

Espaces vectoriels

Exercice 1 : Reconnaître des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$

Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}^3$, dites si c'est un sous-espace vectoriel. Justifiez chaque réponse.

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$.
2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1\}$.
3. $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$.
4. $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y \text{ et } z = 0\}$.
5. $F_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \right\}$.

Exercice 2 : Sous-espaces de polynômes et de suites

Dites si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace indiqué.

1. $A = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(1) = 0\}$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. $B = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg P = 3\}$ dans $\mathbb{R}[X]$.
3. $C = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = P(1)\}$ dans $\mathbb{R}[X]$.

4. L'ensemble des suites réelles convergentes, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
5. L'ensemble des suites réelles (u_n) telles que $u_{n+1} = u_n + 1$ pour tout n , dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 3 : Sous-espaces de fonctions

On se place dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Dites si les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels de E .

1. L'ensemble des fonctions paires.
2. L'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = 1$.
3. L'ensemble des fonctions bornées.
4. L'ensemble des fonctions dérivables f telles que $f' = 3f$.
5. L'ensemble des fonctions croissantes.

Exercice 4 : Appartenance à un sous-espace engendré

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $F = \text{Vect}(u, v)$.

1. Le vecteur $a = (1, 2, 3)$ appartient-il à F ? Si oui, donnez ses coordonnées dans la famille (u, v) .
2. Le vecteur $b = (1, 1, 1)$ appartient-il à F ?
3. Déterminez une équation cartésienne de F , c'est-à-dire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y, z) pour que $(x, y, z) \in F$.

Exercice 5 : Familles libres ou liées de $\mathbb{R}^3$

Dites si les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont libres. Lorsqu'une famille est liée, donnez une relation de dépendance linéaire.

1. $((1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9))$.
2. $((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$.
3. $((1, -1, 2), (-2, 2, -4))$.
4. $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 1))$.

Exercice 6 : Famille dépendant d'un paramètre

Soit m un réel. On considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, m)$, $u_2 = (1, m, 1)$ et $u_3 = (m, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminez les valeurs de m pour lesquelles la famille (u_1, u_2, u_3) est liée.
2. Pour chacune de ces valeurs, donnez une relation de dépendance linéaire non triviale.

Exercice 7 : Base de polynômes à degrés échelonnés

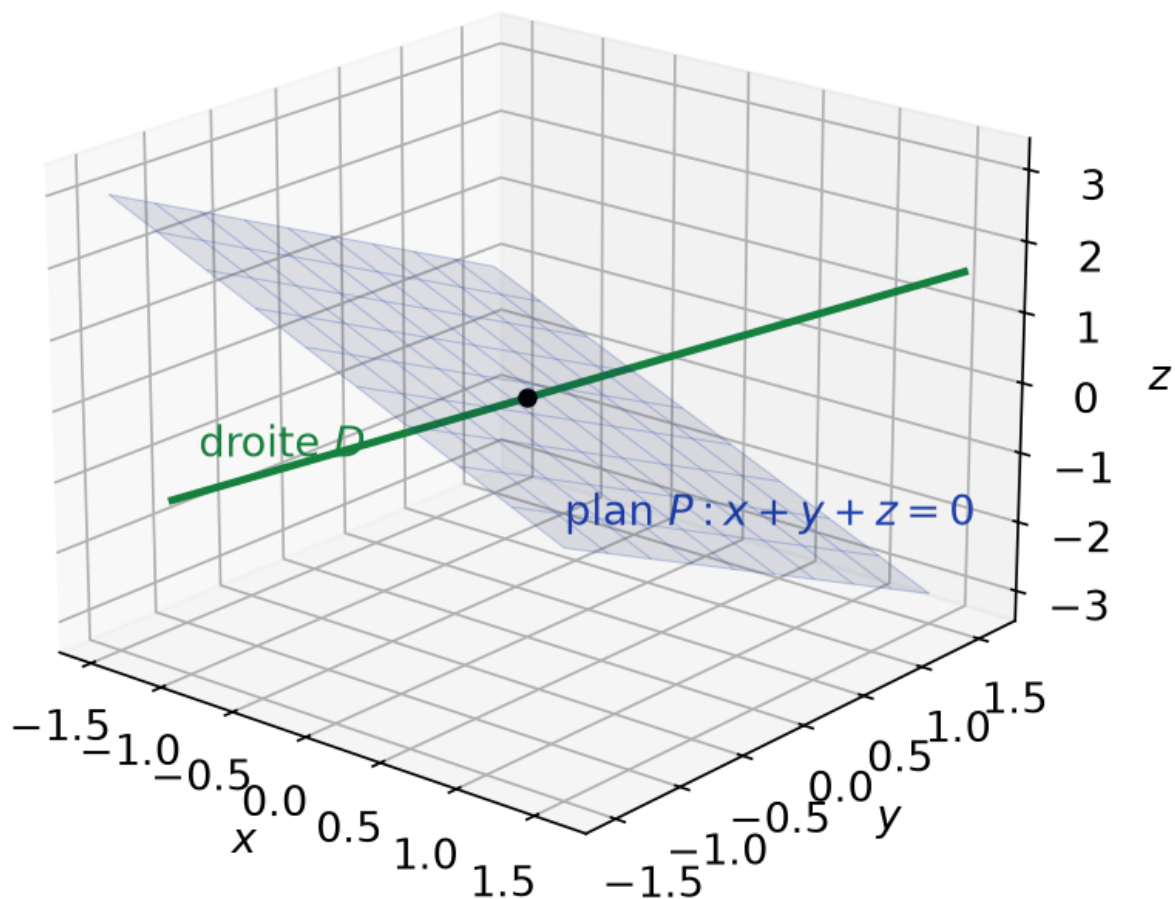
On pose $P_0 = 1$, $P_1 = X - 1$ et $P_2 = (X - 1)^2$.

1. Montrez que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminez les coordonnées de $Q = X^2 + X + 1$ dans cette base.

3. Plus généralement, exprimez les coordonnées de $Q = aX^2 + bX + c$ dans cette base en fonction de $Q(1)$, $Q'(1)$ et $Q''(1)$.

Exercice 8 : Somme directe d'une droite et d'un plan

Dans $\mathbb{R}^3$, on note $D = \text{Vect}((1, 1, 1))$ et $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$. La figure ci-dessous représente la droite D et le plan P .



1. Montrez que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et donnez-en une base.

- Montrez que D et P sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
- Décomposez le vecteur $(3, 0, 0)$, puis un vecteur quelconque (x, y, z) , sur la somme directe $D \oplus P$.

Exercice 9 : Égalité de deux sous-espaces engendrés

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $a = (1, 2, -1)$, $b = (2, 1, 1)$, $c = (1, -1, 2)$ et $d = (3, 3, 0)$.

- Rappelez pourquoi l'inclusion $\{c, d\} \subset \text{Vect}(a, b)$ entraîne $\text{Vect}(c, d) \subset \text{Vect}(a, b)$.
- Montrez que $\text{Vect}(a, b) = \text{Vect}(c, d)$.
- Déterminez une équation cartésienne de ce plan.

Exercice 10 : Base d'un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par équations

On considère $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + 2z = 0\}$.

- Justifiez que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
- Écrivez F sous la forme $\text{Vect}(w_1, w_2)$ pour deux vecteurs w_1, w_2 à déterminer.
- Montrez que (w_1, w_2) est une base de F .
- Le vecteur $(-1, 3, 2, -4)$ appartient-il à F ? Si oui, donnez ses coordonnées dans cette base.

Exercice 11 : Matrices qui commutent avec une matrice donnée

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : AM = MA\}$.

1. Montrez que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminez une base de $\mathcal{C}(A)$.
3. Déterminez de même une base du sous-espace $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de taille 2.

Exercice 12 : Polynômes admettant une racine double imposée

On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(1) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\}$.

1. Montrez que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrez que $F = \{(X-1)^2(aX+b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.
3. En déduire une base de F .

Exercice 13 : Familles libres de fonctions

Les familles suivantes sont formées de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dites si elles sont libres.

1. (f_1, f_2, f_3) avec $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{2x}$ et $f_3(x) = e^{3x}$.
2. (g_1, g_2, g_3) avec $g_1 = \cos$, $g_2 = \sin$ et $g_3(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.
3. (h_1, h_2, h_3) avec $h_1(x) = 1$, $h_2(x) = x$ et $h_3(x) = |x|$.
4. (k_1, k_2, k_3) avec $k_1(x) = 1$, $k_2(x) = \cos^2 x$ et $k_3(x) = \cos(2x)$.

Exercice 14 : Fonctions paires et fonctions impaires

Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.

1. Montrez que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Montrez que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$.
3. Par analyse-synthèse, montrez que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
4. Décomposez la fonction $f : x \rightarrow e^x + x^3 + 2x^2$ sur cette somme directe.

Exercice 15 : Matrices symétriques et antisymétriques

Soit $n \geq 1$. On note $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ les ensembles des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrez que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrez que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.
3. Décomposez la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sur cette somme directe.
4. Donnez une base de $\mathcal{A}_3$.

Exercice 16 : Une suite récurrente linéaire d'ordre deux

On note E l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrez que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Déterminez les réels r tels que la suite géométrique (r^n) appartienne à E .
3. On pose $a = (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $b = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrez que (a, b) est une famille libre de E .
4. Montrez que (a, b) est une base de E . On pourra observer qu'une suite de E est entièrement déterminée par u_0 et u_1 .
5. Exprimez le terme général de la suite de E telle que $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$.

Exercice 17 : Sous-espace d'un produit d'espaces

On considère l'espace produit $E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_2[X]$ et la partie

$$G = \{((s, t), P) \in E : P(0) = s \text{ et } P(1) = t\}.$$

1. Rappelez la structure d'espace vectoriel de E et donnez son vecteur nul.
2. Montrez que G est un sous-espace vectoriel de E .
3. Montrez que la famille $((1, 1), 1), ((0, 1), X), ((0, 1), X^2))$ est une base de G .
4. Donnez les coordonnées de $((2, 7), 2 + 3X + 2X^2)$ dans cette base, après avoir vérifié que ce vecteur est dans G .

Exercice 18 : Intersection et somme de deux plans de $\mathbb{R}^4$

Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, 1)$, $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0, -1)$ et $w = (0, 0, 1, 0)$. On note $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$, $G = \text{Vect}(v_1, v_2)$ et

$$H = \text{Vect}(v_2, w).$$

1. Déterminez $F \cap G$. La somme $F + G$ est-elle directe ?
2. Montrez que $F \cap H = \{0\}$.
3. Montrez que $F \oplus H = \mathbb{R}^4$ en décomposant un vecteur quelconque (x, y, z, t) .

Exercice 19 : Réunion de deux sous-espaces

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

1. Montrez que $F \cup G$ est un sous-espace de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
2. Montrez que $\text{Vect}(F \cup G) = F + G$.
3. Application : dans $\mathbb{R}^2$, on pose $F = \text{Vect}((1, 0))$ et $G = \text{Vect}((0, 1))$. Donnez deux vecteurs de $F \cup G$ dont la somme n'est pas dans $F \cup G$, puis déterminez $F + G$.

Exercice 20 : Supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$ par division euclidienne

On note $F = \{P \in \mathbb{K}[X] : P(0) = P(1) = 0\}$.

1. Montrez que F est un sous-espace de $\mathbb{K}[X]$ et que $F = \{X(X-1)Q : Q \in \mathbb{K}[X]\}$.
2. À l'aide de la division euclidienne par $X(X-1)$, montrez que $\mathbb{K}[X] = F \oplus \mathbb{K}_1[X]$.
3. Décomposez X^3 sur cette somme directe.
4. Pour un polynôme P quelconque, exprimez sa composante sur $\mathbb{K}_1[X]$ en fonction de $P(0)$ et $P(1)$.

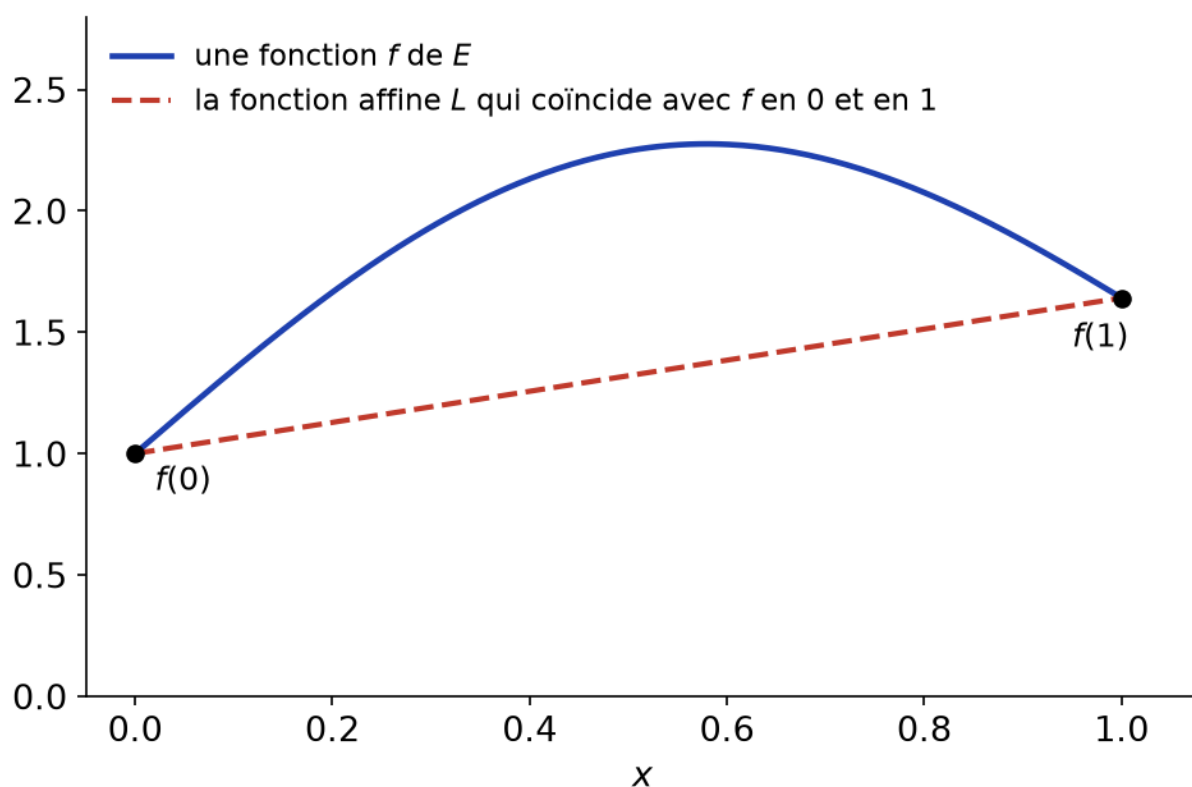
Exercice 21 : Supplémentaires dans un espace de fonctions continues

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On définit les parties suivantes de E :

$$F = \left\{ f \in E : \int_0^1 f(x) \, dx = 0 \right\}, \quad G \text{ l'ensemble des fonctions constantes,}$$

$$H = \{ f \in E : f(0) = f(1) = 0 \} \text{ et } A \text{ l'ensemble des fonctions affines } x \rightarrow \alpha x + \beta.$$

1. Montrez que F , G , H et A sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Montrez que $E = F \oplus G$ et décomposez la fonction $x \rightarrow x^2$.
3. Montrez que $E = H \oplus A$. La figure ci-dessous représente une fonction f et la fonction affine L qui prend les mêmes valeurs en 0 et en 1 .
4. Décomposez la fonction exponentielle sur $H \oplus A$.
5. La somme $F + H$ est-elle directe ?



Exercice 22 : Une famille infinie libre de fonctions

Pour tout réel α , on définit $f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_\alpha(x) = |x - \alpha|$, et $\delta_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\delta_\alpha(\alpha) = 1$ et $\delta_\alpha(x) = 0$ si $x \neq \alpha$.

1. Rappelez ce que signifie « la famille infinie $(f_\alpha)_\alpha \in \mathbb{R}$ est libre ».
2. Montrez que $(f_\alpha)_\alpha \in \mathbb{R}$ est libre. On pourra étudier la dérivabilité d'une combinaison linéaire en chaque point α_j .
3. Montrez que $(\delta_\alpha)_\alpha \in \mathbb{R}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
4. Déterminez $\text{Vect}(\delta_\alpha)_\alpha \in \mathbb{R}$. La famille $(\delta_\alpha)_\alpha \in \mathbb{R}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

Exercice 23 : Problème, polynômes de Newton et sommes de puissances

On pose $H_0 = 1$ et, pour $k \geq 1$, $H_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrez que $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout n , puis que $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminez les coordonnées de X^2 et de X^3 dans la base (H_0, H_1, H_2, H_3) .
3. Montrez que $\Delta(H_k) = H_{k-1}$ pour tout $k \geq 1$, et que $\Delta(H_0) = 0$.
4. Montrez que $N = \{P \in \mathbb{R}[X] : \Delta(P) = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$, égal à l'ensemble des polynômes constants $\mathbb{R}_0[X]$.
5. Montrez que $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_0[X] \oplus Z$, où $Z = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = 0\}$, et que $(H_k)_{k \geq 1}$ est une base de Z .
6. Pour $n \geq 1$, établissez $\sum_{k=0}^{n-1} H_j(k) = H_{j+1}(n)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. En déduire une expression factorisée de $\sum_{k=0}^{n-1} k^2$, puis de $\sum_{k=0}^{n-1} k^3$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [espaces vectoriels, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Calcul matriciel et systèmes linéaires](#), [Polynômes : division euclidienne, racines, interpolation](#)
- Chapitre précédent : [Développements limités et étude locale](#)
- Chapitre suivant : [Espaces vectoriels de dimension finie](#)
- Le même thème en L1 : [espaces vectoriels, exercices de maths en L1](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)