

Espaces vectoriels

Corrigé de l'exercice 1 : Reconnaître des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$

1. Le vecteur nul vérifie $0 + 0 - 0 = 0$. Soient ensuite $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$ dans F_1 , et λ, μ réels. Les coordonnées de $\lambda u + \mu u'$ vérifient $\lambda(x + y - z) + \mu(x' + y' - z') = 0$. **Donc F_1 est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.**
2. Le vecteur nul ne vérifie pas $x + y = 1$. **Donc F_2 n'est pas un sous-espace.**
3. Les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$ sont dans F_3 . Cependant, leur somme $(1, 1, 0)$ vérifie $xy = 1 \neq 0$. **Ainsi, F_3 n'est pas stable par addition : ce n'est pas un sous-espace.**
Géométriquement, F_3 est la réunion de deux plans.
4. On a $(x, y, z) \in F_4$ si et seulement si $(x, y, z) = (2y, y, 0) = y(2, 1, 0)$. Par conséquent, $F_4 = \text{Vect}((2, 1, 0))$. **C'est un sous-espace : la droite dirigée par $(2, 1, 0)$.**
5. Le vecteur $(1, 0, 0)$ est dans F_5 , mais $(-1) \cdot (1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$ n'y est pas. **Donc F_5 n'est pas stable par multiplication par un scalaire : ce n'est pas un sous-espace.**

Point de méthode : une équation non homogène, un produit de coordonnées ou une inégalité signalent presque toujours une partie qui n'est pas un sous-espace ; un seul contre-exemple suffit alors.

Corrigé de l'exercice 2 : Sous-espaces de polynômes et de suites

1. Le polynôme nul s'annule en 1. De plus, si $P(1) = Q(1) = 0$, alors

$(\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = 0$. Donc A est un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$.

2. Le polynôme nul n'est pas de degré 3. D'ailleurs, X^3 et $-X^3 + X$ sont dans B , mais leur somme X n'y est pas. B n'est pas un sous-espace.
3. On a $C = \{P : P(0) - P(1) = 0\}$. Le polynôme nul convient. Ensuite,
 $(\lambda P + \mu Q)(0) - (\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda (P(0) - P(1)) + \mu (Q(0) - Q(1)) = 0$. Donc C est un sous-espace.
4. La suite nulle converge. De plus, si $u_n \rightarrow \ell$ et $v_n \rightarrow \ell'$, alors
 $\lambda u_n + \mu v_n \rightarrow \lambda \ell + \mu \ell'$ par opérations sur les limites. Les suites convergentes forment donc un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
5. Pour la suite nulle, la relation donnerait $0 = 0 + 1$, ce qui est faux. Cet ensemble ne contient pas la suite nulle : ce n'est pas un sous-espace. En effet, la relation $u_{n+1} = u_n + 1$ n'est pas homogène.

Corrigé de l'exercice 3 : Sous-espaces de fonctions

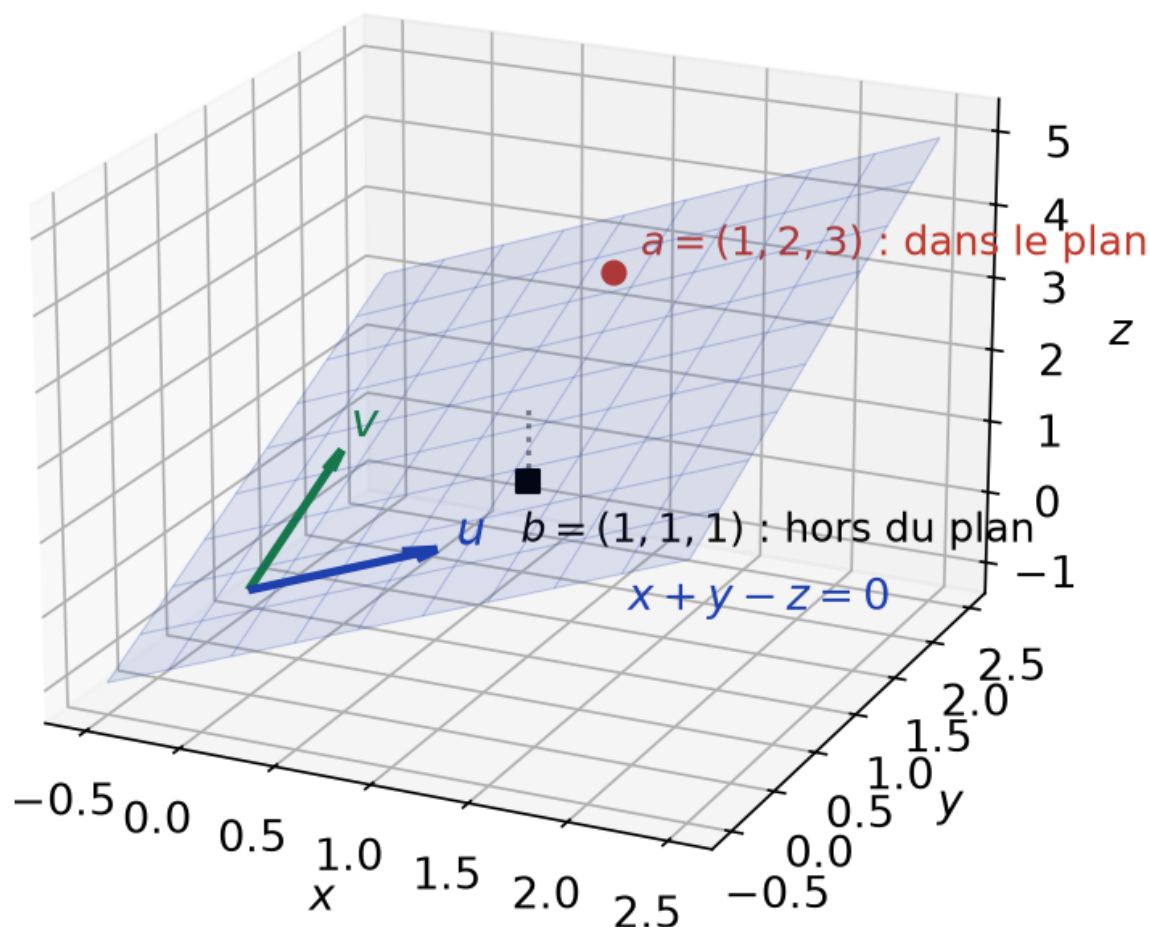
1. La fonction nulle est paire. Ensuite, si f et g sont paires, alors
 $(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$ pour tout x . Les fonctions paires forment un sous-espace de E .
2. La fonction nulle ne vérifie pas $f(0) = 1$. Ce n'est pas un sous-espace.
3. La fonction nulle est bornée. Si $|f| \leq M$ et $|g| \leq M'$, l'inégalité triangulaire donne
 $|\lambda f + \mu g| \leq |\lambda| M + |\mu| M'$. Les fonctions bornées forment un sous-espace.
4. La fonction nulle est dérivable et vérifie $0 = 3 \cdot 0$. Ensuite, si $f' = 3f$ et $g' = 3g$, par linéarité de la dérivation, $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' = 3(\lambda f + \mu g)$. C'est un sous-espace. On sait d'ailleurs qu'il vaut $\text{Vect}(x \rightarrow e^{3x})$.
5. La fonction $x \rightarrow x$ est croissante. En revanche, son produit par -1 est strictement décroissante. Ce n'est donc pas un sous-espace.

Corrigé de l'exercice 4 : Appartenance à un sous-espace engendré

Pour tous réels α, β , on a $\alpha u + \beta v = (\alpha, \beta, \alpha + \beta)$.

1. On cherche α, β tels que $(\alpha, \beta, \alpha + \beta) = (1, 2, 3)$. Les deux premières coordonnées imposent $\alpha = 1$ et $\beta = 2$. Ensuite, la troisième est vérifiée : $1 + 2 = 3$. **Donc** $a = u + 2v \in F$, **de coordonnées** $(1, 2)$ **dans la famille** (u, v) .
2. De même, on obtient nécessairement $\alpha = 1$ et $\beta = 1$. Cependant, la troisième coordonnée vaudrait $2 \neq 1$. **Donc** $b \notin F$.
3. Si $(x, y, z) \in F$, alors $z = \alpha + \beta = x + y$. Réciproquement, si $z = x + y$, alors $(x, y, z) = xu + yv \in F$. **Ainsi**, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$.

La figure ci-dessous représente le plan F . Le point a y appartient, tandis que b est situé sous le plan, puisque $1 + 1 - 1 = 1 \neq 0$.



Corrigé de l'exercice 5 : Familles libres ou liées de $\mathbb{R}^3$

- On remarque que $(7, 8, 9) - (4, 5, 6) = (3, 3, 3) = (4, 5, 6) - (1, 2, 3)$. Par conséquent, **la famille est liée, avec la relation** $(1, 2, 3) - 2(4, 5, 6) + (7, 8, 9) = (0, 0, 0)$. On vérifie : $1 - 8 + 7 = 0$, $2 - 10 + 8 = 0$ et $3 - 12 + 9 = 0$.
- Supposons $a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) + c(1, 0, 1) = 0$. On obtient le système $a + c = 0$, $a + b = 0$, $b + c = 0$. Les deux premières équations donnent $c = -a$ et $b = -a$. Ensuite, la troisième donne $-2a = 0$. Donc $a = b = c = 0$. **La famille est libre.**
- On a $(-2, 2, -4) = -2(1, -1, 2)$. **Les deux vecteurs sont colinéaires : la famille est liée, avec** $2(1, -1, 2) + (-2, 2, -4) = 0$.

4. On a $(1, 1, 1) = (1, 1, 0) + (0, 0, 1)$. **La famille est liée, avec la relation**
 $(1, 1, 0) - (1, 1, 1) + (0, 0, 1) = 0$. Remarquez que le premier vecteur n'intervient pas : le coefficient 0 est permis dans une relation non triviale.

Corrigé de l'exercice 6 : Famille dépendant d'un paramètre

1. Supposons $a u_1 + b u_2 + c u_3 = 0$. Cela s'écrit :

$$\begin{cases} a + b + m c = 0 \\ a + m b + c = 0 \\ m a + b + c = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la deuxième équation à la première, on obtient $(1 - m)(b - c) = 0$. De même, la deuxième moins la troisième donne $(1 - m)(a - b) = 0$. Enfin, la somme des trois équations donne $(m + 2)(a + b + c) = 0$.

- Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, alors $a = b = c$, puis $3a = 0$. Donc $a = b = c = 0$: la famille est libre.
- Si $m = 1$, les trois vecteurs valent $(1, 1, 1)$: la famille est liée.
- Si $m = -2$, on vérifie ci-dessous que la famille est liée.

La famille est liée si et seulement si $m = 1$ ou $m = -2$.

2. Pour $m = 1$, on a $u_1 = u_2$, donc $u_1 - u_2 = 0$. Pour $m = -2$, on calcule $u_1 + u_2 + u_3 = (1 + 1 - 2, 1 - 2 + 1, -2 + 1 + 1) = (0, 0, 0)$. **La relation cherchée est $u_1 + u_2 + u_3 = 0$.**

Point de méthode : sommer les équations ou les soustraire deux à deux exploite la symétrie du système ; on évite ainsi une discussion de pivot pénible.

Corrigé de l'exercice 7 : Base de polynômes à degrés échelonnés

1. Les polynômes P_0, P_1, P_2 sont non nuls et de degrés respectifs $0, 1, 2$. D'après le théorème sur les familles à degrés échelonnés, (P_0, P_1, P_2) **est une base de** $\mathbb{R}_2[X]$.

2. On écrit $X = (X - 1) + 1$. Ainsi,

$$X^2 + X + 1 = ((X - 1) + 1)^2 + (X - 1) + 1 + 1 = (X - 1)^2 + 3(X - 1) + 3.$$

Les coordonnées de Q sont $(3, 3, 1)$. On vérifie : $Q(1) = 3$, ce qui correspond bien au coefficient de P_0 .

3. Soit $Q = \alpha + \beta(X - 1) + \gamma(X - 1)^2$ l'écriture de Q dans la base. D'abord, $Q(1) = \alpha$. Ensuite, $Q' = \beta + 2\gamma(X - 1)$, donc $Q'(1) = \beta$. Enfin, $Q'' = 2\gamma$. **Les coordonnées sont donc $(Q(1), Q'(1), \frac{Q''(1)}{2})$.** Pour $Q = X^2 + X + 1$, on retrouve $Q(1) = 3$, $Q'(1) = 3$ et $Q''(1)/2 = 1$.

Corrigé de l'exercice 8 : Somme directe d'une droite et d'un plan

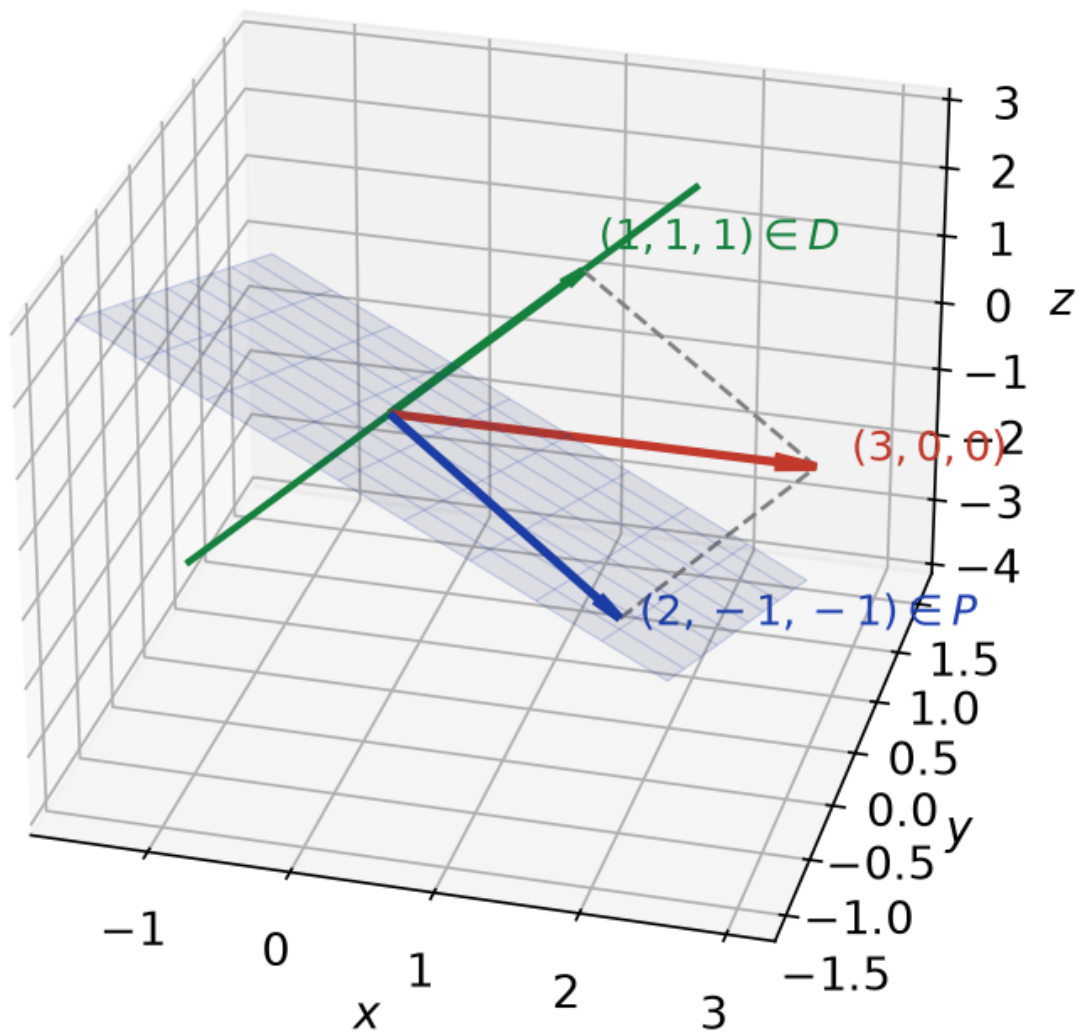
1. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $z = -x - y$ si et seulement si $(x, y, z) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$. Donc $P = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$ est un sous-espace. Cette famille est génératrice de P . De plus, elle est libre : si $x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) = 0$, les deux premières coordonnées donnent $x = y = 0$. **Ainsi, $((1, 0, -1), (0, 1, -1))$ est une base de P .**

2. On raisonne par analyse-synthèse. Analyse : supposons $(x, y, z) = s(1, 1, 1) + p$ avec $p \in P$. La somme des coordonnées de p est nulle, donc $x + y + z = 3s$. Ainsi $s = \frac{x + y + z}{3}$, puis $p = (x - s, y - s, z - s)$. L'écriture, si elle existe, est donc unique. Synthèse : avec ces valeurs, $s(1, 1, 1) \in D$ et la somme des coordonnées de p vaut $x + y + z - 3s = 0$, donc $p \in P$. De plus, leur somme vaut (x, y, z) . **Par conséquent, $\mathbb{R}^3 = D \oplus P$.**

3. Pour $(3, 0, 0)$, on a $s = 1$. **Donc $(3, 0, 0) = (1, 1, 1) + (2, -1, -1)$.** Dans le cas général :

$$(x, y, z) = \underbrace{\frac{x+y+z}{3}(1, 1, 1)}_{\in D} + \underbrace{\left(\frac{2x-y-z}{3}, \frac{2y-x-z}{3}, \frac{2z-x-y}{3}\right)}_{\in P}.$$

La figure ci-dessous montre la décomposition de $(3, 0, 0)$: le parallélogramme a un côté sur la droite D et l'autre dans le plan P .



Corrigé de l'exercice 9 : Égalité de deux sous-espaces engendrés

1. Le sous-espace $\text{Vect}(a, b)$ est stable par combinaison linéaire. S'il contient c et d , il contient donc toutes leurs combinaisons linéaires. **Ainsi** $\text{Vect}(c, d) \subset \text{Vect}(a, b)$: c'est la propriété de plus petit sous-espace contenant $\{c, d\}$.
2. Cherchons $c = \alpha a + \beta b$. Les deux premières coordonnées donnent $\alpha + 2\beta = 1$ et $2\alpha + \beta = -1$, d'où $\alpha = -1$ et $\beta = 1$. La troisième coordonnée vaut $-\alpha + \beta = 2$: c'est correct. Donc $c = -a + b$. De même, $\alpha + 2\beta = 3$ et $2\alpha + \beta = 3$ donnent $\alpha = \beta = 1$, et $-1 + 1 = 0$. Donc $d = a + b$. Ainsi, $\text{Vect}(c, d) \subset \text{Vect}(a, b)$.

Réciproquement, $c + d = 2b$ et $d - c = 2a$. Donc $a = \frac{1}{2}(d - c)$ et $b = \frac{1}{2}(c + d)$, d'où $\text{Vect}(a, b) \subset \text{Vect}(c, d)$. **Finalement**, $\text{Vect}(a, b) = \text{Vect}(c, d)$.

3. Si $(x, y, z) = \alpha a + \beta b$, alors $x = \alpha + 2\beta$, $y = 2\alpha + \beta$ et $z = -\alpha + \beta$. Donc $x - y = -\alpha + \beta = z$. Réciproquement, si $z = x - y$, on pose $\alpha = \frac{2y - x}{3}$ et $\beta = \frac{2x - y}{3}$. On vérifie que $\alpha + 2\beta = x$, $2\alpha + \beta = y$ et $-\alpha + \beta = x - y = z$.
Une équation du plan est $x - y - z = 0$. Les quatre vecteurs la vérifient : par exemple, pour d , $3 - 3 - 0 = 0$.

Corrigé de l'exercice 10 : Base d'un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par équations

1. F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à quatre inconnues. C'est aussi l'intersection de deux sous-espaces définis chacun par une équation. **Donc F est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$.**
2. La seconde équation donne $x = y - 2z$. En reportant dans la première :
 $y - 2z + y + z + t = 0$, soit $t = -2y + z$. Ainsi, $(x, y, z, t) \in F$ si et seulement si
 $(x, y, z, t) = (y - 2z, y, z, -2y + z) = y(1, 1, 0, -2) + z(-2, 0, 1, 1)$.

Donc $F = \text{Vect}(w_1, w_2)$ avec $w_1 = (1, 1, 0, -2)$ et $w_2 = (-2, 0, 1, 1)$.

3. La famille (w_1, w_2) est génératrice de F par la question précédente. De plus, si $\lambda w_1 + \mu w_2 = 0$, les deuxième et troisième coordonnées donnent $\lambda = 0$ et $\mu = 0$.
C'est donc une base de F .
4. On vérifie les équations : $-1 + 3 + 2 - 4 = 0$ et $-1 - 3 + 4 = 0$. Le vecteur est donc dans F . Ses coordonnées sont lues sur $y = 3$ et $z = 2$. En effet,
 $3w_1 + 2w_2 = (3 - 4, 3, 2, -6 + 2) = (-1, 3, 2, -4)$. **Les coordonnées sont $(3, 2)$.**

Point de méthode : on exprime les inconnues principales en fonction des inconnues libres ; les coefficients des inconnues libres fournissent directement une famille génératrice, qui est libre grâce aux coordonnées correspondant aux inconnues libres.

Corrigé de l'exercice 11 : Matrices qui commutent avec une matrice donnée

1. La matrice nulle commute avec A . Si $AM = MA$ et $AN = NA$, la distributivité du produit matriciel donne
 $A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN = \lambda MA + \mu NA = (\lambda M + \mu N)A$. **Donc $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On calcule

$$AM = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}, \quad MA = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}.$$

L'égalité $AM = MA$ équivaut à $a+c = a$, $b+d = a+b$ et $d = c+d$.

Autrement dit, $c = 0$ et $d = a$. Donc $M = aI_2 + bE_{12}$. Ainsi

$\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I_2, E_{12})$. De plus, $aI_2 + bE_{12} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ est nulle seulement si $a = b = 0$. **Donc (I_2, E_{12}) est une base de $\mathcal{C}(A)$.**

3. Une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est symétrique si et seulement si $b = c$. Elle s'écrit alors $aE_{11} + dE_{22} + b(E_{12} + E_{21})$. Cette famille est génératrice. Elle est aussi libre, car la combinaison ci-dessus est nulle seulement si $a = b = d = 0$. **Une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est $(E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21})$.**

Corrigé de l'exercice 12 : Polynômes admettant une racine double imposée

1. Le polynôme nul appartient à F . Ensuite, l'évaluation en 1 et la dérivation sont linéaires :
 $(\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1)$ et $(\lambda P + \mu Q)'(1) = \lambda P'(1) + \mu Q'(1)$.
Enfin, $\mathbb{R}_3[X]$ est stable par combinaison linéaire. **Donc F est un sous-espace de $\mathbb{R}_3[X]$.**
2. Soit $P \in F$. Comme $P(1) = P'(1) = 0$, le réel 1 est racine de P d'ordre au moins 2.
Donc $(X-1)^2$ divise P : $P = (X-1)^2 S$. Si $P \neq 0$, on a $\deg S = \deg P - 2 \leq 1$; si $P = 0$, on prend $S = 0$. Dans les deux cas, $S = aX + b$.

Réciproquement, soit $P = (X-1)^2 (aX + b)$. Alors $\deg P \leq 3$ et $P(1) = 0$. De plus, $P' = 2(X-1)(aX + b) + a(X-1)^2$, donc $P'(1) = 0$. **Ainsi**
 $F = \{(X-1)^2 (aX + b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.
3. On a $F = \text{Vect}((X-1)^2, X(X-1)^2)$. Ces deux polynômes sont non nuls, de degrés 2 et 3. Ils forment donc une famille à degrés échelonnés, donc libre. **Une base de F est $((X-1)^2, X(X-1)^2)$.**

Corrigé de l'exercice 13 : Familles libres de fonctions

1. Supposons $\alpha e^x + \beta e^{2x} + \gamma e^{3x} = 0$ pour tout réel x . En divisant par e^{3x} , on obtient $\alpha e^{-2x} + \beta e^{-x} + \gamma = 0$. Quand $x \rightarrow +\infty$, il reste $\gamma = 0$. Ensuite, on divise $\alpha e^x + \beta e^{2x} = 0$ par e^{2x} et on fait de nouveau tendre x vers $+\infty$: $\beta = 0$. Enfin, $\alpha e^x = 0$ en $x = 0$ donne $\alpha = 0$. **La famille (f_1, f_2, f_3) est libre.**
2. Par la formule d'addition, $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$ pour tout x . **Donc**
 $g_3 = \frac{1}{2} g_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} g_2$: **la famille est liée.**
3. Supposons $\lambda + \mu x + \nu |x| = 0$ pour tout x . En $x = 0$, on obtient $\lambda = 0$. En $x = 1$, on obtient $\mu + \nu = 0$. En $x = -1$, on obtient $-\mu + \nu = 0$. Donc $\mu = \nu = 0$. **La famille (h_1, h_2, h_3) est libre.** Pourtant, sur $[0, +\infty[$, on aurait $h_3 = h_2$: le domaine de définition compte.

4. La formule de duplication donne $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, donc $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$.
Ainsi $k_2 = \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_3$: **la famille est liée.**

Point de méthode : pour une famille de fonctions, on essaie d'abord de trouver une relation grâce aux formules connues ; si aucune ne se présente, on prouve la liberté par évaluation en des points ou par étude en l'infini.

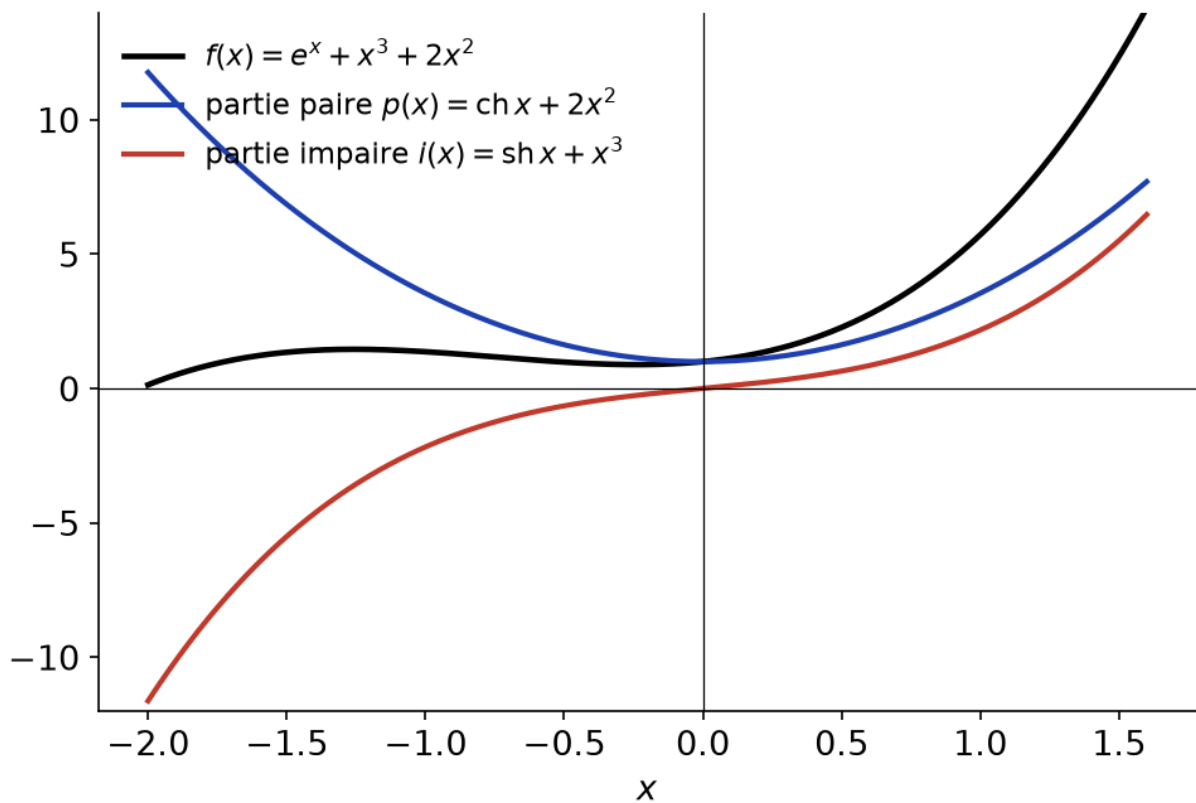
Corrigé de l'exercice 14 : Fonctions paires et fonctions impaires

- La fonction nulle est paire et impaire. Si f et g sont paires,
 $(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$. De même, si elles sont impaires,
 $(\lambda f + \mu g)(-x) = -(\lambda f + \mu g)(x)$. **Donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces de E** .
 .
- Soit $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$. Pour tout réel x , $f(x) = f(-x) = -f(x)$, donc $2f(x) = 0$. **Ainsi**
 $f = 0$ **et** $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$.
- Analyse : si $f = p + i$ avec $p \in \mathcal{P}$ et $i \in \mathcal{I}$, alors $f(-x) = p(x) - i(x)$. En ajoutant puis en soustrayant $f(x) = p(x) + i(x)$, on trouve $p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. Synthèse : définissons p et i par ces formules. Alors $p(-x) = p(x)$, $i(-x) = -i(x)$ et $p + i = f$. **Donc $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.**
- On calcule $f(-x) = e^{-x} - x^3 + 2x^2$. D'où

$$p(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 2x^2 = \operatorname{ch} x + 2x^2, \quad i(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + x^3 = \operatorname{sh} x + x^3.$$

La partie paire de f est $x \rightarrow \operatorname{ch} x + 2x^2$, sa partie impaire $x \rightarrow \operatorname{sh} x + x^3$.

La figure ci-dessous superpose f et ses deux composantes. On y lit la symétrie axiale de p , la symétrie centrale de i , et l'égalité $f(0) = p(0) = 1$.



Corrigé de l'exercice 15 : Matrices symétriques et antisymétriques

- La matrice nulle vérifie $0^T = 0 = -0$. De plus, la transposition est linéaire :
 $(\lambda M + \mu N)^T = \lambda M^T + \mu N^T$. Si M et N sont symétriques, on obtient $\lambda M + \mu N$. S'ils sont antisymétriques, on obtient $-(\lambda M + \mu N)$. **Donc $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont des sous-espaces.**
- Si $M \in \mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n$, alors $M = M^T = -M$, donc $M = 0$. Ensuite, toute matrice s'écrit $M = S + T$, avec $S = \frac{M + M^T}{2}$ et $T = \frac{M - M^T}{2}$. On vérifie $S^T = S$ et $T^T = -T$, car $(M^T)^T = M$. **Donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.**
- On a $M^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. Par conséquent :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

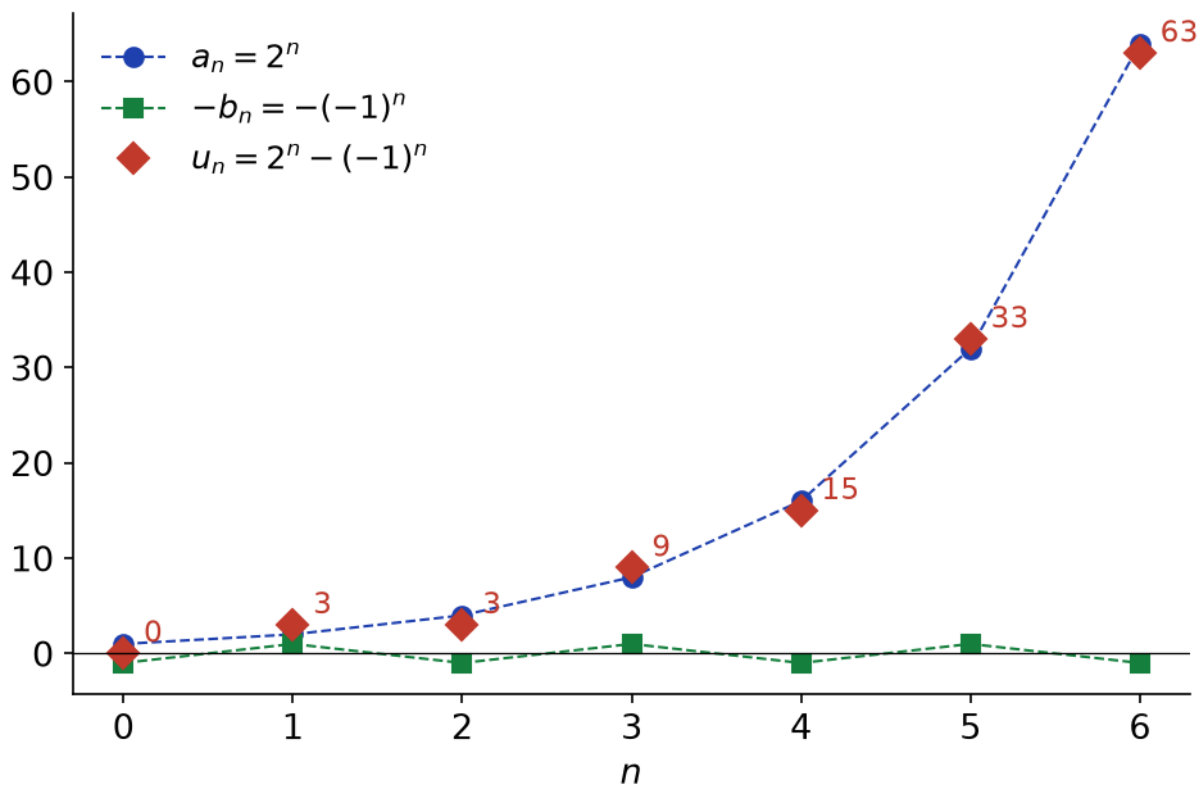
On a bien $M = S + T$, avec S symétrique et T antisymétrique. Par exemple, le coefficient $(2, 1)$ donne $3 + 1 = 4$.

4. Une matrice antisymétrique a une diagonale nulle, car $m_{ii} = -m_{ii}$. De plus, $m_{ji} = -m_{ij}$. Elle s'écrit donc $a(E_{12} - E_{21}) + b(E_{13} - E_{31}) + c(E_{23} - E_{32})$. Cette combinaison a pour coefficients a, b, c en positions $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$: elle est nulle seulement si $a = b = c = 0$. **Une base de $\mathcal{A}_3$ est $(E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32})$.**

Corrigé de l'exercice 16 : Une suite récurrente linéaire d'ordre deux

- La suite nulle vérifie la relation. Si u et v la vérifient, alors $\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = (\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + 2(\lambda u_n + \mu v_n)$. **Donc $\mathcal{E}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.**
- Pour $r = 0$, la suite $(0^n) = (1, 0, 0, \dots)$ ne convient pas, car $u_2 = 0 \neq u_1 + 2u_0 = 2$. Pour $r \neq 0$, la relation $r^{n+2} = r^{n+1} + 2r^n$ équivaut, après division par r^n , à $r^2 - r - 2 = 0$. Or $r^2 - r - 2 = (r - 2)(r + 1)$. **Les valeurs sont $r = 2$ et $r = -1$.**
- Supposons $\lambda a + \mu b = 0$. Aux rangs 0 et 1 : $\lambda + \mu = 0$ et $2\lambda - \mu = 0$. En sommant, $3\lambda = 0$, donc $\lambda = \mu = 0$. **La famille (a, b) est libre.**
- Soit $u \in \mathcal{E}$. On cherche λ, μ tels que $\lambda + \mu = u_0$ et $2\lambda - \mu = u_1$. On trouve $\lambda = \frac{u_0 + u_1}{3}$ et $\mu = \frac{2u_0 - u_1}{3}$. Posons $v = u - \lambda a - \mu b$. Cette suite est dans $\mathcal{E}$, car $\mathcal{E}$ est un sous-espace. De plus, $v_0 = v_1 = 0$. Par récurrence double, $v_n = 0$ pour tout n . Donc $u = \lambda a + \mu b$ et (a, b) est génératrice. **Ainsi (a, b) est une base de $\mathcal{E}$.**
- Avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$, on obtient $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. **Donc $u_n = 2^n - (-1)^n$ pour tout n .** On contrôle : $u_2 = u_1 + 2u_0 = 3$ et $4 - 1 = 3$; $u_3 = 3 + 6 = 9$ et $8 + 1 = 9$.

La figure ci-dessous montre les premiers termes. La suite u suit la suite 2^n à une oscillation $-(-1)^n$ près, comme l'indique sa décomposition sur la base (a, b) .



Corrigé de l'exercice 17 : Sous-espace d'un produit d'espaces

- Sur $E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_2[X]$, les lois sont définies composante par composante :
 $((s, t), P) + ((s', t'), Q) = ((s + s', t + t'), P + Q)$ et
 $\lambda ((s, t), P) = ((\lambda s, \lambda t), \lambda P)$. C'est un espace vectoriel produit. **Son vecteur nul est $((0, 0), 0)$.**
- Le vecteur nul vérifie $0(0) = 0$ et $0(1) = 0$. Ensuite, si $((s, t), P)$ et $((s', t'), Q)$ sont dans G , alors $(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda s + \mu s'$ et $(\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda t + \mu t'$.
Donc G est un sous-espace de E .
- Soit $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$. Alors $((s, t), P) \in G$ si et seulement si $s = \alpha$ et $t = \alpha + \beta + \gamma$. Les éléments de G sont donc exactement les vecteurs

$$((\alpha, \alpha + \beta + \gamma), \alpha + \beta X + \gamma X^2) = \alpha ((1, 1), 1) + \beta ((0, 1), X) + \gamma ((0, 1), X^2).$$

La famille est donc génératrice de G . De plus, si cette combinaison est nulle, la composante polynomiale $\alpha + \beta X + \gamma X^2$ est nulle, donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$. **C'est une base de G .**

4. Pour $P = 2 + 3X + 2X^2$, on a $P(0) = 2$ et $P(1) = 7$: le vecteur est dans G . Ses coordonnées sont $(2, 3, 2)$.

Corrigé de l'exercice 18 : Intersection et somme de deux plans de $\mathbb{R}^4$

- On remarque $v_1 = u_1 + u_2$, donc $v_1 \in F \cap G$. Déterminons l'intersection complète. Un vecteur de F s'écrit $\alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha, \beta, \alpha, \beta)$, un vecteur de G s'écrit $\gamma v_1 + \delta v_2 = (\gamma + \delta, \gamma, \gamma, \gamma - \delta)$. L'égalité donne $\alpha = \gamma + \delta$, $\beta = \gamma$, $\alpha = \gamma$ et $\beta = \gamma - \delta$. Donc $\delta = 0$ et $\alpha = \beta = \gamma$. Ainsi $F \cap G = \text{Vect}(v_1)$, qui n'est pas réduit à $\{0\}$: la somme $F + G$ n'est pas directe.
- Un vecteur de H s'écrit $\delta v_2 + \varepsilon w = (\delta, 0, \varepsilon, -\delta)$. S'il est dans F , il s'écrit aussi $(\alpha, \beta, \alpha, \beta)$. Donc $\beta = 0$, $\alpha = \delta$, $\alpha = \varepsilon$ et $\beta = -\delta$. Par conséquent $\delta = 0$, puis $\alpha = \varepsilon = 0$. Ainsi $F \cap H = \{0\}$.
- Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On cherche $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ tels que
$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \delta v_2 + \varepsilon w = (\alpha + \delta, \beta, \alpha + \varepsilon, \beta - \delta) = (x, y, z, t).$$

On trouve successivement $\beta = y$, $\delta = y - t$, $\alpha = x - y + t$ et $\varepsilon = z - x + y - t$. Ces valeurs conviennent, donc $F + H = \mathbb{R}^4$. Avec la question 2, $\mathbb{R}^4 = F \oplus H$, et

$$(x, y, z, t) = \underbrace{(x - y + t, y, x - y + t, y)}_{\in F} + \underbrace{(y - t, 0, z - x + y - t, t - y)}_{\in H}.$$

On contrôle la somme : $x - y + t + y - t = x$ et $y + t - y = t$.

Corrigé de l'exercice 19 : Réunion de deux sous-espaces

- Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ est un sous-espace ; de même si $G \subset F$. Réciproquement, supposons que $F \cup G$ est un sous-espace et que $F \not\subset G$. Il existe donc $x \in F$ tel que $x \notin G$. Soit $y \in G$. Le vecteur $x + y$ appartient à $F \cup G$ par stabilité. S'il était dans

G , alors $x = (x + y) - y$ serait dans G : c'est exclu. Donc $x + y \in F$, puis $y = (x + y) - x \in F$. Ainsi $G \subset F$. **Donc $F \cup G$ est un sous-espace si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.**

2. $F + G$ est un sous-espace qui contient F (écrire $y = y + 0_E$) et G . Il contient donc $\text{Vect}(F \cup G)$. Inversement, tout vecteur $y + z$ de $F + G$ est une combinaison linéaire d'éléments de $F \cup G$. **Donc $\text{Vect}(F \cup G) = F + G$.**
3. Les vecteurs $(1, 0) \in F$ et $(0, 1) \in G$ ont pour somme $(1, 1)$, qui n'est ni sur l'axe des abscisses ni sur celui des ordonnées. Ensuite, tout vecteur (x, y) s'écrit $(x, 0) + (0, y)$. **Donc $F + G = \mathbb{R}^2$, alors que $F \cup G$ est seulement la réunion des deux axes.**

Corrigé de l'exercice 20 : Supplémentaires dans $K[X]$ par division euclidienne

1. Le polynôme nul est dans F , et les évaluations en 0 et en 1 sont linéaires : F est un sous-espace. Ensuite, si $P(0) = P(1) = 0$, les racines distinctes 0 et 1 donnent $X \mid P$ et $(X - 1) \mid P$. Comme X et $X - 1$ sont premiers entre eux, $X(X - 1)$ divise P . Réciproquement, $X(X - 1)Q$ s'annule en 0 et en 1. **Donc**

$$F = \{X(X - 1)Q : Q \in \mathbb{K}[X]\}.$$
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. La division euclidienne par $X(X - 1)$, de degré 2, fournit un unique couple (Q, R) tel que $P = X(X - 1)Q + R$ et $\deg R \leq 1$. Ainsi $P \in F + \mathbb{K}_1[X]$. De plus, si $R \in F \cap \mathbb{K}_1[X]$, alors R est de degré au plus 1 et possède deux racines : $R = 0$. **Par conséquent, $\mathbb{K}[X] = F \oplus \mathbb{K}_1[X]$.**
3. On a $X^3 - X = X(X - 1)(X + 1)$. **Donc $X^3 = X(X - 1)(X + 1) + X$, avec $X(X - 1)(X + 1) \in F$ et $X \in \mathbb{K}_1[X]$.**
4. Écrivons $R = \alpha + \beta X$. En évaluant $P = X(X - 1)Q + R$ en 0 et en 1, on obtient $P(0) = \alpha$ et $P(1) = \alpha + \beta$. **La composante de P sur $\mathbb{K}_1[X]$ est**

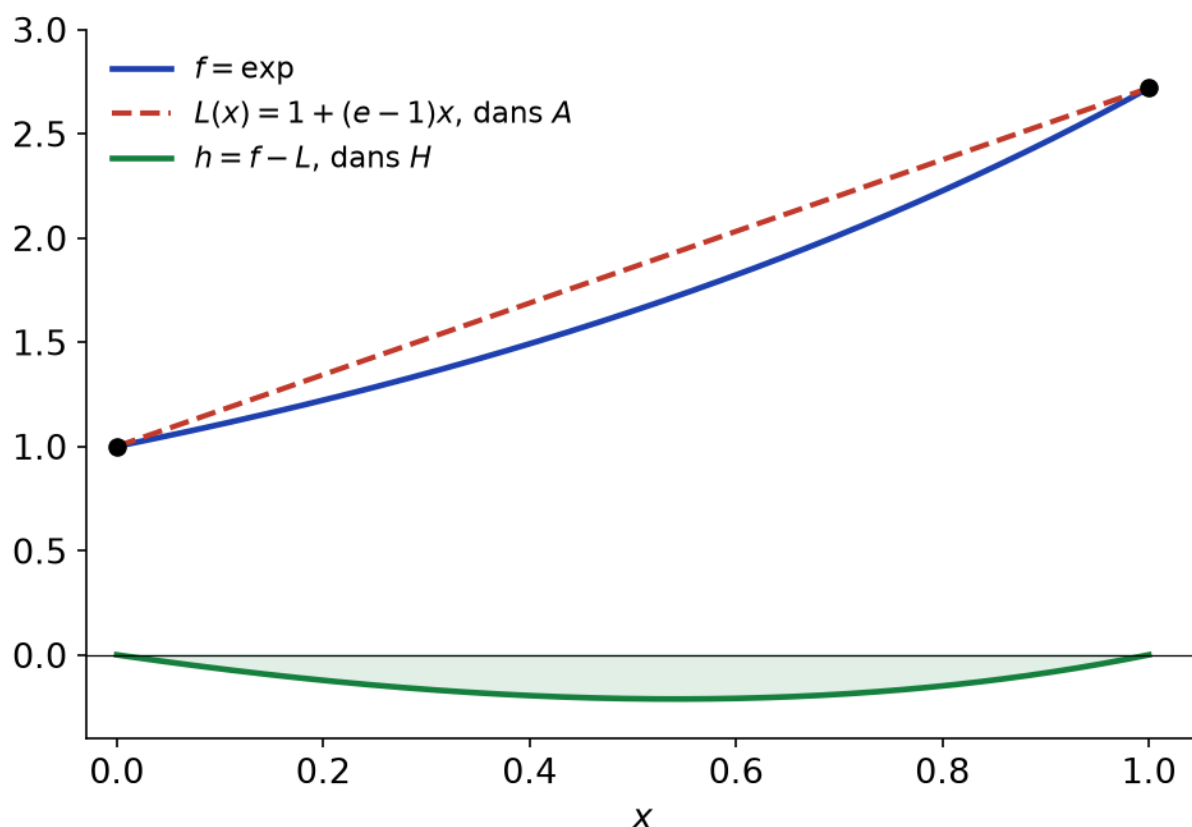
$$R = P(0) + (P(1) - P(0))X.$$
Pour $P = X^3$, on retrouve

$$R = 0 + (1 - 0)X = X.$$

Corrigé de l'exercice 21 : Supplémentaires dans un espace de fonctions continues

- Chacun des quatre ensembles contient la fonction nulle. Ensuite, F est stable par combinaison linéaire grâce à la linéarité de l'intégrale : $\int_0^1 (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_0^1 f + \mu \int_0^1 g$. Pour H , on utilise la linéarité des évaluations en 0 et en 1. Enfin, $G = \text{Vect}(x \rightarrow 1)$ et $A = \text{Vect}(x \rightarrow 1, x \rightarrow x)$. **Ce sont quatre sous-espaces de E .**
- Soit $f \in F \cap G$: f est une constante c et $\int_0^1 c \, dx = c = 0$. Donc $F \cap G = \{0\}$.
Ensuite, notons $m = \int_0^1 f(x) \, dx$. Alors $f = (f - m) + m$, avec
 $\int_0^1 (f - m) = m - m = 0$. Donc $f - m \in F$ et $m \in G$. **Ainsi $E = F \oplus G$.**
Pour $f(x) = x^2$, on a $m = \frac{1}{3}$. **Donc $x^2 = \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$.**
- Soit $f \in H \cap A$. C'est une fonction affine qui s'annule en 0 et en 1 : $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$. Donc $H \cap A = \{0\}$. Ensuite, pour $f \in E$, posons $L(x) = f(0) + (f(1) - f(0))x$. Alors $L \in A$, et $h = f - L$ est continue avec $h(0) = 0$ et $h(1) = f(1) - f(1) = 0$. Donc $f = h + L$ avec $h \in H$. **Ainsi $E = H \oplus A$.**
- Pour $f = \exp$, on a $f(0) = 1$ et $f(1) = e$. **Donc $e^x = (e^x - 1 - (e - 1)x) + (1 + (e - 1)x)$, avec le premier terme dans H et le second dans A .**
- La fonction $s : x \rightarrow \sin(2\pi x)$ est continue, et $s(0) = s(1) = 0$. De plus,
 $\int_0^1 \sin(2\pi x) \, dx = \left[-\frac{\cos(2\pi x)}{2\pi}\right]_0^1 = 0$. Ainsi s est une fonction non nulle de $F \cap H$.
La somme $F + H$ n'est donc pas directe.

La figure ci-dessous illustre la question 4. La corde L relie les points $(0, 1)$ et $(1, e)$, et la fonction $h = \exp - L$ s'annule aux deux extrémités.



Point de méthode : pour trouver la composante sur un sous-espace décrit par peu de paramètres (constantes, fonctions affines), on écrit les conditions qui définissent l'autre sous-espace ; elles fixent les paramètres.

Corrigé de l'exercice 22 : Une famille infinie libre de fonctions

1. Une famille infinie est libre si toutes ses sous-familles finies sont libres. **Autrement dit, pour tous**

réels distincts $a_1, \dots, a_p$ **et tous scalaires** $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, l'égalité $\sum_{i=1}^p \lambda_i f_{a_i} = 0$

entraîne $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

2. Soient $a_1, \dots, a_p$ distincts et supposons $\sum_{i=1}^p \lambda_i f_{a_i} = 0$. Fixons j . Pour $i \neq j$, la fonction f_{a_i} est dérivable en a_j , car $a_j \neq a_i$ et $x \mapsto |x - a_i|$ est dérivable hors de a_i . Donc $g = \sum_{i \neq j} \lambda_i f_{a_i}$ est dérivable en a_j . Supposons $\lambda_j \neq 0$. Alors

$f_{a_j} = -\frac{1}{\lambda_j} g$ serait dérivable en a_j . Or $x \rightarrow |x - a_j|$ a en a_j une dérivée à gauche -1 et une dérivée à droite 1 : elle n'y est pas dérivable. C'est absurde, donc $\lambda_j = 0$. **Tous les coefficients sont nuls : la famille $(f_a)_a \in \mathbb{R}$ est libre.**

3. Soient $a_1, \dots, a_p$ distincts avec $\sum_{i=1}^p \lambda_i \delta_{a_i} = 0$. En évaluant en a_j , tous les termes sont nuls sauf le j -ème, qui vaut λ_j . **Donc $\lambda_j = 0$ pour tout j : la famille (δ_a) est libre.**

4. Une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^p \lambda_i \delta_{a_i}$ est une fonction nulle en dehors de l'ensemble fini $\{a_1, \dots, a_p\}$. Réciproquement, une fonction f nulle hors d'un ensemble fini $\{a_1, \dots, a_p\}$ s'écrit $f = \sum_{i=1}^p f(a_i) \delta_{a_i}$. **Donc $\text{Vect}(\delta_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est l'ensemble des fonctions nulles en dehors d'un ensemble fini.** La fonction constante égale à 1 ne s'annule jamais, et $\mathbb{R}$ est infini. **Elle n'est pas dans ce sous-espace : la famille (δ_a) n'engendre pas $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.**

Point de méthode : une combinaison linéaire n'utilise qu'un nombre fini de vecteurs, même dans une famille infinie ; c'est exactement ce qui empêche l'écriture « $1 = \sum_{a \in \mathbb{R}} \delta_a$ ».

Corrigé de l'exercice 23 : Problème, polynômes de Newton et sommes de puissances

1. Le polynôme H_k est le produit de k facteurs de degré 1 , divisé par $k!$. Il est donc non nul et de degré k . La famille $(H_0, \dots, H_n)$ est à degrés échelonnés, avec $\deg H_k = k$. **C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.** Ensuite, toute sous-famille finie de $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est contenue dans une famille $(H_0, \dots, H_n)$, qui est libre. De plus, tout polynôme P appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ pour n assez grand, donc à $\text{Vect}(H_0, \dots, H_n)$. **Ainsi $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.**

2. On a $H_1 = X$, $H_2 = \frac{X(X-1)}{2}$ et $H_3 = \frac{X(X-1)(X-2)}{6}$. D'abord,
 $X + 2H_2 = X + X^2 - X = X^2$. Ensuite,

$$H_1 + 6H_2 + 6H_3 = X + 3(X^2 - X) + (X^3 - 3X^2 + 2X) = X^3.$$

Les coordonnées de X^2 sont $(0, 1, 2, 0)$, celles de X^3 sont $(0, 1, 6, 6)$.

3. D'abord, H_0 est constant, donc $\Delta(H_0) = 0$. Soit ensuite $k \geq 1$. On factorise le produit commun $X(X-1)\dots(X-k+2)$, qui vaut 1 si $k = 1$:

$$\begin{aligned} k! \Delta(H_k) &= (X+1)X\dots(X-k+2) - X(X-1)\dots(X-k+1) \\ &= X\dots(X-k+2)[(X+1) - (X-k+1)] = kX\dots(X-k+2). \end{aligned}$$

En divisant par $k! = k \cdot (k-1)!$, on obtient $\Delta(H_k) = H_{k-1}$.

4. Le polynôme nul est dans N , et $\Delta(\lambda P + \mu Q) = \lambda \Delta(P) + \mu \Delta(Q)$: N est un sous-espace. Les constantes sont dans N . Réciproquement, soit $P \in N$. Alors

$P(k+1) = P(k)$ pour tout entier k , donc $P(k) = P(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Le polynôme $P - P(0)$ a une infinité de racines : il est nul. **Donc** $N = \mathbb{R}_0[X]$.

5. Soit P constant et nul en 0 : $P = 0$. Donc $\mathbb{R}_0[X] \cap Z = \{0\}$. Ensuite,

$P = P(0) + (P - P(0))$, avec $P - P(0) \in Z$. Donc $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_0[X] \oplus Z$. Pour $k \geq 1$, H_k a X en facteur, donc $H_k \in Z$. La famille $(H_k)_{k \geq 1}$ est libre comme sous-famille d'une base. Enfin, si $P = \sum_{k=0}^n c_k H_k \in Z$, l'évaluation en 0 donne

$0 = P(0) = c_0$. Donc $P \in \text{Vect}(H_k)_{k \geq 1}$. **Ainsi** $(H_k)_{k \geq 1}$ est une base de Z .

6. D'après la question 3, $H_{j+1}(k+1) - H_{j+1}(k) = H_j(k)$ pour tout entier k . Par télescopage,

$$\sum_{k=0}^{n-1} H_j(k) = H_{j+1}(n) - H_{j+1}(0) = H_{j+1}(n),$$

car $H_{j+1} \in Z$. Ensuite, par la question 2, $k^2 = H_1(k) + 2H_2(k)$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = H_2(n) + 2H_3(n) = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

De même, $k^3 = H_1(k) + 6H_2(k) + 6H_3(k)$, et $H_4(n) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \frac{n(n-1)}{2} + n(n-1)(n-2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} = \frac{n(n-1)}{4}[2 + 4(n-2) + (n-2)(n-3)].$$

Le crochet vaut $n^2 - n$. **Donc** $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ et $\sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$.

Pour $n = 3$, on contrôle : $0 + 1 + 4 = 5 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 5}{6}$ et $0 + 1 + 8 = 9 = \frac{9 \cdot 4}{4}$.

Point de méthode : choisir une base adaptée à l'opérateur étudié transforme un calcul difficile en simple décalage d'indices ; ici, Δ agit sur la base (H_k) comme une dérivation discrète.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [espaces vectoriels, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur espaces vectoriels](#)
- À maîtriser avant : [Calcul matriciel et systèmes linéaires](#), [Polynômes : division euclidienne, racines, interpolation](#)
- Chapitre précédent : [Développements limités et étude locale](#)
- Chapitre suivant : [Espaces vectoriels de dimension finie](#)
- Le même thème en L1 : [espaces vectoriels, exercices de maths en L1](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)