Ensuite, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,
 $N(\lambda x, \lambda y) = \max(|\lambda| |x|, |\lambda| |x - y|) = |\lambda| N(x,y)$. Enfin, pour deux vecteurs (x,y) et (x',y') , on a $|x + x'| \leq |x| + |x'| \leq N(x,y) + N(x',y')$. De même,
 $|(x + x') - (y + y')| \leq |x - y| + |x' - y'| \leq N(x,y) + N(x',y')$. Le maximum des deux membres de gauche vérifie donc l'inégalité triangulaire. **Ainsi, N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.**
2. La condition $N(x,y) \leq 1$ équivaut à $-1 \leq x \leq 1$ et $x - 1 \leq y \leq x + 1$. C'est l'intersection d'une bande verticale et d'une bande oblique parallèle à la droite $y = x$. Pour $x = 1$, on obtient $y \in [0, 2]$; pour $x = -1$, on obtient $y \in [-2, 0]$. **La boule unité est le parallélogramme de sommets $(1,0)$, $(1,2)$, $(-1,0)$ et $(-1,-2)$.** La figure ci-dessous la compare au carré unité de N_∞ .



3. D'abord, $|x - y| \leq |x| + |y| \leq 2 N_{\infty}(x, y)$ et $|x| \leq N_{\infty}(x, y)$, donc $N \leq 2 N_{\infty}$. Pour $(1, -1)$, on trouve $N = \max(1, 2) = 2$ et $N_{\infty} = 1$: la constante $\beta = 2$ est optimale. Ensuite, $|x| \leq N(x, y)$ et $|y| \leq |x| + |y - x| \leq 2 N(x, y)$. Par conséquent, $N_{\infty} \leq 2 N$, soit $\frac{1}{2} N_{\infty} \leq N$. Pour $(1, 2)$, on a $N = \max(1, 1) = 1$ et $N_{\infty} = 2$: l'égalité est atteinte. **Les meilleures constantes sont $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 2$.** Sur la figure, le sommet $(1, 2)$ est le point de la boule de N le plus éloigné pour N_{∞} , et le point $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ le plus proche de l'origine.

Point de méthode : les constantes optimales se lisent sur le dessin, en cherchant les points des deux sphères unités qui se touchent ou s'éloignent le plus.

Corrigé de l'exercice 2 : Comparaison des normes usuelles de $\mathbb{K}^n$

1. Soit i_0 un indice tel que $|x_{i_0}| = N_\infty(x)$. Alors

$$N_\infty(x)^2 = |x_{i_0}|^2 \leq \sum_i |x_i|^2 = N_2(x)^2. \text{ Ensuite, en développant,}$$
$$N_1(x)^2 = \sum_i |x_i|^2 + \sum_{i \neq j} |x_i| |x_j| \geq N_2(x)^2. \text{ Donc } N_\infty \leq N_2 \leq N_1.$$

2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $(|x_1|, \dots, |x_n|)$ et $(1, \dots, 1)$ donne

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot |x_i| \leq \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n} N_2(x).$$

De plus, $\sum_i |x_i|^2 \leq n N_\infty(x)^2$. Donc $N_1 \leq \sqrt{n} N_2$ et $N_2 \leq \sqrt{n} N_\infty$.

3. Pour $x = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, on a $N_\infty(e_1) = N_2(e_1) = N_1(e_1) = 1$. Ainsi, les inégalités $N_\infty \leq N_2$ et $N_2 \leq N_1$ sont des égalités en e_1 . Pour $x = (1, \dots, 1)$, on a $N_\infty = 1$, $N_2 = \sqrt{n}$ et $N_1 = n$. Donc $N_1 = \sqrt{n} N_2$ et $N_2 = \sqrt{n} N_\infty$ en ce vecteur. **Toutes les constantes sont optimales.** On en déduit aussi $N_\infty \leq N_1 \leq n N_\infty$, avec égalités en e_1 et en $(1, \dots, 1)$.

Corrigé de l'exercice 3 : Suites sommables et suites bornées

1. Soit $u \in \ell^1$. Pour tout n , $|u_n| \leq \sum_k |u_k| = \|u\|_1$. Ainsi, u est bornée et $\|u\|_\infty \leq \|u\|_1$. La suite constante $w = (1, 1, \dots)$ est bornée, mais $\sum |w_n|$ diverge. Donc $\ell^1 \not\subset \ell^\infty$ et $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1$ sur ℓ^1 .
2. La suite $v^{(k)}$ a k termes non nuls, tous égaux à $1/k$. Donc $\|v^{(k)}\|_1 = k \cdot \frac{1}{k} = 1$ et $\|v^{(k)}\|_\infty = \frac{1}{k}$.
3. Le quotient $\|v^{(k)}\|_1 / \|v^{(k)}\|_\infty = k$ n'est pas borné. Par conséquent, il n'existe aucune constante β telle que $\|u\|_1 \leq \beta \|u\|_\infty$ sur ℓ^1 . **Les deux normes ne sont pas équivalentes.**
Dans $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$, on a $\|v^{(k)}\|_\infty = 1/k \rightarrow 0$: **la suite converge vers 0**. Dans

$(\ell^1, \dots, \ell^1)$, supposons qu'elle converge vers w . Pour tout n ,
 $|v_n^{(k)} - w_n| \leq |v^{(k)} - w|_1 \rightarrow 0$. Or $v_n^{(k)} = 1/k \rightarrow 0$ dès que $k > n$, donc
 $w_n = 0$. Alors $|v^{(k)}|_1 \rightarrow 0$, ce qui contredit $|v^{(k)}|_1 = 1$. **La suite diverge dans**
 $(\ell^1, \dots, \ell^1)$.

Corrigé de l'exercice 4 : Normes intégrales sur $C([0,1])$

1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales donne $\int_0^1 |f| \cdot 1 \leq \left(\int_0^1 f^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^1 1 \right)^{1/2}$,
 soit $|f|_1 \leq |f|_2$. Ensuite, $f^2 \leq |f|_\infty^2$ sur $[0,1]$, donc $\int_0^1 f^2 \leq |f|_\infty^2$. **D'où**
 $|f|_1 \leq |f|_2 \leq |f|_\infty$.

2. La fonction f_n vaut $1 - nx$ sur $[0, 1/n]$ et 0 ensuite. Elle est positive et maximale en 0
 , donc $|f_n|_\infty = 1$. Ensuite,

$$|f_n|_1 = \int_0^{1/n} (1 - nx) \, dx = \frac{1}{n} - \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}, \quad |f_n|_2^2 = \int_0^{1/n} (1 - nx)^2 \, dx = \left[-\frac{(1 - nx)^3}{3n} \right]_0^{1/n} = \frac{1}{3n}.$$

Donc $|f_n|_1 = \frac{1}{2n}$, $|f_n|_2 = \frac{1}{\sqrt{3n}}$ **et** $|f_n|_\infty = 1$.

3. On calcule les quotients : $|f_n|_\infty / |f_n|_1 = 2n$, puis $|f_n|_\infty / |f_n|_2 = \sqrt{3n}$, enfin
 $|f_n|_2 / |f_n|_1 = \frac{2n}{\sqrt{3n}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{3}}$. Ces trois quotients tendent vers $+\infty$. Ainsi, aucune des
 inégalités $|f|_\infty \leq \beta |f|_1$, $|f|_\infty \leq \beta |f|_2$, $|f|_2 \leq \beta |f|_1$ ne peut être vraie. **Deux**
quelconques des trois normes ne sont pas équivalentes.

Point de méthode : une fois les inégalités « faciles » établies, une seule famille de fonctions bien choisie
 suffit à réfuter toutes les inégalités inverses.

Corrigé de l'exercice 5 : Une norme de type C^1

1. Pour $f \in E$, f' est continue sur le segment $[0,1]$, donc bornée : $N(f)$ est un réel positif. L'homogénéité est immédiate. Pour l'inégalité triangulaire, $|f(0) + g(0)| \leq |f(0)| + |g(0)|$ et $|f' + g'|_\infty \leq |f'|_\infty + |g'|_\infty$. Enfin, si $N(f) = 0$, alors $f' = 0$, donc f est constante, et $f(0) = 0$: $f = 0$. **N est une norme sur E .**
2. Soit $x \in [0,1]$. Comme f est de classe C^1 , le théorème fondamental de l'analyse donne $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$. Donc $|f(x)| \leq |f(0)| + x |f'|_\infty \leq N(f)$. **En passant au sup, $|f|_\infty \leq N(f)$.**
3. Pour $p_n(x) = x^n$ avec $n \geq 1$, on a $|p_n|_\infty = 1$, $p_n(0) = 0$ et $p'_n(x) = n x^{n-1}$, d'où $|p'_n|_\infty = n$. Ainsi, $N(p_n) / |p_n|_\infty = n \rightarrow +\infty$. **Il n'existe donc aucune constante β avec $N \leq \beta \|\cdot\|_\infty$: les normes ne sont pas équivalentes.**
4. L'application D est linéaire. Pour la norme N , on a $|Df|_\infty = |f'|_\infty \leq N(f)$. **Donc D est continue de (E, N) dans $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, de norme au plus 1 (et exactement 1, en prenant $f(x) = x$).** En revanche, pour $\|\cdot\|_\infty$ au départ, $|Dp_n|_\infty = n$ alors que $|p_n|_\infty = 1$. **Donc D n'est pas continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.**

Corrigé de l'exercice 6 : Deux normes non équivalentes sur $R[X]$

1. Un polynôme est continu, donc borné sur un segment : N_1 et N_2 sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Homogénéité et inégalité triangulaire découlent de celles de la valeur absolue, par passage au sup. Si $N_1(P) = 0$, alors P s'annule sur $[0,1]$, qui est infini ; donc $P = 0$. Il en va de même pour N_2 . **N_1 et N_2 sont des normes.**
2. Pour $P_n = X^n$, la fonction $x \rightarrow x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc $N_1(X^n) = 1$ et $N_2(X^n) = 3^n$. Si l'on avait $N_2 \leq C N_1$, on aurait $3^n \leq C$ pour tout n , ce qui est absurde. **Aucune constante C ne convient.**
3. Pour $Q_n = (3 - X)^n$, la fonction $x \rightarrow (3 - x)^n$ est décroissante sur $[0,3]$ et positive.

Donc $N_1(Q_n) = Q_n(0) = 3^n$ et $N_2(Q_n) = Q_n(2) = 1$. Comme précédemment, $N_1 \leq C N_2$ donnerait $3^n \leq C$ pour tout n . **Aucune constante ne convient non plus dans ce sens.** La figure de l'énoncé illustre cette symétrie : x^3 est petit sur $[0,1]$ et grand sur $[2,3]$, et c'est l'inverse pour $(3-x)^3$.

4. L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie $n+1$. Or toutes les normes y sont équivalentes. **Les restrictions de N_1 et N_2 à $\mathbb{R}_n[X]$ sont équivalentes** ; les constantes dépendent de n et tendent vers l'infini avec n , d'après les questions précédentes (elles sont au moins 3^n).

Corrigé de l'exercice 7 : Continuité de formes linéaires sur $C([0,1])$

1. La linéarité de ψ vient de celle de l'intégrale. Ensuite,

$$|\psi(f)| \leq \int_0^1 t |f(t)| dt \leq |f|_\infty \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} |f|_\infty. \text{ Donc } \psi \text{ est continue et } |\psi|_{\text{op}} \leq \frac{1}{2}. \text{ Pour } f = 1, \text{ on a } |f|_\infty = 1 \text{ et } \psi(1) = \frac{1}{2}. \text{ Donc } |\psi|_{\text{op}} = \frac{1}{2}.$$

2. La forme χ est linéaire et $|\chi(f)| \leq |f(0)| + |f(1)| \leq 2 |f|_\infty$. Pour $f = 1$, $\chi(1) = 2$. **Donc χ est continue et $|\chi|_{\text{op}} = 2$.**

3. De même, $|\theta(f)| \leq 2 |f|_\infty$. Cette fois, $f = 1$ donne $\theta(1) = 0$: il faut un autre candidat. Le cas d'égalité demande $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$. La fonction $f(t) = 1 - 2t$ convient : $|f|_\infty = 1$ et $\theta(f) = 1 - (-1) = 2$. **Donc $|\theta|_{\text{op}} = 2$.**

Point de méthode : on lit dans chaque majoration les conditions d'égalité, puis on fabrique une fonction qui les satisfait toutes.

Corrigé de l'exercice 8 : Une norme subordonnée non atteinte

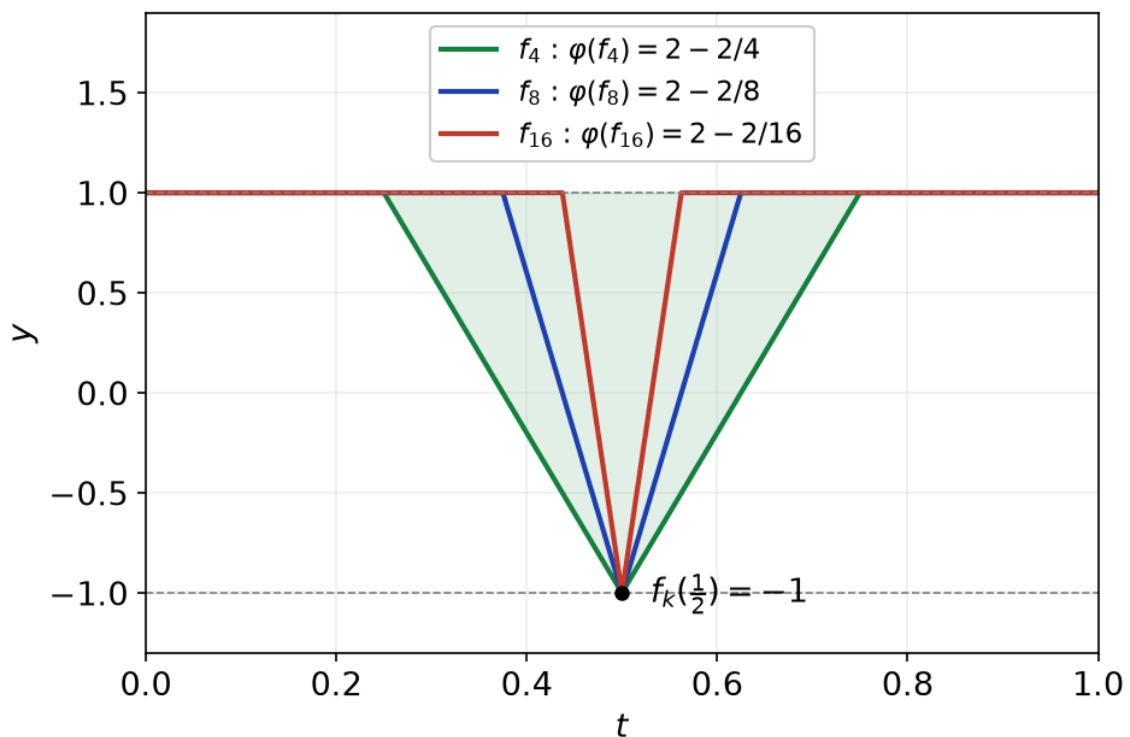
1. La forme φ est linéaire. De plus,

$|\varphi(f)| \leq \int_0^1 |f| + |f(1/2)| \leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty$. **Donc φ est continue et $\|\varphi\|_{\text{op}} \leq 2$.**

2. La fonction f_k est continue, à valeurs dans $[-1, 1]$, et $\|f_k\|_\infty = 1$. Hors de l'intervalle $I_k = [\frac{1}{2} - \frac{1}{k}, \frac{1}{2} + \frac{1}{k}]$, on a $1 - f_k = 0$. Sur I_k , le graphe de $1 - f_k$ est un triangle de base $\frac{2}{k}$ et de hauteur 2. Donc $\int_0^1 (1 - f_k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{k} \cdot 2 = \frac{2}{k}$, et $\int_0^1 f_k = 1 - \frac{2}{k}$. Comme $f_k(1/2) = -1$, on obtient

$$\varphi(f_k) = 1 - \frac{2}{k} + 1 = 2 - \frac{2}{k}.$$

Par conséquent, $\|\varphi\|_{\text{op}} \geq 2 - \frac{2}{k}$ pour tout $k \geq 3$. **En faisant tendre k vers l'infini,** $\|\varphi\|_{\text{op}} = 2$. La figure ci-dessous montre les fonctions f_k : l'aire hachurée, perdue par rapport à la constante 1, vaut $2/k$.



3. Supposons $\|f\|_\infty = 1$ et $|\varphi(f)| = 2$. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer $\varphi(f) = 2$. Comme $\int_0^1 f \leq 1$ et $-f(1/2) \leq 1$, il faut $\int_0^1 f = 1$ et $f(1/2) = -1$. Or $1 - f$ est continue, positive et d'intégrale nulle : elle est identiquement nulle. Donc $f = 1$, ce qui contredit $f(1/2) = -1$. **La norme de φ n'est pas atteinte.**

Corrigé de l'exercice 9 : Évaluation en un point et choix de la norme

1. La forme δ_0 est linéaire et $|\delta_0(f)| = |f(0)| \leq |f|_\infty$. Pour $f = 1$, il y a égalité. **Donc δ_0 est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et $|\delta_0|_{\text{op}} = 1$.**
2. On a $|g_n|_1 = \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n+1}$ et $\delta_0(g_n) = 1$. Ainsi, $g_n \rightarrow 0$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$, mais $\delta_0(g_n)$ ne tend pas vers $\delta_0(0) = 0$. **Donc δ_0 n'est pas continue en 0 pour $\|\cdot\|_1$.**
3. L'ensemble $H = \delta_0^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par une application continue. **Donc H est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.**
4. Soit $f \in E$. Posons $h_n = f - f(0)g_n$. Alors $h_n(0) = f(0) - f(0) = 0$, donc $h_n \in H$. De plus, $|f - h_n|_1 = |f(0)| |g_n|_1 = \frac{|f(0)|}{n+1} \rightarrow 0$. **Tout élément de E est limite d'éléments de H pour $\|\cdot\|_1$: H est dense.** Comme $H \neq E$, il n'est pas fermé pour cette norme, conformément au critère du cours.

Corrigé de l'exercice 10 : Dérivation des polynômes

1. On a $N_\infty(X^n) = 1$ et $D(X^n) = nX^{n-1}$, d'où $N_\infty(DX^n) = n$ pour $n \geq 1$. S'il existait C avec $N_\infty(DP) \leq C N_\infty(P)$, on aurait $n \leq C$ pour tout n . **Donc D n'est pas continue pour N_∞ .**
2. De même, $|X^n| = \sup_{[0,1]} x^n = 1$ et $|DX^n| = \sup_{[0,1]} n x^{n-1} = n$. **Donc D n'est pas continue pour $\sup_{[0,1]} |\cdot|$.**
3. La somme définissant $N(P)$ est finie. Si $N(P) = 0$, tous les a_k sont nuls. Homogénéité et inégalité triangulaire viennent de celles de la valeur absolue. Donc N est une norme. Ensuite, si

$P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$, alors $DP = \sum_{k \geq 1} k a_k X^{k-1}$, dont le coefficient de degré j est $(j+1) a_{j+1}$. Donc

$$N(DP) = \sum_{j \geq 0} j! (j+1) |a_{j+1}| = \sum_{k \geq 1} k! |a_k| \leq N(P).$$

Ainsi, D est continue et $\|D\|_{\text{op}} \leq 1$. Pour $P = X$, on a $N(X) = 1! = 1$ et $N(DX) = N(1) = 0! = 1$. **Donc** $\|D\|_{\text{op}} = 1$.

Point de méthode : la continuité d'un opérateur dépend des normes ; ici, les poids $k!$ compensent exactement le facteur k créé par la dérivation.

Corrigé de l'exercice 11 : Opérateur de Volterra

1. Pour f continue, Vf est la primitive de f nulle en 0 . Elle est de classe C^1 , donc continue. La linéarité de l'intégrale donne celle de V . **Ainsi, V est un endomorphisme de E .**

2. Pour $x \in [0,1]$, $|Vf(x)| \leq \int_0^x |f| \leq x \|f\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$. Donc $\|Vf\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$: V est continue et $\|V\|_{\text{op}} \leq 1$. Pour $f = 1$, $Vf(x) = x$, donc $\|Vf\|_{\infty} = 1 = \|f\|_{\infty}$. **Donc $\|V\|_{\text{op}} = 1$, et cette norme est atteinte.**

3. On a $|Vf(x)| \leq \int_0^x |f(t)| dt$. On intègre en x , puis on échange l'ordre d'intégration sur le triangle $0 \leq t \leq x \leq 1$ (théorème de Fubini pour une fonction continue) :

$$\|Vf\|_1 \leq \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)| dt \right) dx = \int_0^1 |f(t)| \left(\int_t^1 dx \right) dt = \int_0^1 (1-t) |f(t)| dt.$$

Comme $1-t \leq 1$, il vient $\|Vf\|_1 \leq \|f\|_1$: V est continue pour $\|\cdot\|_1$.

4. D'abord, $\|h_n\|_1 = 2n \int_0^{1/n} (1-nt) dt = 2n \cdot \frac{1}{2n} = 1$. Ensuite, $h_n \geq 0$, donc $Vh_n \geq 0$, et le calcul précédent devient une égalité :

$$|V h_n|_1 = \int_0^1 (1-t) h_n(t) dt = 1 - \int_0^{1/n} 2n t (1-nt) dt = 1 - 2n \left(\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^2} \right) = 1 - \frac{1}{3n}.$$

Donc la norme de V pour ℓ^1 est au moins $1 - \frac{1}{3n}$ pour tout n ; avec la question 3, **elle vaut exactement 1**. Enfin, si $f \neq 0$, la fonction continue positive $t |f(t)|$ n'est pas

identiquement nulle. Donc $\int_0^1 t |f(t)| dt > 0$, et $|Vf|_1 \leq |f|_1 - \int_0^1 t |f(t)| dt < |f|_1$. **La norme n'est pas atteinte.**

Corrigé de l'exercice 12 : Opérateurs de multiplication sur ℓ^1

1. Pour $u \in \ell^1$, on a $|a_n u_n| \leq |a|_\infty |u_n|$. Par comparaison, la série $\sum a_n u_n$ converge absolument et $|M_a u|_1 \leq |a|_\infty |u|_1$. L'application M_a est clairement linéaire. Donc M_a est un endomorphisme continu de ℓ^1 , avec $|M_a|_{op} \leq |a|_\infty$. Ensuite, $|e_n|_1 = 1$ et $|M_a e_n|_1 = |a_n|$, donc $|M_a|_{op} \geq |a_n|$ pour tout n . **En passant au sup,**
 $|M_a|_{op} = |a|_\infty$.
2. Posons $s = |a|_\infty$. Si $|a_m| = s$ pour un indice m , alors $|M_a e_m|_1 = s |e_m|_1$: la norme est atteinte. Réciproquement, supposons $|M_a u|_1 = s |u|_1$ avec $u \neq 0$. Alors $\sum_n (s - |a_n|) |u_n| = 0$, avec des termes positifs. Donc $|a_n| = s$ pour tout n tel que $u_n \neq 0$, et un tel n existe. **La norme est atteinte si et seulement si $\sup_n |a_n|$ est un maximum.**
3. Prenons $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Alors $|a|_\infty = 1$, mais $|a_n| < 1$ pour tout n . **La norme $|M_a|_{op} = 1$ n'est pas atteinte.**
4. Soit $u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, qui définit une suite de ℓ^1 . Pour $n \geq 1$,
 $n u_n = \frac{n}{(n+1)^2} \geq \frac{n}{(2n)^2} = \frac{1}{4n}$. Par comparaison avec la série harmonique, $\sum n u_n$ diverge. **Donc $M_a u \notin \ell^1$: la formule ne définit pas un endomorphisme de ℓ^1 lorsque a n'est pas bornée.**

Corrigé de l'exercice 13 : Calculs de normes matricielles

1. Pour A , les sommes des modules par colonne valent $1 + 2 = 3$ et $2 + 1 = 3$, et par ligne 3 et 3 . Pour B , les sommes par colonne valent $3 + 4 = 7$ et 0 ; par ligne, 3 et 4 .
Donc $|A|_1 = |A|_\infty = 3$, $|B|_1 = 7$ et $|B|_\infty = 4$.

2. On a $Ax = (x_1 + 2x_2, -2x_1 + x_2)$, donc

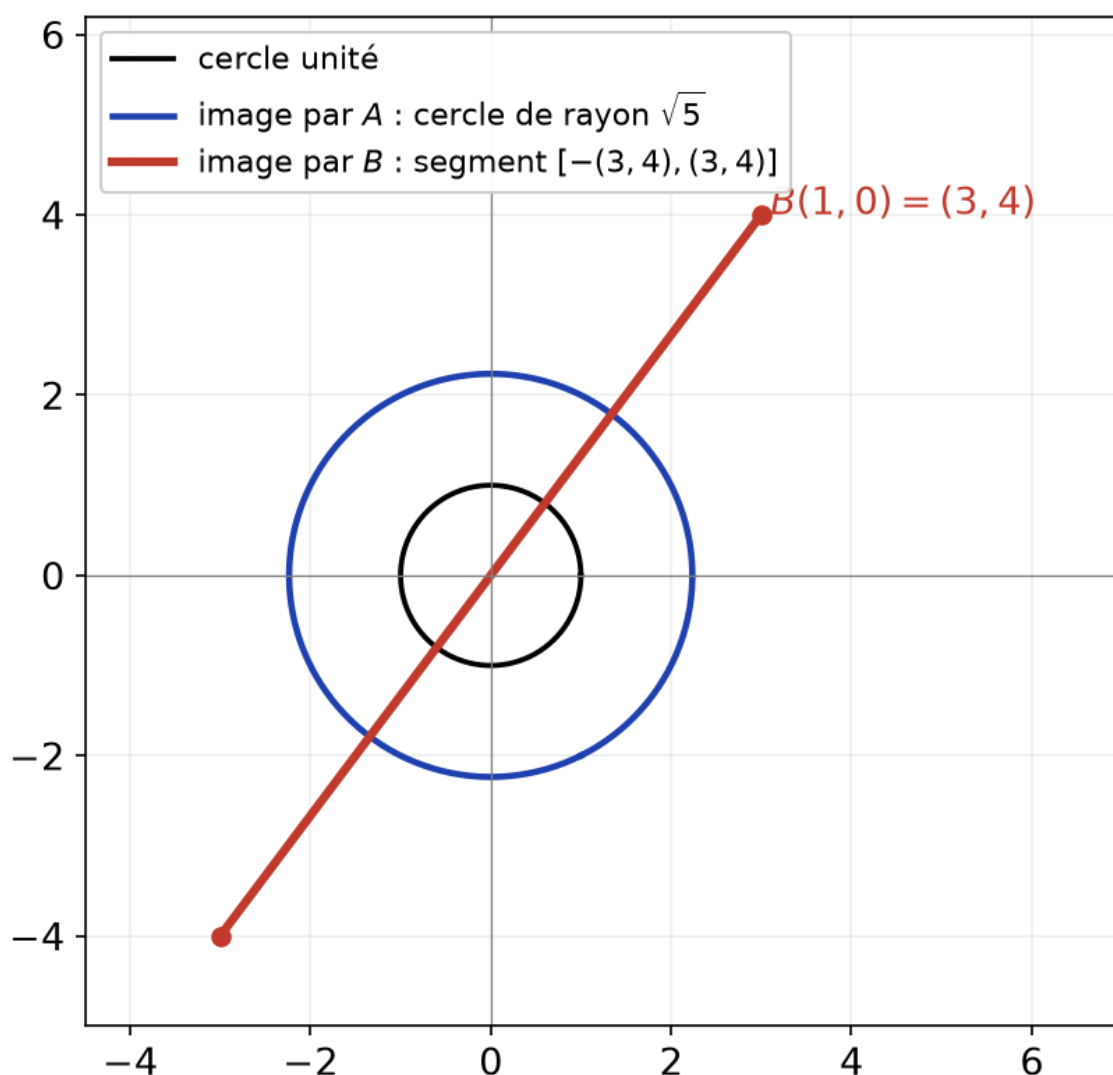
$$N_2(Ax)^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + (-2x_1 + x_2)^2 = 5x_1^2 + 5x_2^2 = 5 N_2(x)^2,$$

car les doubles produits $4x_1x_2$ et $-4x_1x_2$ se compensent. Ainsi,

$N_2(Ax) = \sqrt{5} N_2(x)$ pour tout x : A est $\sqrt{5}$ fois une isométrie. Ensuite,

$Bx = (3x_1, 4x_1)$, donc $N_2(Bx) = 5|x_1| \leq 5 N_2(x)$, avec égalité pour $x = (1, 0)$.

Donc $|A|_2 = \sqrt{5}$ et $|B|_2 = 5$. La figure ci-dessous montre l'image du cercle unité : un cercle de rayon $\sqrt{5}$ pour A , un segment de demi-longueur 5 pour B .



3. Le polynôme caractéristique de A est $(1 - \lambda)^2 + 4$, de racines $1 \pm 2i$, de module $\sqrt{5}$. Celui de B est $\lambda(\lambda - 3)$, de racines 0 et 3 . Donc $\rho(A) = \sqrt{5}$ et $\rho(B) = 3$. Par ailleurs, $\|A\|_F = \sqrt{1+4+4+1} = \sqrt{10}$ et $\|B\|_F = \sqrt{9+16} = 5$. On obtient $\rho(A) = \|A\|_2 = \sqrt{5} < 3 < \sqrt{10}$ et $\rho(B) = 3 < 4 < 5 = \|B\|_2 = \|B\|_F < 7$. Le rayon spectral minore bien toutes les normes subordonnées, et la valeur de la norme dépend fortement de la norme choisie sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé de l'exercice 14 : Formules des normes subordonnées N_1 et N_∞

- Notons $L = \max_i \sum_j |a_{ij}|$. Pour tout x et tout i ,

$$|(Ax)_i| \leq \sum_j |a_{ij}| |x_j| \leq L \|x\|_\infty$$
, donc $\|A\|_\infty \leq L$. Soit i_0 une ligne réalisant le maximum, et $x_j = 1$ si $a_{i_0 j} \geq 0$, $x_j = -1$ sinon. Alors $\|x\|_\infty = 1$ et

$$(Ax)_{i_0} = \sum_j |a_{i_0 j}| = L$$
. Donc $\|Ax\|_\infty \geq L$. Ainsi, $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$.
- Notons $K = \max_j \sum_i |a_{ij}|$. On a

$$\|Ax\|_1 = \sum_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \sum_j |x_j| \sum_i |a_{ij}| \leq K \|x\|_1$$
,
 après échange des deux sommes finies. Soit j_0 une colonne réalisant le maximum. Alors $A e_{j_0}$ est la colonne j_0 , donc $\|A e_{j_0}\|_1 = K$ et $\|e_{j_0}\|_1 = 1$. Ainsi,

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$
.
- Les lignes de A^T sont les colonnes de A . Donc les sommes par ligne de A^T sont les sommes par colonne de A . **Par conséquent**, $\|A^T\|_\infty = \|A\|_1$.
- Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|(AB)_{ij}|^2 = \left| \sum_k a_{ik} b_{kj} \right|^2 \leq \left(\sum_k |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_k |b_{kj}|^2 \right)$$
. En sommant sur i et j , on obtient $\|AB\|_F^2 \leq \|A\|_F^2 \|B\|_F^2$: la norme de Frobenius est sous-multiplicative. Cependant, toute norme subordonnée vérifie $\|I_n\| = \sup_{x \neq 0} \|x\| / |x| = 1$, alors que $\|I_n\|_F = \sqrt{n}$. **Pour $n \geq 2$, la norme de Frobenius n'est subordonnée à aucune norme.**

Corrigé de l'exercice 15 : Rayon spectral et série de Neumann

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors $|\lambda| \|x\| = |\lambda x| = \|Ax\| \leq \|A\|_{\text{op}} \|x\|$. En divisant par $\|x\| > 0$, $|\lambda| \leq \|A\|_{\text{op}}$. **En prenant le maximum sur les valeurs propres, $\rho(A) \leq \|A\|_{\text{op}}$.**
2. La matrice N est triangulaire à diagonale nulle : sa seule valeur propre est 0 , donc $\rho(N) = 0$. Pourtant $N \neq 0$, donc $\|N\|_{\text{op}} > 0$ (par exemple, $\|N\|_{\infty} = 1$). **L'inégalité est stricte, et ρ ne vérifie pas l'axiome de séparation : ce n'est pas une norme.**
3. Posons $q = \|A\|_{\text{op}} < 1$. Par sous-multiplicativité, $\|A^k\|_{\text{op}} \leq q^k$, terme général d'une série géométrique convergente. Donc $\sum A^k$ converge absolument. Or $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, donc complet : une série absolument convergente y converge. Notons S sa somme et $S_m = \sum_{k=0}^m A^k$. On a $(I_n - A) S_m = S_m (I_n - A) = I_n - A^{m+1}$, et $A^{m+1} \rightarrow 0$. Par continuité du produit, $(I_n - A) S = S (I_n - A) = I_n$. Enfin, $\|S\|_{\text{op}} \leq \sum q^k = \frac{1}{1-q}$. **Donc $I_n - A$ est inversible, d'inverse $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$, et $\|(I_n - A)^{-1}\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{1-\|A\|_{\text{op}}}$.**
4. Ici, $\|A\|_{\infty} = \max(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}$. La borne annoncée est $\frac{1}{1-1/2} = 2$. Directement, $I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix}$ a pour déterminant $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Donc $(I_2 - A)^{-1} = \frac{6}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/5 & 3/5 \\ 2/5 & 6/5 \end{pmatrix}$. Les sommes par ligne valent $\frac{9}{5}$ et $\frac{8}{5}$. **Donc $\|(I_2 - A)^{-1}\|_{\infty} = \frac{9}{5} \leq 2$: la majoration est vérifiée.**

Corrigé de l'exercice 16 : Équivalence des normes sur $\mathbb{R}_n[X]$

1. Positivité, homogénéité et inégalité triangulaire sont immédiates. Si $N(P) = 0$, alors $P(0) = P(1) = \dots = P(n) = 0$. Le polynôme P , de degré au plus n , a alors $n+1$

racines distinctes, donc il est nul. **N est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.** En revanche, sur $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, le polynôme $X(X-1)\dots(X-n)$ est non nul et vérifie $N = 0$. **Ce n'est plus une norme.**

2. L'application $|Q| = \sup_{[0,1]} |Q|$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$, car un polynôme nul sur $[0,1]$ est nul. L'application $D: P \rightarrow P'$ est linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même. Or $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, donc D est continue de $(\mathbb{R}_n[X], N)$ dans $(\mathbb{R}_n[X], \|\cdot\|)$. **Il existe donc $C_n > 0$ tel que $\sup_{[0,1]} |P'| \leq C_n N(P)$.**
3. Pour $P = a + bX$, on a $P' = b = P(1) - P(0)$. Donc $\sup_{[0,1]} |P'| = |b| \leq |P(0)| + |P(1)| = N(P)$, ce qui prouve $C_1 \leq 1$. Pour $P = X$, $N(X) = 0 + 1 = 1$ et $P' = 1$. **La meilleure constante est $C_1 = 1$.**
4. L'hypothèse s'écrit $N(P_m) \rightarrow 0$. Sur $\mathbb{R}_n[X]$, la norme $N'(P) = \max_k |a_k|$ est équivalente à N . Donc $N'(P_m) \rightarrow 0$: **les coefficients de P_m tendent vers 0.** Enfin, pour $x \in [0,1]$, $|P_m(x)| \leq \sum_k |a_k^{(m)}| \leq (n+1) N'(P_m)$. **Donc $P_m \rightarrow 0$ uniformément sur $[0,1]$.**

Point de méthode : en dimension finie, on n'a jamais besoin de calculer les constantes d'équivalence pour obtenir une inégalité ; leur existence suffit.

Corrigé de l'exercice 17 : Applications bilinéaires continues

1. La bilinéarité vient de la linéarité de l'intégrale. De plus, $|B(f,g)| \leq \int_0^1 |f| |g| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.
Donc B est continue, avec $C = 1$. Pour $f = g = 1$, il y a égalité. **La meilleure constante vaut 1.**
2. On a $\|f_n\|_1 = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ et, d'après l'exercice 4,
$$B(f_n, f_n) = n^2 \int_0^{1/n} (1 - nx)^2 dx = n^2 \cdot \frac{1}{3n} = \frac{n}{3}.$$
 Si B était continue pour $\|\cdot\|_1$, il existerait C avec $\frac{n}{3} \leq C \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ pour tout n . **C'est absurde : B n'est pas continue**

sur $(E, \|\cdot\|_1)^2$.

3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $|B(f, g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$. Donc B est continue sur $(E, \|\cdot\|_2)^2$; c'est d'ailleurs le produit scalaire associé à $\|\cdot\|_2$.
4. Le produit de deux fonctions continues est continu, et B est bilinéaire. Pour tout x ,
 $|f(x)g(x)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$. Donc $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ et B est continue, de constante optimale 1 (atteinte en $f = g = 1$).

Corrigé de l'exercice 18 : Produit matriciel et ouverture de GL_n

1. Le produit matriciel est bilinéaire. De plus, une norme subordonnée est sous-multiplicative :
 $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$. D'après la caractérisation des applications bilinéaires continues,
 $(A, B) \mapsto AB$ est continue.
2. On écrit $A^2 - B^2 = A(A - B) + (A - B)B$. Attention, on n'a pas
 $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ en général, car A et B ne commutent pas. Il vient
 $\|A^2 - B^2\| \leq \|A\| \|A - B\| + \|A - B\| \|B\|$. Donc $\|A^2 - B^2\| \leq (\|A\| + \|B\|) \|A - B\|$.
3. Le déterminant est une application n -linéaire des colonnes. Or $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc toute application multilinéaire sur ce produit est continue. On peut aussi dire que $\det A$ est un polynôme en les coefficients. Ainsi, $\det$ est continue. Par conséquent,
 $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est ouvert, comme image réciproque d'un ouvert.
4. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. La fonction $t \mapsto \det(A - tI_n) = (-1)^n \chi_A(t)$ est polynomiale, de degré n , donc non nulle. Elle n'a qu'un nombre fini de racines. Il existe donc k_0 tel que
 $A_k = A - \frac{1}{k}I_n$ soit inversible pour $k \geq k_0$. Comme $\|A_k - A\| = \frac{1}{k} \rightarrow 0$, toute
matrice est limite de matrices inversibles : $GL_n(\mathbb{R})$ est dense.

Corrigé de l'exercice 19 : Opérateur à noyau

1. Par linéarité de l'intégrale, $Tf(x) = x \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 t f(t) dt$. C'est une fonction affine de x , donc continue. **Ainsi, T est un endomorphisme de E , d'image contenue dans $\mathbb{R}_1[X]$.**

2. Pour $x \in [0,1]$, on coupe l'intégrale en x :

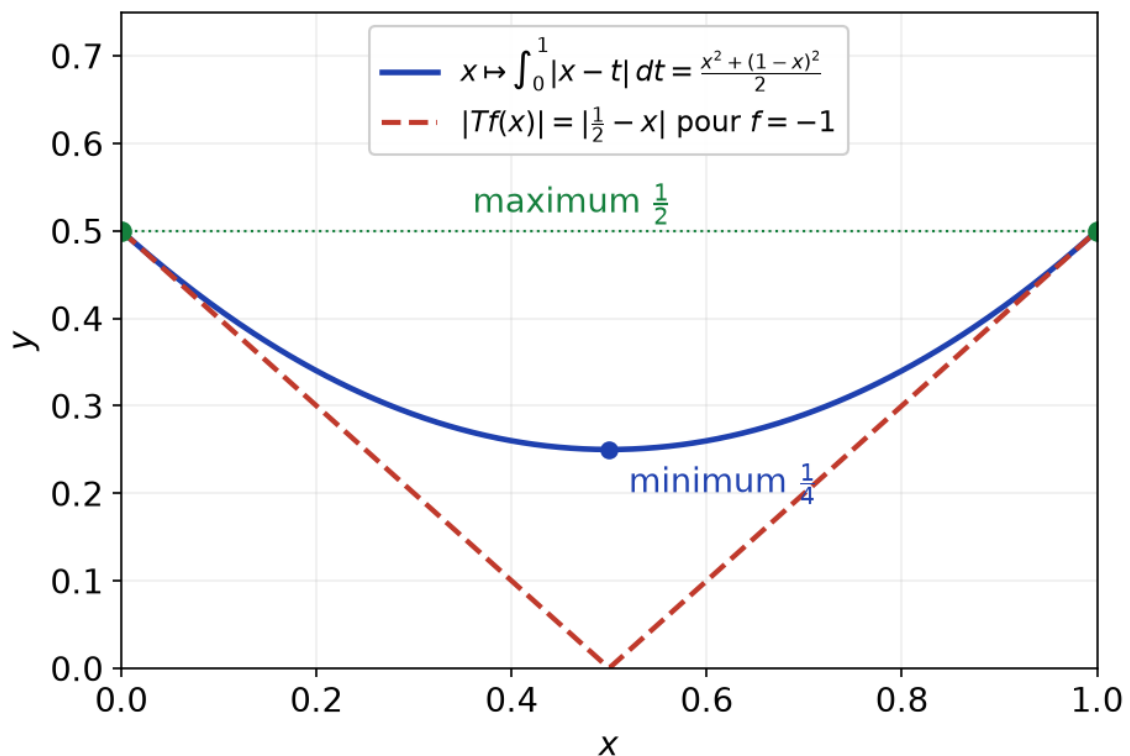
$$g(x) = \int_0^x (x-t) dt + \int_x^1 (t-x) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{(1-x)^2}{2}.$$

Cette fonction est un trinôme convexe, minimal en $x = \frac{1}{2}$ où il vaut $\frac{1}{4}$. Son maximum sur $[0,1]$ vaut $\frac{1}{2}$, atteint en 0 et en 1 . Ensuite,

$$|Tf(x)| \leq \int_0^1 |x-t| |f(t)| dt \leq g(x) |f|_\infty. \text{ Donc } |Tf|_\infty \leq \frac{1}{2} |f|_\infty \text{ et } |T|_{\text{op}} \leq \frac{1}{2}.$$

3. Pour $f = -1$, $Tf(x) = -\int_0^1 (x-t) dt = -(x - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - x$. Donc

$|Tf|_\infty = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} |f|_\infty$. **Par conséquent, $|T|_{\text{op}} = \frac{1}{2}$, et cette norme est atteinte.** La figure ci-dessous compare g et $|Tf|$: ils coïncident en $x = 0$ et $x = 1$, là où g est maximale.



Le choix $f = -1$ s'explique : en $x = 0$, le noyau $x - t = -t$ est négatif, donc on prend f égale au signe de $-t$, c'est-à-dire -1 .

4. Pour $x, t \in [0,1]$, on a $|x - t| \leq 1$. Donc $|Tf(x)| \leq \int_0^1 |f(t)| dt = |f|_1$ pour tout x .

Ainsi, $|Tf|_\infty \leq |f|_1$: T est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, de norme au plus 1.

Point de méthode : pour un opérateur à noyau continu K sur $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, on a toujours

$|T|_{op} \leq \sup_x \int_0^1 |K(x,t)| dt$; pour l'égalité, on choisit f proche du signe de $K(x_0, \cdot)$ au point x_0 qui réalise le sup.

Corrigé de l'exercice 20 : Dual de ℓ^1

1. Pour $u \in \ell^1$, $|a_n u_n| \leq |a|_\infty |u_n|$, donc la série $\sum a_n u_n$ converge absolument. La forme φ_a est bien définie et linéaire. De plus, $|\varphi_a(u)| \leq |a|_\infty \|u\|_1$, donc φ_a est continue et $|\varphi_a|_{op} \leq |a|_\infty$. Enfin, $|\varphi_a(e_n)| = |a_n|$ avec $\|e_n\|_1 = 1$. **Donc** $|\varphi_a|_{op} \geq \sup |a_n|$, **puis** $|\varphi_a|_{op} = |a|_\infty$.

2. La suite $u - S_N$ a ses termes nuls jusqu'au rang N et égaux à u_n ensuite. Donc $\|u - S_N\|_1 = \sum_{n > N} |u_n|$, reste d'une série convergente. **Ainsi**, $\|u - S_N\|_1 \rightarrow 0$: $S_N \rightarrow u$ dans ℓ^1 .

3. D'abord, $|a_n| = |\varphi(e_n)| \leq |\varphi|_{op} \|e_n\|_1 = |\varphi|_{op}$, donc $a \in \ell^\infty$ et $|a|_\infty \leq |\varphi|_{op}$. Ensuite, par linéarité, $\varphi(S_N) = \sum_{n=0}^N u_n a_n$. Comme φ est continue et $S_N \rightarrow u$, on a $\varphi(S_N) \rightarrow \varphi(u)$. Par ailleurs, $\sum_{n=0}^N a_n u_n \rightarrow \varphi_a(u)$ d'après la question 1. **Par unicité de la limite**, $\varphi(u) = \varphi_a(u)$ pour tout u : $\varphi = \varphi_a$.

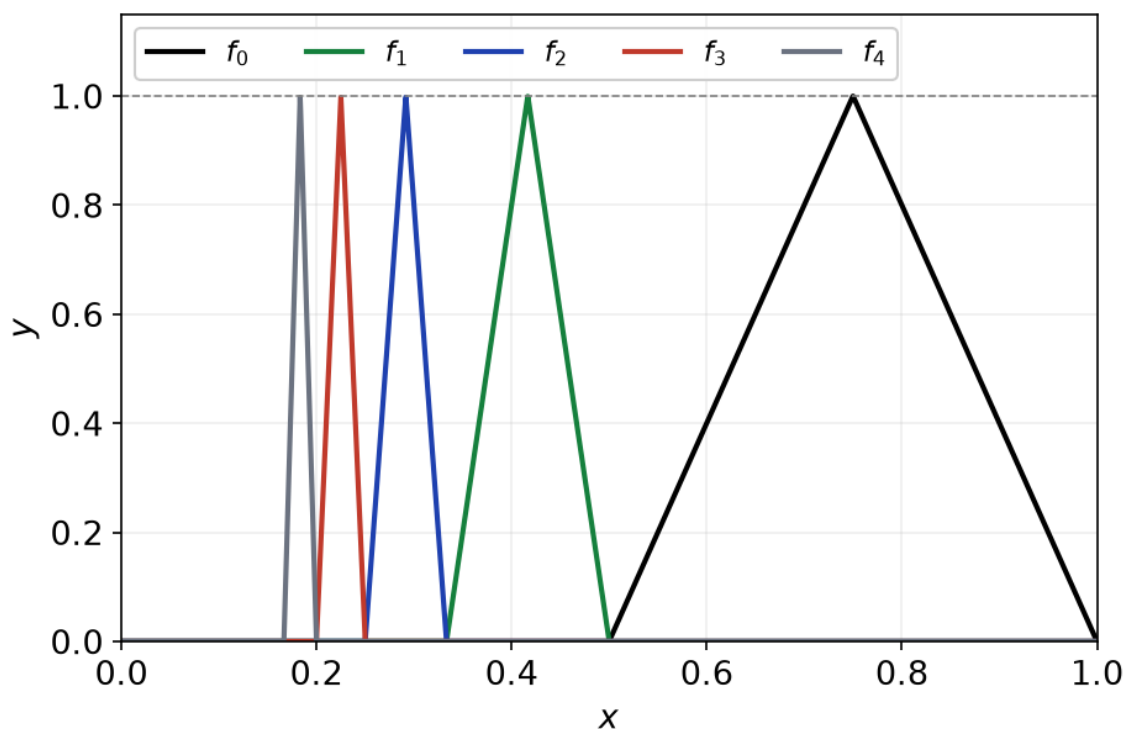
4. L'application $a \rightarrow \varphi_a$ est linéaire. D'après la question 1, elle conserve la norme, donc elle est injective. D'après la question 3, elle est surjective sur le dual topologique $(\ell^1)'$. **C'est donc une bijection linéaire isométrique de ℓ^∞ sur $(\ell^1)'$.**

5. Pour $u = (1, 1, \dots)$, la suite $u - S_N$ vaut 0 jusqu'au rang N , puis 1. Donc $|u - S_N|_\infty = 1$ pour tout N . **La suite (S_N) ne converge pas vers u dans ℓ^∞** : les e_n n'engendrent pas un sous-espace dense de ℓ^∞ , et l'argument de la question 3 ne s'y transpose pas.

Corrigé de l'exercice 21 : Problème : dimension finie contre dimension infinie

Partie A.

1. Notons $J_n = [\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}]$. La fonction f_n est continue, positive, nulle hors de J_n et vaut 1 au milieu de J_n , son maximum. Donc $|f_n|_\infty = 1$. Soit $n < m$. Alors $m+1 \geq n+2$, donc $\frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{n+2}$: les intervalles J_m et J_n se touchent au plus en une extrémité, où les deux fonctions sont nulles. Ainsi, en tout point, l'une au moins de $f_n(x)$, $f_m(x)$ est nulle, et $|f_n(x) - f_m(x)| = \max(f_n(x), f_m(x))$. **Donc** $|f_n - f_m|_\infty = 1$ **pour** $n \neq m$. La figure ci-dessous montre ces bosses à supports disjoints, qui s'accumulent vers 0.



2. Toute suite extraite $(f_{\sigma(n)})$ vérifie $|f_{\sigma(n)} - f_{\sigma(m)}|_{\infty} = 1$ pour $n \neq m$. Elle n'est donc pas de Cauchy, et ne converge pas. Ainsi, la suite (f_n) de la boule unité fermée n'a aucune valeur d'adhérence. **La boule unité fermée de E n'est pas compacte**, bien qu'elle soit fermée et bornée. En dimension finie, au contraire, toute norme est équivalente à N_{∞} , et le théorème de Bolzano-Weierstrass rend compacte toute partie fermée bornée.

Partie B.

1. Pour X^n , on a $|X^n| = 1$ et $\varphi(X^n) = 2^n$. La forme φ n'est donc pas bornée sur la boule unité. **Elle n'est pas continue.**
2. On a $|P_n| = \sup_{[0,1]} (x/2)^n = 2^{-n}$ et $\varphi(P_n) = (2/2)^n = 1$. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$.
Posons $Q_n = Q - \varphi(Q) P_n$. Alors $\varphi(Q_n) = \varphi(Q) - \varphi(Q) = 0$, donc $Q_n \in \ker \varphi$.
De plus, $|Q - Q_n| = |Q(2)| 2^{-n} \rightarrow 0$. **Donc $\ker \varphi$ est dense dans $\mathbb{R}[X]$** . C'est un hyperplan dense, donc non fermé.

Partie C.

1. Si φ est continue, $\ker \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue. **Il est donc fermé.**
2. Si φ n'est pas continue, elle n'est pas bornée sur la boule unité, d'après le théorème de caractérisation. Pour tout $n \geq 1$, il existe donc x_n avec $|x_n| \leq 1$ et $|\varphi(x_n)| \geq n$.
Posons $y_n = x_n / \varphi(x_n)$. Alors $\varphi(y_n) = 1$ et $|y_n| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Pour $x \in E$, le vecteur $x - \varphi(x) y_n$ appartient à $\ker \varphi$ et tend vers x . **Donc $\ker \varphi$ est dense dans E .**
3. Si φ est continue, son noyau est fermé. Réciproquement, supposons φ non continue. Alors $\varphi \neq 0$, donc $\ker \varphi \neq E$, et $\ker \varphi$ est dense : il ne peut pas être fermé, sinon il serait égal à son adhérence E . **Ainsi, φ est continue si et seulement si $\ker \varphi$ est fermé.** En dimension finie, toute forme linéaire est continue. **Par conséquent, tout hyperplan d'un espace normé de dimension finie est fermé.** La partie B montre que ce n'est plus vrai en dimension infinie.

Point de méthode : la construction $x - \varphi(x) y_n$ est la même dans les exercices 9 et 21 ; elle transforme une suite qui « met en défaut » la continuité en une approximation par des éléments du noyau.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

[Pour aller plus loin en L3](#)

- Le cours : [espaces vectoriels normés, cours de maths en L3](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L3 sur espaces vectoriels normés](#)
- À maîtriser avant : [Espaces métriques : ouverts, fermés, continuité](#)
- Chapitre précédent : [Espaces métriques : ouverts, fermés, continuité](#)
- Chapitre suivant : [Compacité et connexité](#)
- Le même thème en maths spé : [espaces vectoriels normés, exercices de maths spé](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)