

Espaces vectoriels

Exercice 1 : Une structure d'espace vectoriel inhabituelle

On note $E = \mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs. On le munit de la loi interne $\oplus$ et de la loi externe $\odot$ définies, pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par :

$$x \oplus y = xy, \quad \lambda \odot x = x^\lambda.$$

1. Montrer que $(E, \oplus)$ est un groupe commutatif. Préciser son élément neutre et le symétrique de x .
2. Vérifier les quatre axiomes de la loi externe. Conclure que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
3. Quel est le « vecteur nul » de E ? Que vaut $(-1) \odot x$?
4. Soit $a \in E$ avec $a \neq 1$. Montrer que tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $\lambda \odot a$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Que peut-on en déduire pour E ?

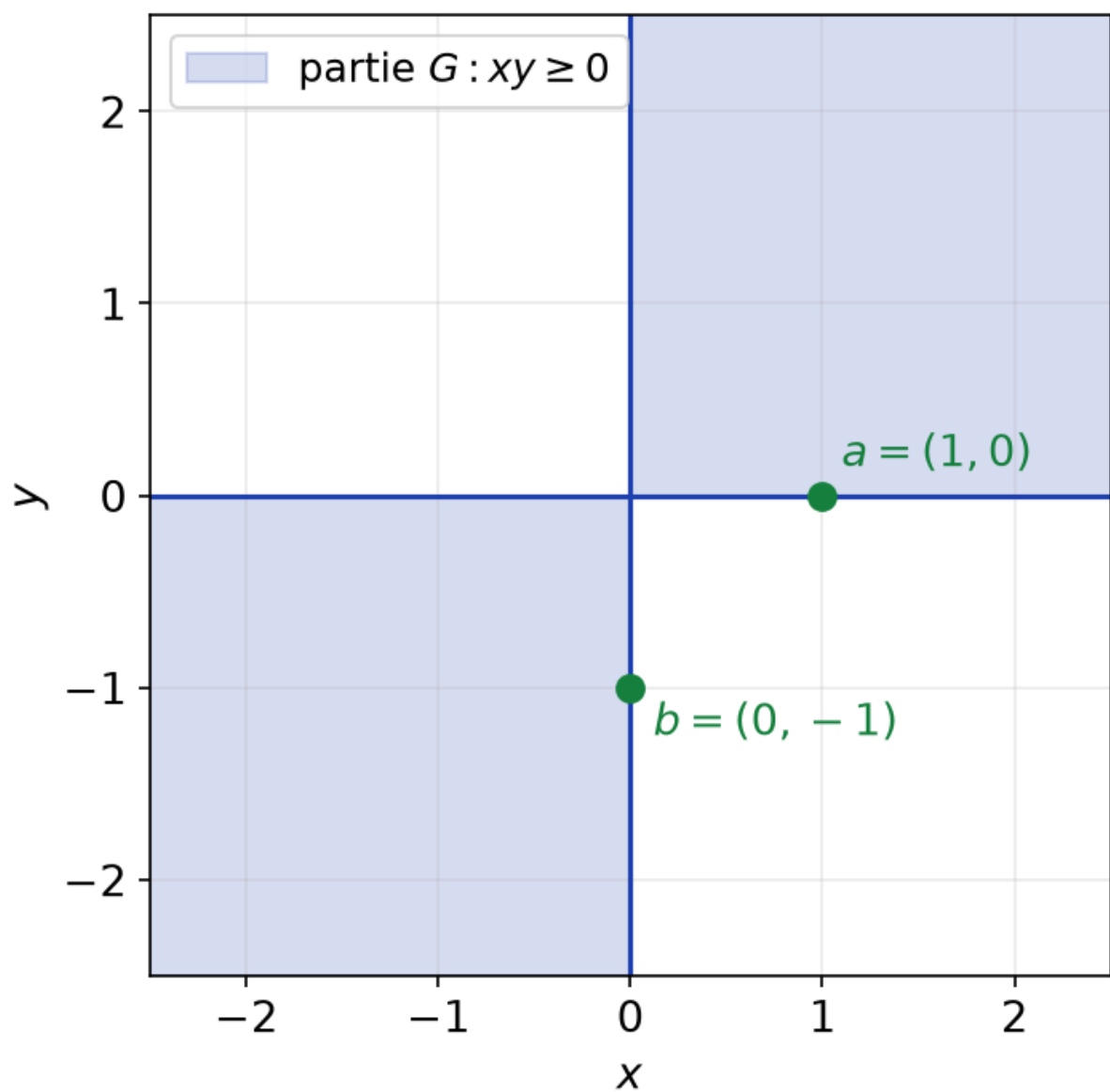
Exercice 2 : Parties de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{C}$

1. Parmi les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$, lesquelles sont des sous-espaces vectoriels ? Justifier chaque réponse.

- $F_1 = \{(x, z) : x + 2y - z = 0\}$;
- $F_2 = \{(x, z) : x + y + z = 1\}$;

- $F_3 = \{(x, y, z) : xy = 0\}$;
- $F_4 = \{(t, , -t) : t \in [\backslash\mathrm{mathbhhbb?}]R\}$;
- $F_5 = \{(x, y, z) : x = y \text{ et } y = 2z\}$.

2. On considère la partie $G = \{(x, y), \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$, représentée ci-dessous avec les points $a = (1, 0)$ et $b = (0, -1)$. Montrer que G est stable par multiplication par un réel. Est-ce un sous-espace de $\mathbb{R}^2$?



3. On considère $\mathbb{C}$ et la partie $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0\}$. Montrer que $i\mathbb{R}$ est un sous-espace du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$. Est-ce un sous-espace du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$?

Exercice 3 : Sous-espaces de fonctions

Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, dire si chacune des parties suivantes est un sous-espace vectoriel. Justifier.

1. $A = \{f \in E : f(0) = 0\}$.
2. $B = \{f \in E : f(0) = 1\}$.
3. C , l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f' = 2f$.
4. D , l'ensemble des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$.
5. M , l'ensemble des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$.
6. P , l'ensemble des fonctions 2π -périodiques.

Exercice 4 : Sous-espaces de suites

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dire si chacune des parties suivantes est un sous-espace vectoriel. Justifier.

1. L'ensemble des suites convergentes.
2. L'ensemble des suites vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. L'ensemble des suites géométriques $(a q^n)$, avec $a, q \in \mathbb{R}$.
4. L'ensemble des suites bornées.
5. L'ensemble des suites de limite 1.

Exercice 5 : Polynômes et matrices

1. Dans $\mathbb{R}[X]$, les parties suivantes sont-elles des sous-espaces ? $A = \{P : P(1) = 0\}$; $B = \{P : \deg P = 3\}$; $C = \{P : P(-X) = P(X)\}$.
2. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$, mêmes questions pour : l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices symétriques ; l'ensemble des matrices inversibles ; l'ensemble des matrices de trace nulle.
3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble $N = \{A : A^2 = 0\}$ est-il un sous-espace ? On pourra considérer $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 : Combinaisons linéaires dans $\mathbb{R}^3$

On pose $u = (1, 1, 0)$ et $v = (0, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Le vecteur $w = (2, 5, 3)$ est-il combinaison linéaire de u et v ? Si oui, préciser les coefficients.
2. Même question pour $w' = (1, 1, 1)$.
3. Déterminer le réel m tel que $(1, m, 2) \in \text{Vect}(u, v)$.
4. Donner une équation cartésienne du plan $\text{Vect}(u, v)$ et contrôler les réponses précédentes.

Exercice 7 : Équation d'un plan engendré

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u = (1, 2, -1)$, $v = (2, 1, 1)$ et $w = (3, 3, 0)$.

1. Par la méthode du pivot, déterminer une équation cartésienne de $P = \text{Vect}(u, v)$.

2. Montrer que $w \in P$ et en déduire $\text{Vect}(u, v, w)$.
3. Le vecteur $(1, 0, 1)$ appartient-il à P ? Si oui, l'écrire comme combinaison de u et v .
4. Montrer que $P = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1))$.

Exercice 8 : Sous-espace engendré par des fonctions trigonométriques

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les fonctions $c : x \rightarrow \cos^2 x$, $s : x \rightarrow \sin^2 x$, $k : x \rightarrow \cos(2x)$ et la fonction constante 1 .

1. Montrer que $\text{Vect}(c, s, 1) = \text{Vect}(c, s)$.
2. Montrer que $\text{Vect}(c, s) = \text{Vect}(1, k)$.
3. La fonction $x \rightarrow \sin(2x)$ appartient-elle à $\text{Vect}(c, s)$?
4. La fonction $\cos$ appartient-elle à $\text{Vect}(c, s)$?

Exercice 9 : Égalité de sous-espaces engendrés

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, A et B deux parties de E , et $u, v \in E$.

1. Démontrer que $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$ si et seulement si $A \subset \text{Vect}(B)$.
2. En déduire que $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(u + v, u - v)$.
3. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(u, v + \lambda u)$.
4. Application : montrer que $\text{Vect}((1, 2, 3), (2, 3, 4)) = \text{Vect}((1, 2, 3), (1, 1, 1))$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10 : Réunion de deux sous-espaces

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

1. Montrer que si $F \subset G$ ou $G \subset F$, alors $F \cup G$ est un sous-espace de E .
2. Réciproquement, on suppose que $F \cup G$ est un sous-espace et que $F \not\subset G$. Soit $x \in F$ avec $x \notin G$, et soit $y \in G$. En étudiant $x + y$, montrer que $y \in F$. Conclure.
3. En déduire que $\mathbb{R}^2$ n'est pas la réunion de deux droites vectorielles.

Exercice 11 : Intersection et somme de deux plans de $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $P_1 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ et $P_2 = \{(x, y, z) : x - y = 0\}$.

1. Déterminer $P_1 \cap P_2$ et en donner un vecteur directeur.
2. Montrer que $P_1 + P_2 = \mathbb{R}^3$ en décomposant explicitement un vecteur (a, b, c) quelconque.
3. La somme $P_1 + P_2$ est-elle directe ? Donner deux décompositions distinctes du vecteur nul.

Exercice 12 : Une droite et un plan supplémentaires

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $D = \text{Vect}((1, 1, 1))$ et $P = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$.

1. Montrer que $D \cap P = \{0\}$.
2. Par analyse-synthèse, montrer que $\mathbb{R}^3 = D \oplus P$ et donner la décomposition d'un vecteur (x, y, z) quelconque.

3. Décomposer les vecteurs $(3, 0, 0)$ et $(1, 2, 3)$.

Exercice 13 : Fonctions paires et fonctions impaires

On note $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les ensembles des fonctions paires et impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$.
3. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
4. Décomposer $f: x \rightarrow (x+1)^3$ et $g: x \rightarrow e^x$.

Exercice 14 : Matrices symétriques et antisymétriques

Soit $n \geq 1$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques ($A^T = A$) et $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques ($A^T = -A$) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont des sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

3. Décomposer la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & \\ , & & \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 15 : Polynômes s'annulant en 0 et en 1

Dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $F = \{P : P(0) = P(1) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$, l'ensemble des polynômes de degré au plus 1.

1. Montrer que F est un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
3. Montrer que $\mathbb{R}[X] = F \oplus G$. On exprimera la composante Q de P sur G à l'aide de $P(0)$ et $P(1)$.
4. Décomposer X^3 puis $X^2 + 3$.
5. Montrer que $F = \{X(X - R) : R \in \mathbb{R}[X]\}$.

Exercice 16 : Suites convergentes et suites constantes

Soit E l'espace des suites réelles convergentes, F le sous-ensemble des suites de limite nulle et G celui des suites constantes.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces de E .
2. Montrer que $E = F \oplus G$.
3. Décomposer la suite $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$, puis la suite $v_n = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 17 : Un hyperplan de $\mathbb{R}^4$

Dans $\mathbb{R}^4$, on note e_1, e_2, e_3, e_4 les vecteurs de la base canonique, $\varphi(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ et $H = \{x \in \mathbb{R}^4 : \varphi(x) = 0\}$.

1. Montrer que H est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$.

- Montrer que $H = \text{Vect}(e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4)$.
- On pose $u = (1, 0, 0, 0)$. Montrer que $\mathbb{R}^4 = H \oplus \text{Vect}(u)$ et décomposer un vecteur x quelconque.
- La droite $\text{Vect}(u')$, avec $u' = (1, -1, 0, 0)$, est-elle un supplémentaire de H ?
- Montrer plus généralement que $\mathbb{R}^4 = H \oplus \text{Vect}(w)$ pour tout $w \notin H$.

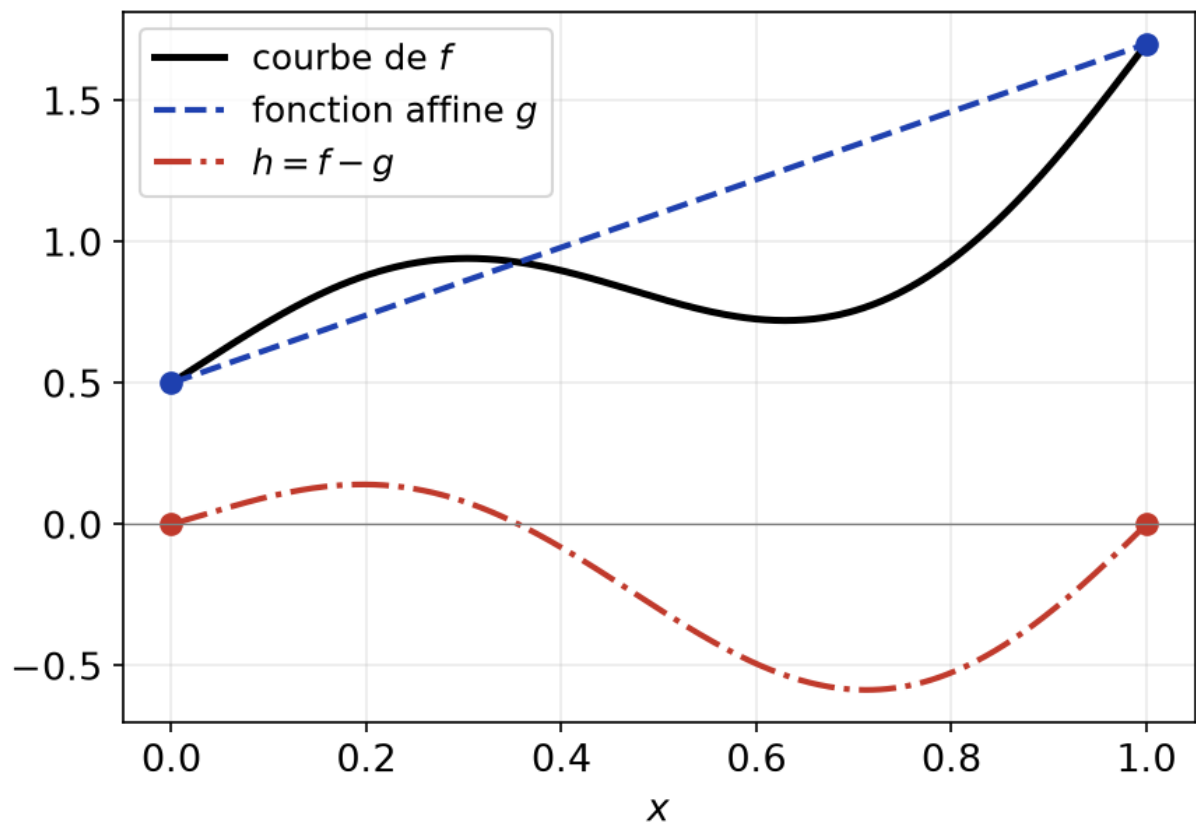
Exercice 18 : Fonctions d'intégrale nulle

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $F = \left\{ f \in E : \int_0^1 f(t) \, dt = 0 \right\}$ et G le sous-ensemble des fonctions constantes.

- Montrer que F et G sont des sous-espaces de E .
- Montrer que $E = F \oplus G$.
- Décomposer $f : x \rightarrow x^2$ et $g : x \rightarrow e^x$.

Exercice 19 : Fonctions nulles aux bords et fonctions affines

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $F = \{h \in E : h(0) = h(1) = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions affines $x \rightarrow ax + b$ sur $[0, 1]$. La figure ci-dessous montre une fonction f , une fonction affine g qui prend les mêmes valeurs que f en 0 et en 1, et la différence $h = f - g$.

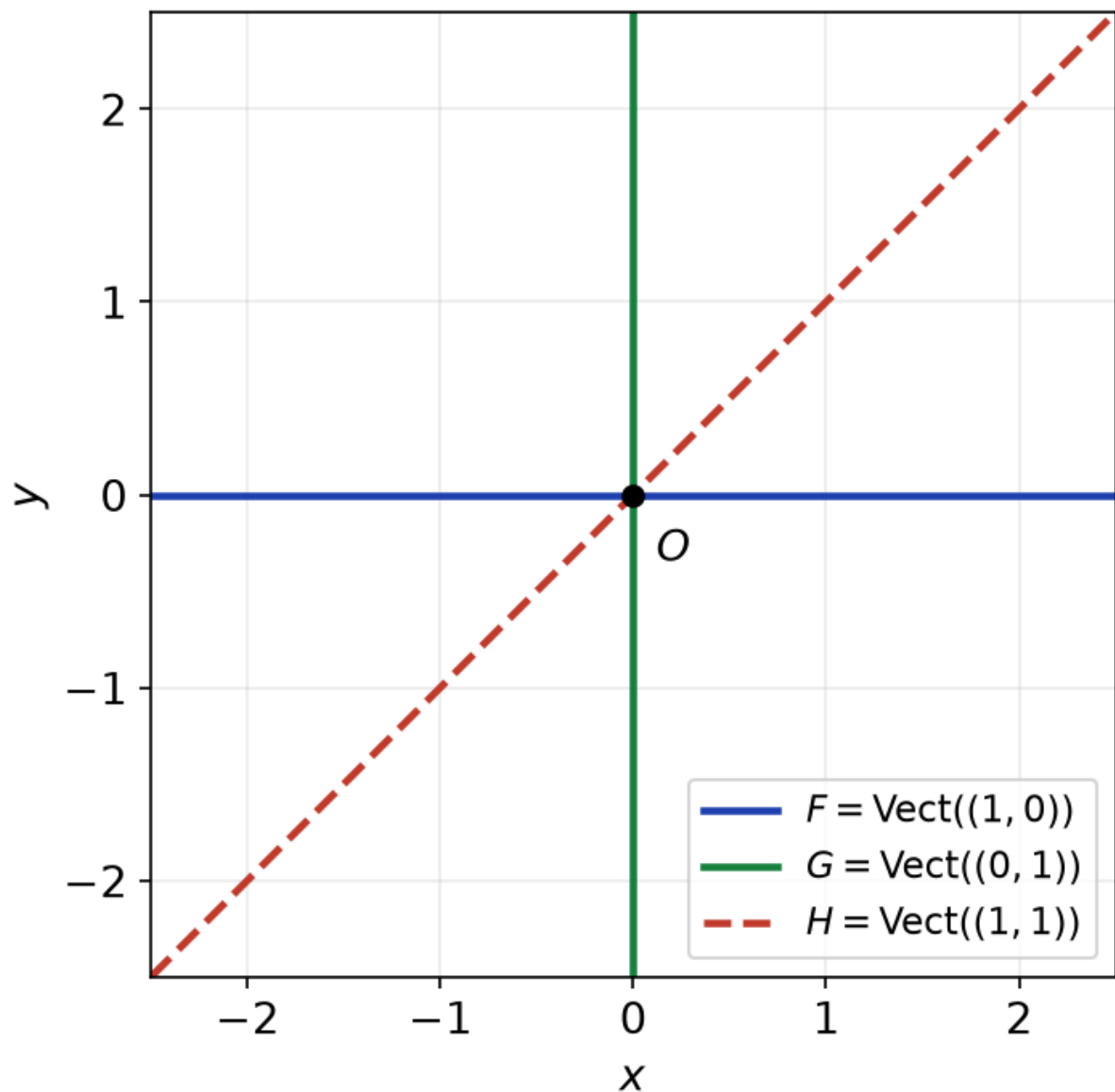


1. Montrer que F et G sont des sous-espaces de E .
2. Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
3. Montrer que $E = F \oplus G$ et donner la composante g de f sur G en fonction de $f(0)$ et $f(1)$. Interpréter graphiquement.
4. Décomposer $f : x \rightarrow e^x$, puis $f_2 : x \rightarrow \sin(\pi x) + x$.
5. Soit $F' = \{h \in E : h(0) = 0\}$. Montrer que $F' + G = E$ mais que la somme n'est pas directe.

Exercice 20 : Somme et intersection ne se distribuent pas

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F, G, H trois sous-espaces de E .

1. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $F = \text{Vect}((1, 0))$, $G = \text{Vect}((0, 1))$ et $H = \text{Vect}((1, 1))$, comme sur la figure ci-dessous. Calculer $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$. Conclure.
3. On suppose désormais $G \subset F$. Montrer que $F \cap (G + H) = G + (F \cap H)$.



Exercice 21 : Problème, suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2 u_n.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Soit r un réel non nul. Montrer que la suite (r^n) appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si $r^2 = r + 2$. En déduire deux suites $a = (2^n)$ et $b = ((-1)^n)$ de $\mathcal{S}$.
3. Montrer que deux suites de $\mathcal{S}$ qui ont les mêmes deux premiers termes sont égales.
4. En déduire que $\mathcal{S} = \text{Vect}(a, b)$. Pour $u \in \mathcal{S}$, exprimer les coefficients en fonction de u_0 et u_1 .
5. Montrer que $\text{Vect}(a) \cap \text{Vect}(b) = \{0\}$, puis que $\mathcal{S} = \text{Vect}(a) \oplus \text{Vect}(b)$.
6. Déterminer la suite $u \in \mathcal{S}$ telle que $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$. Vérifier sur u_2 et u_3 .
7. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_b$ des suites bornées de $\mathcal{S}$. Est-ce un sous-espace ? Déterminer enfin les suites de $\mathcal{S}$ qui convergent.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [espaces vectoriels, cours de maths en L1](#)
- Les solutions : [corrigé des exercices sur espaces vectoriels](#)

- À maîtriser avant : [Systèmes linéaires et calcul matriciel](#)
- Chapitre précédent : [Formules de Taylor et développements limités](#)
- Chapitre suivant : [Familles libres, bases et dimension](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)