

Espaces vectoriels

Corrigé de l'exercice 1 : Une structure d'espace vectoriel inhabituelle

1. D'abord, la loi $\oplus$ est bien interne : si $x > 0$ et $y > 0$, alors $xy > 0$. Elle est associative et commutative, car le produit des réels l'est. Ensuite, $1 \in E$ vérifie $x \oplus 1 = x \cdot 1 = x$: c'est l'élément neutre. Enfin, pour $x \in E$, le réel $1/x$ est dans E et $x \oplus \frac{1}{x} = 1$. **Ainsi $(E, \oplus)$ est un groupe commutatif, de neutre 1, et le symétrique de x est $1/x$.**

2. La loi externe est bien définie, car $x^\lambda = e^{\lambda \ln x} > 0$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x, y \in E$. On vérifie les quatre axiomes :

$$\begin{aligned}1 \odot x &= x^1 = x, \quad \lambda \odot (\mu \odot x) = (x^\mu)^\lambda = x^{\lambda \mu} = (\lambda \mu) \odot x, \\(\lambda + \mu) \odot x &= x^{\lambda + \mu} = x^\lambda x^\mu = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x), \\ \lambda \odot (x \oplus y) &= (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y).\end{aligned}$$

Ces égalités découlent des propriétés usuelles des puissances réelles. **Par conséquent, $(E, \oplus, \odot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.**

3. Le vecteur nul est le neutre de $\oplus$, c'est-à-dire le réel 1. On le retrouve avec $0 \odot x = x^0 = 1$. De même, $(-1) \odot x = x^{-1} = 1/x$, qui est bien le symétrique de x . **Le vecteur nul est 1 et $(-1) \odot x = 1/x$.**

4. Soit $x \in E$. On cherche λ tel que $a^\lambda = x$, soit $\lambda \ln a = \ln x$. Or $a \neq 1$, donc $\ln a \neq 0$. L'équation a donc une unique solution $\lambda = \ln x / \ln a$. **Tout vecteur de E est un « multiple » unique de a : $E = \text{Vect}(a)$ est une droite vectorielle.**

Point de méthode : dans une structure inhabituelle, il faut traduire chaque axiome avec les nouvelles lois. Le vecteur nul n'est alors pas forcément le réel 0.

Corrigé de l'exercice 2 : Parties de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{C}$

1. On examine chaque partie.

- F_1 contient $(0, 0, 0)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$ dans F_1 . Alors $(\lambda x + x') + 2(\lambda y + y') - (\lambda z + z') = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$. F_1 est un sous-espace.
- F_2 ne contient pas $(0, 0, 0)$, car $0 + 0 + 0 \neq 1$. F_2 n'est pas un sous-espace.
- Les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$ sont dans F_3 . Cependant, leur somme $(1, 1, 0)$ vérifie $xy = 1 \neq 0$. F_3 n'est pas un sous-espace.
- On a $F_4 = \{t(1, -1) : t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, -1))$. F_4 est un sous-espace, c'est une droite.
- F_5 est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène. On peut aussi l'écrire : z est libre, $y = 2z$ et $x = 2z$, donc $F_5 = \text{Vect}((2, 2, 1))$. F_5 est un sous-espace, c'est une droite.

2. Soit $(x, y) \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 xy \geq 0$, car $\lambda^2 \geq 0$ et $xy \geq 0$. Donc G est stable par multiplication par un réel. En revanche, $a = (1, 0)$ et $b = (0, -1)$ sont dans G , puisque leurs produits valent 0. Or $a + b = (1, -1)$ donne $1 \times (-1) = -1 < 0$. Comme on le voit sur la figure de l'énoncé, $a + b$ tombe dans le quatrième quadrant, hors de la zone coloriée. G n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^2$.

3. D'abord, $0 \in i\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $z, z' \in i\mathbb{R}$. Comme λ est réel, $\text{Re}(\lambda z + z') = \lambda \text{Re}(z) + \text{Re}(z') = 0$. Donc $i\mathbb{R}$ est un sous-espace du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$. En revanche, avec le scalaire complexe i , on a $i \in i\mathbb{R}$ mais $i \cdot i = -1$, de partie réelle $-1 \neq 0$. $i\mathbb{R}$ est un sous-espace de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, mais pas comme $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Corrigé de l'exercice 3 : Sous-espaces de fonctions

1. La fonction nulle vérifie $0(0) = 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{A}$. Alors

$(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = 0$. **A est un sous-espace.**

2. La fonction nulle vaut $0 \neq 1$ en 0 . **B n'est pas un sous-espace.**

3. La fonction nulle est dérivable et vérifie $0' = 0 = 2 \cdot 0$. Soit ensuite $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}$. La fonction $\lambda f + g$ est dérivable, et par linéarité de la dérivation,
 $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g' = 2(\lambda f + g)$. **C est un sous-espace.** On sait d'ailleurs que $\mathcal{C} = \text{Vect}(x \rightarrow e^{2x})$.

4. La fonction nulle est bornée. Si $|f| \leq M_f$ et $|g| \leq M_g$, l'inégalité triangulaire donne $|\lambda f + g| \leq |\lambda| M_f + M_g$. **D est un sous-espace.**

5. La fonction $f = \exp$ est croissante et $g : x \rightarrow -2x$ est décroissante. Cependant, $h = f + g$ a pour dérivée $h'(x) = e^x - 2$, strictement négative sur $] -\infty, \ln 2[$ et strictement positive sur $] \ln 2, +\infty[$. Donc h n'est pas monotone. **M n'est pas un sous-espace.**

6. La fonction nulle est 2π -périodique. Si f et g le sont, alors
 $(\lambda f + g)(x + 2\pi) = \lambda f(x) + g(x)$ pour tout x . **P est un sous-espace.**

Corrigé de l'exercice 4 : Sous-espaces de suites

1. La suite nulle converge. De plus, si $u \rightarrow \ell$ et $v \rightarrow \ell'$, les opérations sur les limites donnent $\lambda u + v \rightarrow \lambda \ell + \ell'$. **Les suites convergentes forment un sous-espace.**

2. La suite nulle convient. Si u et v vérifient la relation, alors pour tout n ,
 $\lambda u_{n+2} + v_{n+2} = (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + (\lambda u_n + v_n)$. **C'est un sous-espace.**

3. Toute suite géométrique $w = (a q^n)$ vérifie $w_1^2 = a^2 q^2 = w_0 w_2$. Prenons la suite constante (1) (avec $a = q = 1$) et la suite (2^n) . Leur somme vaut $w_0 = 2$, $w_1 = 3$, $w_2 = 5$. Or $w_1^2 = 9 \neq 10 = w_0 w_2$. **Les suites géométriques ne forment pas un sous-espace.**

4. La suite nulle est bornée, et $|\lambda u_n + v_n| \leq |\lambda| M_u + M_v$. **Les suites bornées forment un sous-espace.**

5. La suite nulle tend vers $0 \neq 1$. **Les suites de limite 1 ne forment pas un sous-espace.**

Corrigé de l'exercice 5 : Polynômes et matrices

1. Pour A : le polynôme nul s'annule en 1, et $(\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = 0$. A est un sous-espace. Pour B : le polynôme nul n'est pas de degré 3. De plus, X^3 et $-X^3 + X$ sont dans B , mais leur somme X est de degré 1. B n'est pas un sous-espace. Pour C : le polynôme nul est pair, et si $P(-X) = P(X)$ et $Q(-X) = Q(X)$, alors $(\lambda P + Q)(-X) = (\lambda P + Q)(X)$. C est un sous-espace.
2. La transposition vérifie $(\lambda A + B)^T = \lambda A^T + B^T$. Donc si A et B sont symétriques, $\lambda A + B$ l'est aussi, et la matrice nulle est symétrique. $\mathcal{S}_n$ est un sous-espace. Ensuite, la matrice nulle n'est pas inversible. Les matrices inversibles ne forment pas un sous-espace. Enfin, la trace est linéaire : $\text{tr}(\lambda A + B) = \lambda \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$. Les matrices de trace nulle forment un sous-espace.
3. Un calcul direct donne $E_{12}^2 = 0$ et $E_{21}^2 = 0$, donc $E_{12}, E_{21} \in N$. Pourtant :

$$(E_{12} + E_{21})^2 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0.$$

N n'est pas un sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Corrigé de l'exercice 6 : Combinaisons linéaires dans $\mathbb{R}^3$

1. On cherche a, b tels que $au + bv = (a, a + b, b) = (2, 5, 3)$. Les première et troisième coordonnées imposent $a = 2$ et $b = 3$. La deuxième se vérifie : $2 + 3 = 5$. Donc $w = 2u + 3v$.
2. De même, $(a, a + b, b) = (1, 1, 1)$ impose $a = b = 1$, puis $a + b = 2 \neq 1$. Le vecteur w' n'est pas combinaison linéaire de u et v .
3. On doit avoir $a = 1$, $b = 2$, puis $m = a + b$. Donc $m = 3$.
4. Un vecteur (x, y, z) s'écrit $(a, a + b, b)$ si et seulement si $a = x$, $b = z$ et $y = x + z$. Ainsi $\text{Vect}(u, v) = \{(x, z) : x - y + z = 0\}$. On contrôle : $2 - 5 + 3 = 0$ pour w ; $1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$ pour w' ; et $1 - m + 2 = 0$ redonne $m = 3$.

Corrigé de l'exercice 7 : Équation d'un plan engendré

1. Le vecteur (x, y, z) appartient à P si et seulement si le système suivant, d'inconnues a et b , est compatible :

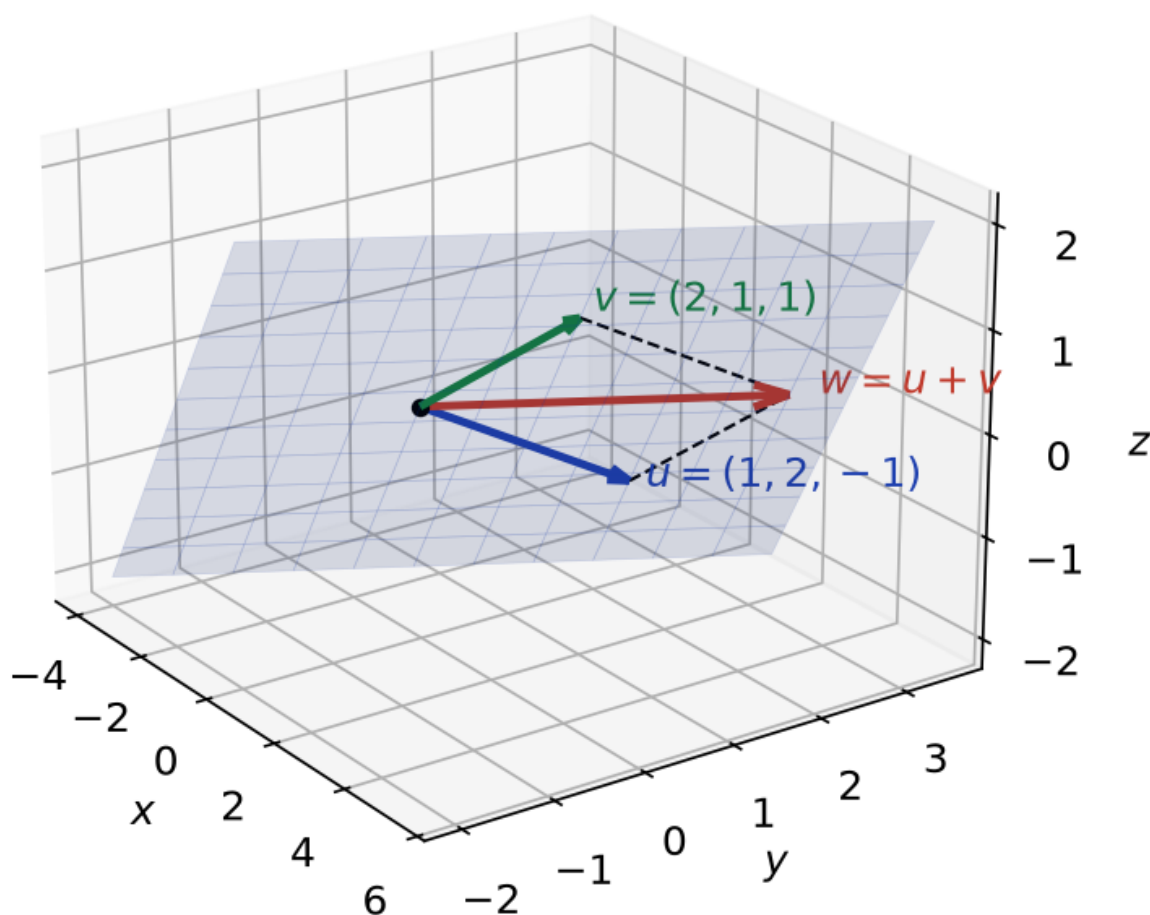
$$\begin{cases} a + 2b = x \\ 2a + b = y \\ -a + b = z \end{cases}$$

On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$. On obtient $-3b = y - 2x$ et $3b = x + z$. En ajoutant ces deux lignes, il vient $0 = -x + y + z$. Inversement, si cette condition est vraie, $b = (x + z)/3$ et $a = x - 2b = (x - 2z)/3$ conviennent. **Une équation de P est $x - y - z = 0$.**

2. On a $3 - 3 - 0 = 0$, donc $w \in P$. D'ailleurs, $w = u + v$. Ainsi $\text{Vect}(u, v) \subset \text{Vect}(u, v, w) \subset P = \text{Vect}(u, v)$. **Par conséquent,** $\text{Vect}(u, v, w) = P$.
3. On a $1 - 0 - 1 = 0$, donc $(1, 0, 1) \in P$. Les formules de la question 1 donnent $b = 2/3$ et $a = -1/3$. Vérification :
 $-\frac{1}{3}(1, 2, -1) + \frac{2}{3}(2, 1, 1) = \left(\frac{-1+4}{3}, \frac{-2+2}{3}, \frac{1+2}{3}\right) = (1, 0, 1)$. **Donc**
 $(1, 0, 1) = -\frac{1}{3}u + \frac{2}{3}v$.
4. Les vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$ vérifient l'équation : $1 - 1 - 0 = 0$ et $1 - 0 - 1 = 0$.
Donc $\text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1)) \subset P$. Inversement, $u = 2(1, 1, 0) - (1, 0, 1)$ et $v = (1, 1, 0) + (1, 0, 1)$. Donc $P = \text{Vect}(u, v) \subset \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1))$. **D'où l'égalité.**

La figure ci-dessous représente le plan P avec les vecteurs u , v et $w = u + v$, tous contenus dans ce plan.

plan $P: x - y - z = 0$



Point de méthode : pour prouver l'égalité de deux sous-espaces engendrés, on montre que chaque générateur de l'un appartient à l'autre, puis l'inverse.

Corrigé de l'exercice 8 : Sous-espace engendré par des fonctions trigonométriques

1. Pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Donc $1 = c + s \in \text{Vect}(c, s)$. Ainsi $\{c, s, 1\} \subset \text{Vect}(c, s)$, donc $\text{Vect}(c, s, 1) \subset \text{Vect}(c, s)$. L'autre inclusion est évidente.
Donc $\text{Vect}(c, s, 1) = \text{Vect}(c, s)$.
2. D'abord, $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, donc $k = c - s$. De plus, $1 = c + s$. Ainsi

$\text{Vect}(1, k) \subset \text{Vect}(c, s)$. Inversement, par demi-somme et demi-différence, $c = \frac{1}{2}(1 + k)$ et $s = \frac{1}{2}(1 - k)$. **Par double inclusion, $\text{Vect}(c, s) = \text{Vect}(1, k)$.**

- Supposons qu'il existe a, b réels tels que $\sin(2x) = a + b\cos(2x)$ pour tout x . En $x = 0$, on obtient $0 = a + b$. En $x = \pi/2$, on obtient $0 = a - b$. Donc $a = b = 0$. Or, en $x = \pi/4$, le membre de gauche vaut 1 . C'est une contradiction. **La fonction $x \rightarrow \sin(2x)$ n'appartient pas à $\text{Vect}(c, s)$.**
- Supposons $\cos x = a + b\cos(2x)$ pour tout x . En $x = 0$, on trouve $1 = a + b$. En $x = \pi$, on trouve $-1 = a + b$. C'est impossible. Autrement dit, tout élément de $\text{Vect}(1, k)$ est π -périodique, alors que $\cos$ ne l'est pas. **La fonction $\cos$ n'appartient pas à $\text{Vect}(c, s)$.**

Corrigé de l'exercice 9 : Égalité de sous-espaces engendrés

- Supposons $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$. Comme $A \subset \text{Vect}(A)$, on a bien $A \subset \text{Vect}(B)$. Réciproquement, supposons $A \subset \text{Vect}(B)$. Alors $\text{Vect}(B)$ est un sous-espace qui contient A . Or $\text{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace contenant A . **Donc $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$, et l'équivalence est prouvée.**
- Les vecteurs $u + v$ et $u - v$ sont dans $\text{Vect}(u, v)$. D'après la question 1, $\text{Vect}(u + v, u - v) \subset \text{Vect}(u, v)$. Inversement, 2 est inversible dans $\mathbb{K}$, et :

$$u = \frac{1}{2}(u + v) + \frac{1}{2}(u - v), \quad v = \frac{1}{2}(u + v) - \frac{1}{2}(u - v).$$
 Donc $u, v \in \text{Vect}(u + v, u - v)$. **D'où $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(u + v, u - v)$.**
- D'une part, u et $v + \lambda u$ sont dans $\text{Vect}(u, v)$. D'autre part, $v = (v + \lambda u) - \lambda u$ est dans $\text{Vect}(u, v + \lambda u)$. **Par la question 1 appliquée dans les deux sens, les deux sous-espaces sont égaux.**
- On applique la question 3 avec $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, 3, 4)$ et $\lambda = -1$. En effet, $v - u = (1, 1, 1)$. **Donc $\text{Vect}((1, 2, 3), (2, 3, 4)) = \text{Vect}((1, 2, 3), (1, 1, 1))$.**

Corrigé de l'exercice 10 : Réunion de deux sous-espaces

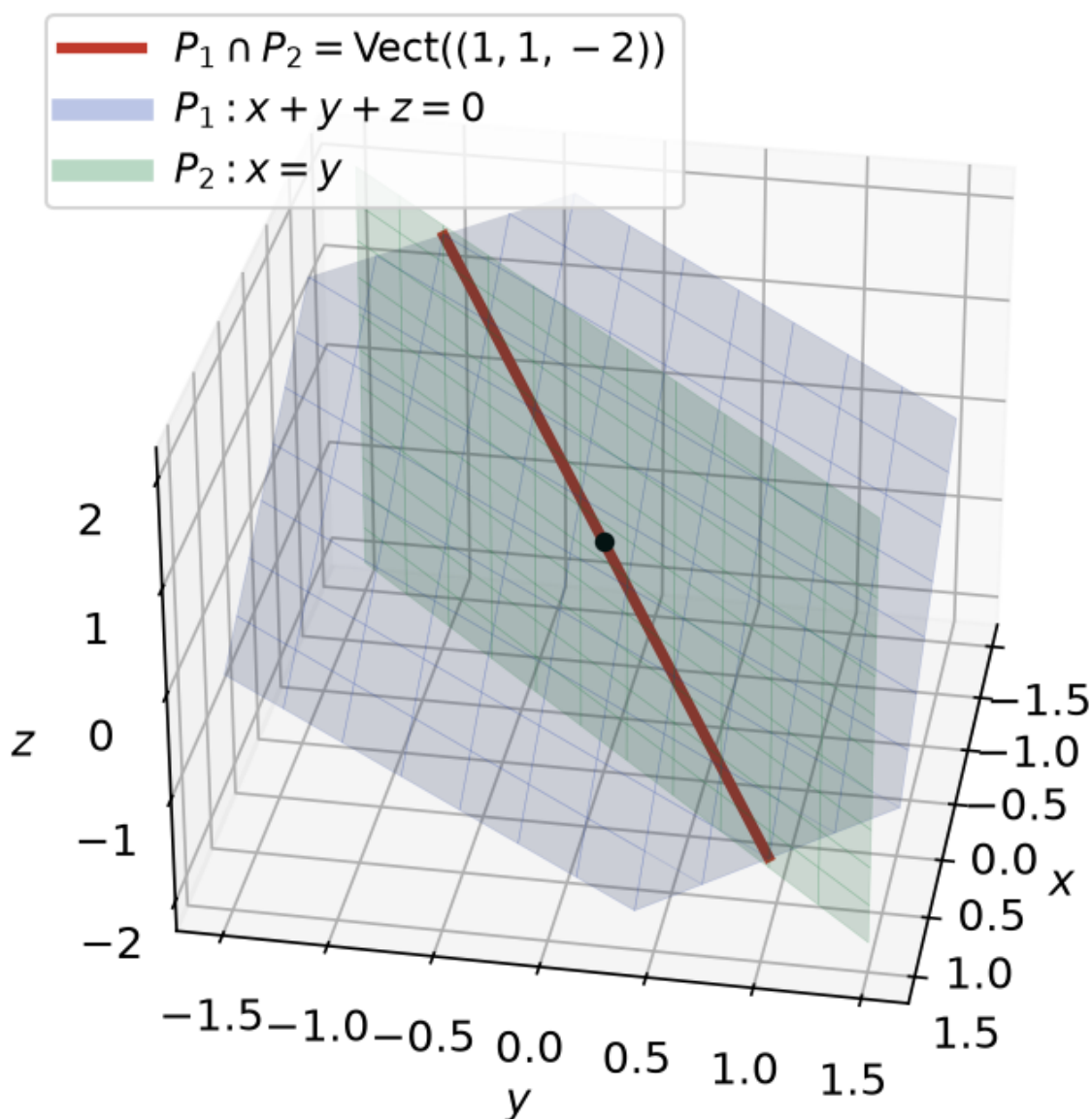
1. Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$, qui est un sous-espace. De même, si $G \subset F$, alors $F \cup G = F$. **Dans les deux cas, $F \cup G$ est un sous-espace.**
2. Soit $x \in F \setminus G$ et $y \in G$. Comme $F \cup G$ est un sous-espace, $x + y \in F \cup G$. Supposons $x + y \in G$. Alors $x = (x + y) - y \in G$, ce qui est exclu. Donc $x + y \in F$, puis $y = (x + y) - x \in F$. Ainsi $G \subset F$. En résumé, si $F \not\subset G$, alors $G \subset F$. **Donc $F \cup G$ est un sous-espace si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.**
3. Supposons $\mathbb{R}^2 = D_1 \cup D_2$, avec deux droites vectorielles. Cette réunion est un sous-espace, donc par exemple $D_1 \subset D_2$ et $\mathbb{R}^2 = D_2 = \text{Vect}(w)$. Alors $(1, 0) = \alpha w$ et $(0, 1) = \beta w$, avec α, β non nuls. On en déduit $w = (1/\alpha, 0)$ et $w = (0, 1/\beta)$, ce qui est absurde. **Le plan $\mathbb{R}^2$ n'est donc pas la réunion de deux droites vectorielles.**

Point de méthode : pour montrer une inclusion entre sous-espaces, on combine linéairement des vecteurs bien choisis et l'on utilise la stabilité.

Corrigé de l'exercice 11 : Intersection et somme de deux plans de $\mathbb{R}^3$

1. Un vecteur de $P_1 \cap P_2$ vérifie $x = y$ et $x + y + z = 0$, donc $z = -2x$. Ainsi $(x, y, z) = x(1, 1, -2)$. Inversement, ce vecteur vérifie les deux équations. **Donc $P_1 \cap P_2 = \text{Vect}((1, 1, -2))$, droite de vecteur directeur $(1, 1, -2)$.**
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $p_2 = (0, 0, a + b + c)$, qui vérifie $x = y$, donc $p_2 \in P_2$. On pose ensuite $p_1 = (a, b, -a - b)$, qui vérifie $a + b - a - b = 0$, donc $p_1 \in P_1$. Enfin, $p_1 + p_2 = (a, b, c)$. **Donc $P_1 + P_2 = \mathbb{R}^3$.**
3. La somme n'est pas directe, car $P_1 \cap P_2 \neq \{0\}$. Concrètement, $(1, 1, -2) \in P_1$ et $(-1, -1, 2) \in P_2$. On a alors deux décompositions distinctes : $0 = 0 + 0$ et $0 = (1, 1, -2) + (-1, -1, 2)$. **La somme $P_1 + P_2$ n'est pas directe.**

La figure suivante montre les deux plans et leur droite d'intersection, qui passe par l'origine.



Corrigé de l'exercice 12 : Une droite et un plan supplémentaires

1. Soit $\lambda(1, 1, 1) \in P$. Alors $3\lambda = 0$, donc $\lambda = 0$. Ainsi $D \cap P = \{0\}$.
2. Analyse. Supposons $(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1) + p$ avec $p \in P$. La somme des coordonnées de p est nulle. En sommant les coordonnées, on obtient $x + y + z = 3\lambda$. On note

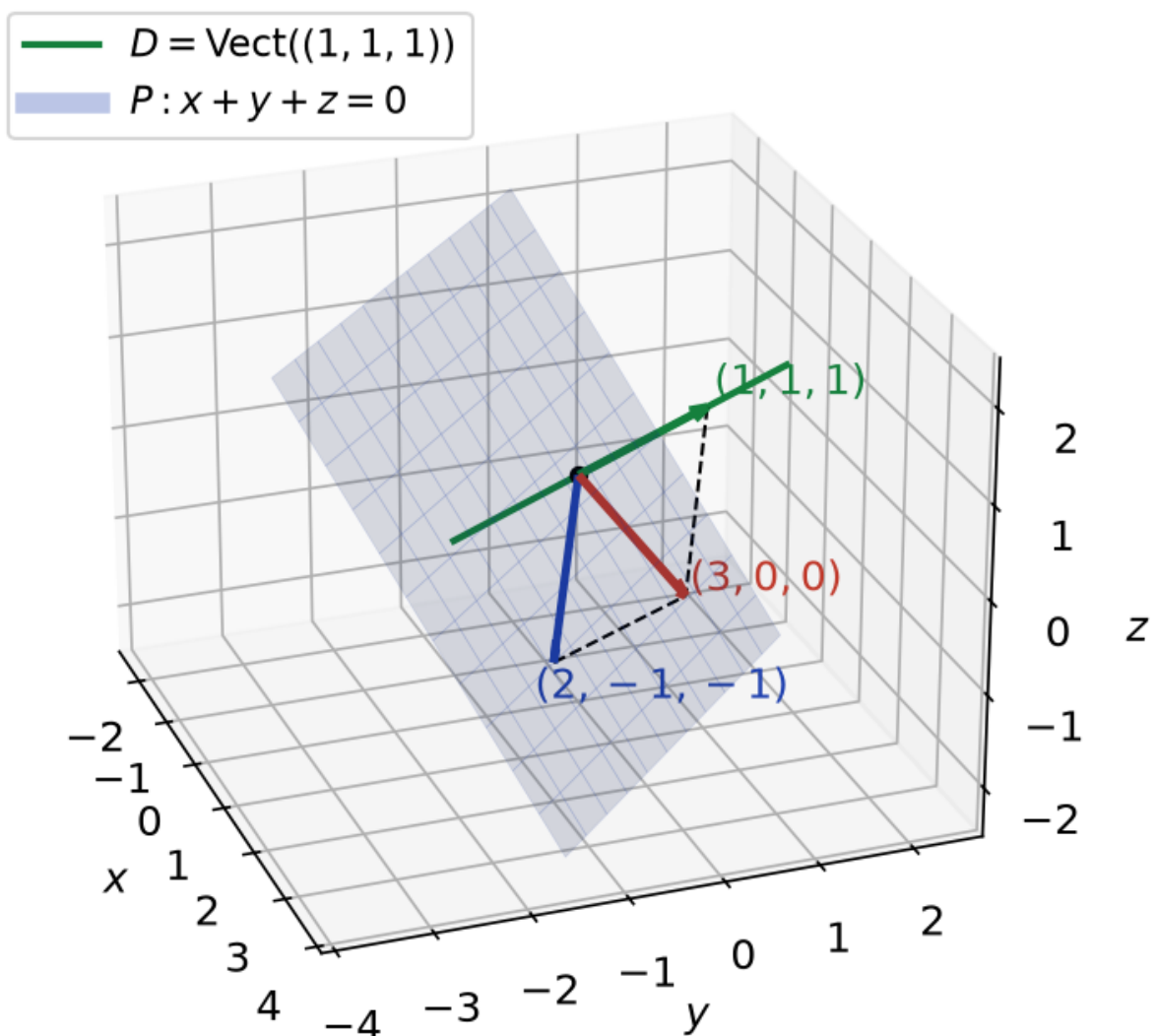
$s = x + y + z$: alors $\lambda = s/3$ et $p = (x - s/3, y - s/3, z - s/3)$.

Synthèse. On pose ces deux vecteurs. Le premier est dans D . La somme des coordonnées du second vaut $s - 3 \cdot s/3 = 0$, donc il est dans P . Leur somme vaut (x, y, z) . **Donc**

$$\mathbb{R}^3 = D \oplus P, \text{ avec } (x, y, z) = \frac{s}{3}(1, 1, 1) + \left(x - \frac{s}{3}, y - \frac{s}{3}, z - \frac{s}{3}\right).$$

3. Pour $(3, 0, 0)$, on a $s = 3$, donc $\lambda = 1$. Pour $(1, 2, 3)$, on a $s = 6$, donc $\lambda = 2$.
On obtient $(3, 0, 0) = (1, 1, 1) + (2, -1, -1)$ et $(1, 2, 3) = (2, 2, 2) + (-1, 0, 1)$.

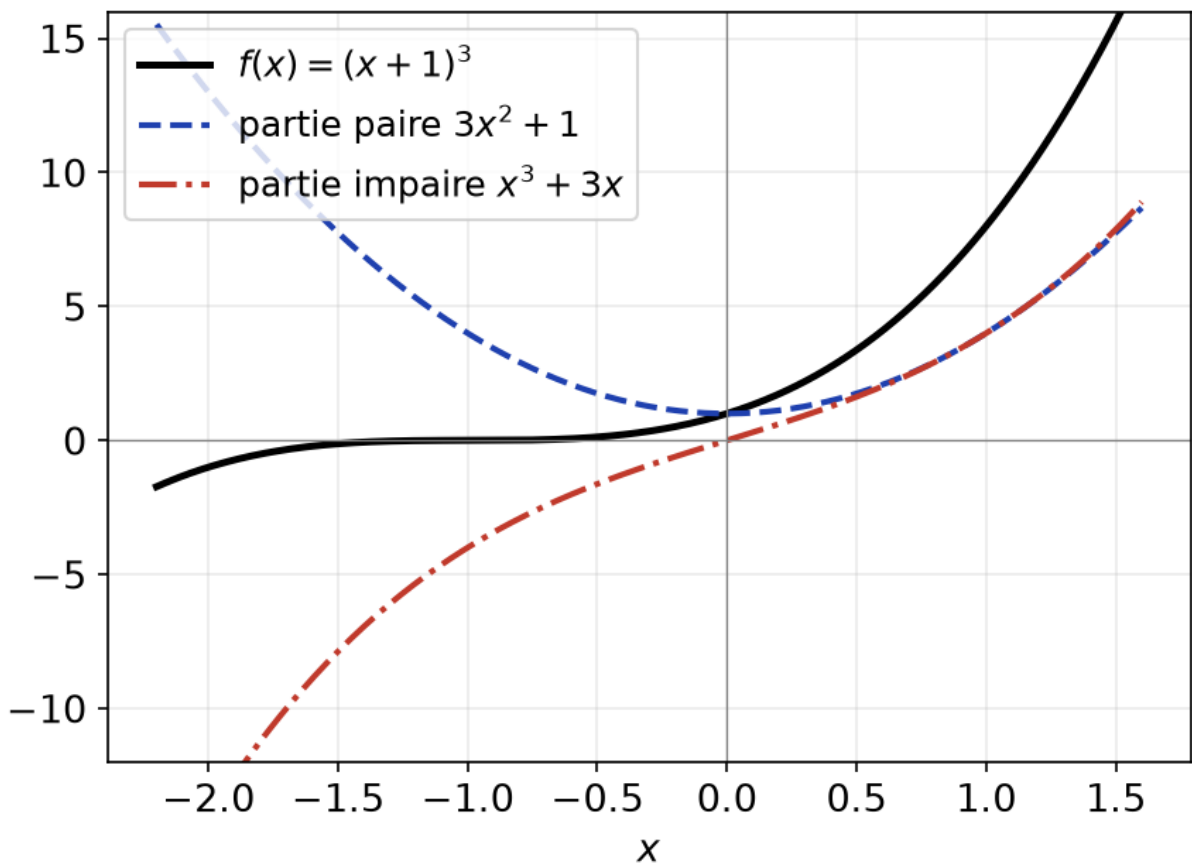
La figure ci-dessous illustre la décomposition de $(3, 0, 0)$: c'est la diagonale du parallélogramme construit sur $(1, 1, 1)$ et $(2, -1, -1)$.



Corrigé de l'exercice 13 : Fonctions paires et fonctions impaires

1. La fonction nulle est paire. Si f et g sont paires, alors $(\lambda f + g)(-x) = \lambda f(x) + g(x)$.
Donc $\mathcal{P}$ est un sous-espace. De même, si f et g sont impaires,
 $(\lambda f + g)(-x) = -(\lambda f + g)(x)$. **$\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces.**
2. Soit f paire et impaire. Pour tout x , $f(x) = f(-x) = -f(x)$, donc $2f(x) = 0$ et $f(x) = 0$. **Donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$.**
3. Analyse. Si $f = p + i$, alors $f(-x) = p(x) - i(x)$. On en déduit $p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$
et $i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. Synthèse. Ces fonctions vérifient $p(-x) = p(x)$,
 $i(-x) = -i(x)$ et $p + i = f$. **Donc $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.**
4. On développe $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, puis $f(-x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$. Donc
la partie paire vaut $3x^2 + 1$ et la partie impaire $x^3 + 3x$. Pour $g = \exp$, on trouve
 $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch } x$ et $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh } x$. **Ainsi $(x+1)^3 = (3x^2 + 1) + (x^3 + 3x)$
et $e^x = \text{ch } x + \text{sh } x$.**

Sur la figure suivante, la courbe paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, la courbe impaire par rapport à l'origine. En chaque abscisse, leur somme redonne $(x+1)^3$.



Corrigé de l'exercice 14 : Matrices symétriques et antisymétriques

1. La matrice nulle est symétrique et antisymétrique. Par linéarité de la transposition, si $A^T = A$ et $B^T = B$, alors $(\lambda A + B)^T = \lambda A + B$. De même, si $A^T = -A$ et $B^T = -B$, alors $(\lambda A + B)^T = -(\lambda A + B)$. $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont des sous-espaces.
2. D'abord, si $A \in \mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n$, alors $A = A^T = -A$, donc $A = 0$. Ensuite, analyse : si $M = S + A$, alors $M^T = S - A$, donc $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$. Synthèse : ces matrices sont respectivement symétrique et antisymétrique, et leur somme vaut M . Donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.
3. On calcule M^T , puis les deux demi-sommes :

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & \\ 0 & -1 & 66 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $S + A = M$, que S est symétrique et que A est antisymétrique. **La décomposition est $M = S + A$ avec les matrices ci-dessus.**

Corrigé de l'exercice 15 : Polynômes s'annulant en 0 et en 1

1. Le polynôme nul est dans F . Si $P, Q \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda P + Q)(0) = 0$ et $(\lambda P + Q)(1) = 0$. **F est un sous-espace.**
2. Soit $P = aX + b \in F \cap G$. Alors $P(0) = b = 0$ et $P(1) = a + b = 0$, donc $a = b = 0$. **Ainsi $F \cap G = \{0\}$.**
3. Analyse. Si $P = R + Q$ avec $R \in F$ et $Q = aX + b$, alors $P(0) = Q(0) = b$ et $P(1) = Q(1) = a + b$. Donc $Q = P(0) + (P(1) - P(0))X$. Synthèse. On pose ce Q , qui est dans G , et $R = P - Q$. Alors $R(0) = P(0) - P(0) = 0$ et $R(1) = P(1) - P(1) = 0$, donc $R \in F$. **Donc $\mathbb{R}[X] = F \oplus G$, avec $Q = P(0) + (P(1) - P(0))X$.**
4. Pour X^3 : $P(0) = 0$ et $P(1) = 1$, donc $Q = X$ et $R = X^3 - X$. Pour $X^2 + 3$: $P(0) = 3$ et $P(1) = 4$, donc $Q = 3 + X$ et $R = X^2 - X$. On contrôle que $X^3 - X$ et $X^2 - X$ s'annulent en 0 et en 1. **Ainsi $X^3 = (X^3 - X) + X$ et $X^2 + 3 = (X^2 - X) + (X + 3)$.**
5. Tout polynôme $X(X-1)R$ s'annule en 0 et en 1. Inversement, soit $P \in F$. Comme 0 est racine, X divise P : $P = X P_1$. Ensuite, $P(1) = P_1(1) = 0$, donc $X - 1$ divise P_1 . **Donc $F = \{X(X-1)R : R \in \mathbb{R}[X]\}$.**

Corrigé de l'exercice 16 : Suites convergentes et suites constantes

1. La suite nulle tend vers 0 . Si $u \rightarrow 0$ et $v \rightarrow 0$, alors $\lambda u + v \rightarrow 0$. Donc F est un sous-espace de E . De plus, une combinaison de suites constantes est constante. **F et G sont des sous-espaces de E .**
2. Une suite constante égale à c tend vers c ; si elle est dans F , alors $c = 0$. Donc $F \cap G = \{0\}$. Ensuite, soit $u \in E$ de limite ℓ . La suite $(u_n - \ell)$ tend vers 0 , et $u = (u - \ell) + \ell$. **Donc $E = F \oplus G$, la composante sur G étant la suite constante égale à la limite.**
3. On écrit $\frac{2n+1}{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$. La limite vaut 2 . Pour v , la limite vaut 3 , car $(1/2)^n \rightarrow 0$. **Donc $u = \left(-\frac{1}{n+1}\right) + (2)$ et $v = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + (3)$.**

Corrigé de l'exercice 17 : Un hyperplan de $\mathbb{R}^4$

1. L'ensemble H est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène. Précisément, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\lambda x + y) = \lambda \varphi(x) + \varphi(y)$. **H est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$.**
2. Chaque $e_i - e_{i+1}$ a une somme de coordonnées nulle, donc $\text{Vect}(e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4) \subset H$. Inversement, soit $x \in H$. On vérifie que :

$$x = x_1(e_1 - e_2) + (x_1 + x_2)(e_2 - e_3) + (x_1 + x_2 + x_3)(e_3 - e_4).$$

En effet, les coordonnées du membre de droite sont x_1 , $-x_1 + x_1 + x_2 = x_2$, $-(x_1 + x_2) + x_1 + x_2 + x_3 = x_3$ et $-(x_1 + x_2 + x_3) = -x_4$, cette dernière égalité venant de $x \in H$. **Donc $H = \text{Vect}(e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4)$.**
3. On a $\varphi(u) = 1 \neq 0$. Si $\lambda u \in H$, alors $\lambda = 0$, donc $H \cap \text{Vect}(u) = \{0\}$. Ensuite, pour $x \in \mathbb{R}^4$, on note $s = \varphi(x)$. Le vecteur $x - s u = (x_1 - s, x_2, x_3, x_4)$ a une somme de coordonnées $s - s = 0$. **Donc $\mathbb{R}^4 = H \oplus \text{Vect}(u)$, avec**

$$x = (x_1 - s, x_2, x_3, x_4) + s u.$$
4. On a $\varphi(u') = 1 - 1 = 0$, donc $u' \in H$. Ainsi $H \cap \text{Vect}(u') = \text{Vect}(u') \neq \{0\}$. **La droite $\text{Vect}(u')$ n'est pas un supplémentaire de H .**
5. Soit $w \notin H$, donc $\varphi(w) \neq 0$. Si $\lambda w \in H$, alors $\lambda \varphi(w) = 0$ et $\lambda = 0$. De plus, pour tout x , on pose $\mu = \varphi(x)/\varphi(w)$. Alors $\varphi(x - \mu w) = 0$ et $x = (x - \mu w) + \mu w$. **Donc $\mathbb{R}^4 = H \oplus \text{Vect}(w)$ pour tout $w \notin H$.**

Corrigé de l'exercice 18 : Fonctions d'intégrale nulle

1. La fonction nulle est d'intégrale nulle. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^1 (\lambda f + g) = \lambda \int_0^1 f + \int_0^1 g = 0 \text{ pour } f, g \in F. \text{ Ensuite, les fonctions constantes sont}$$

continues et une combinaison de constantes est constante. **F et G sont des sous-espaces de E .**

2. Une constante c a pour intégrale c sur $[0, 1]$. Si elle est dans F , alors $c = 0$. Donc

$$F \cap G = \{0\}. \text{ Analyse : si } f = h + c, \text{ avec } h \in F, \text{ alors } \int_0^1 f = c. \text{ Synthèse : on}$$

$$\text{pose } m = \int_0^1 f \text{ et } h = f - m. \text{ Alors } h \text{ est continue et } \int_0^1 h = m - m = 0. \text{ Donc}$$

$E = F \oplus G$, la composante sur G étant la valeur moyenne m de f .

3. On a $\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$ et $\int_0^1 e^t dt = e - 1$. **Donc** $x^2 = \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$ **et**
 $e^x = (e^x - e + 1) + (e - 1).$

Corrigé de l'exercice 19 : Fonctions nulles aux bords et fonctions affines

1. La fonction nulle est dans F . Si $h_1, h_2 \in F$, alors $(\lambda h_1 + h_2)(0) = 0$ et $(\lambda h_1 + h_2)(1) = 0$. Ensuite, $\lambda(ax + b) + (a'x + b') = (\lambda a + a')x + (\lambda b + b')$ est affine, et les fonctions affines sont continues. **F et G sont des sous-espaces de E .**

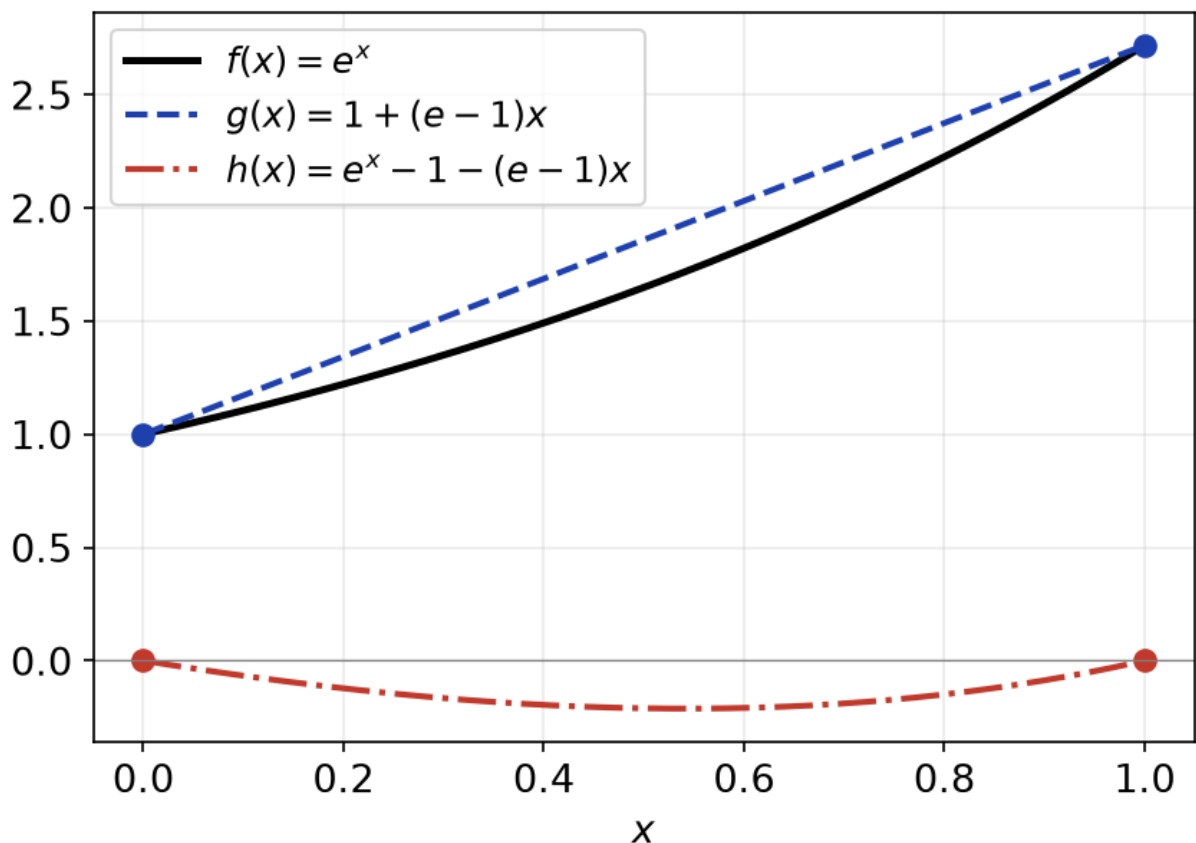
2. Soit $g: x \rightarrow ax + b$ dans F . Alors $g(0) = b = 0$ et $g(1) = a + b = 0$, donc $a = b = 0$. **Ainsi $F \cap G = \{0\}$.**

3. Analyse. Si $f = h + g$ avec $h \in F$ et $g(x) = ax + b$, alors $f(0) = b$ et

$f(1) = a + b$. Synthèse. On pose $g(x) = f(0) + (f(1) - f(0))x$ et $h = f - g$. Alors h est continue, $h(0) = 0$ et $h(1) = f(1) - f(1) = 0$. **Donc $E = F \oplus G$ avec $g(x) = f(0) + (f(1) - f(0))x$.** Graphiquement, g est la corde qui joint les points $(0, f(0))$ et $(1, f(1))$, comme sur la figure de l'énoncé.

4. Pour $f = \exp$, on a $f(0) = 1$ et $f(1) = e$. Donc $g(x) = 1 + (e - 1)x$ et $h(x) = e^x - 1 - (e - 1)x$. Pour f_2 , on a $f_2(0) = 0$ et $f_2(1) = \sin \pi + 1 = 1$. Donc $g(x) = x$ et $h(x) = \sin(\pi x)$, qui s'annule bien en 0 et en 1. **Ainsi $e^x = (e^x - 1 - (e - 1)x) + (1 + (e - 1)x)$ et $f_2(x) = \sin(\pi x) + x$.**
5. Pour $f \in E$, on écrit $f = (f - f(0)) + f(0)$. La fonction $f - f(0)$ s'annule en 0, et la constante $f(0)$ est affine. Donc $F' + G = E$. Cependant, la fonction $x \rightarrow x$ est affine, non nulle, et s'annule en 0. **Donc $F' \cap G \neq \{0\}$: la somme $F' + G = E$ n'est pas directe.**

La figure ci-dessous représente la décomposition de l'exponentielle. La composante h s'annule aux deux bords et reste négative, car la courbe d'une fonction convexe est sous ses cordes.



Point de méthode : dans une analyse-synthèse, l'analyse donne l'unicité, et la synthèse donne l'existence. Il faut rédiger les deux étapes.

Corrigé de l'exercice 20 : Somme et intersection ne se distribuent pas

1. Soit $x = y + z$ avec $y \in F \cap G$ et $z \in F \cap H$. D'abord, $y, z \in F$, donc $x \in F$. Ensuite, $y \in G$ et $z \in H$, donc $x \in G + H$. **Ainsi**
 $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$.
2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on écrit $(x, y) = (y - x)(0, 1) + x(1, 1)$. Donc $G + H = \mathbb{R}^2$ et $F \cap (G + H) = F$. En revanche, $(t, 0) = (0, s)$ impose $t = 0$, donc $F \cap G = \{0\}$. De même, $(t, 0) = (s, s)$ impose $s = 0$ puis $t = 0$, donc $F \cap H = \{0\}$. Comme le montre la figure de l'énoncé, les trois droites se coupent seulement en l'origine. **Ainsi**
 $(F \cap G) + (F \cap H) = \{0\} \neq F = F \cap (G + H)$: **l'inclusion de la question 1 est stricte en général.**
3. Supposons $G \subset F$. D'une part, $G \subset F \cap (G + H)$ et $F \cap H \subset F \cap (G + H)$. Comme $F \cap (G + H)$ est un sous-espace, il contient $G + (F \cap H)$. D'autre part, soit $x \in F \cap (G + H)$, écrit $x = g + h$ avec $g \in G$ et $h \in H$. Alors $h = x - g$ est dans F , car $x \in F$ et $g \in G \subset F$. Donc $h \in F \cap H$ et $x \in G + (F \cap H)$.
Par double inclusion, $F \cap (G + H) = G + (F \cap H)$ lorsque $G \subset F$.

Corrigé de l'exercice 21 : Problème, suites récurrentes linéaires d'ordre 2

1. La suite nulle vérifie la relation. Soit $u, v \in S$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, et posons $w = \lambda u + v$. Pour tout n :

$$w_{n+2} = \lambda(u_{n+1} + 2u_n) + (v_{n+1} + 2v_n) = w_{n+1} + 2w_n.$$

Donc S est un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. La suite (r^n) est dans S si et seulement si $r^{n+2} = r^{n+1} + 2r^n$ pour tout n . Comme

$r \neq 0$, on peut diviser par r^n : la condition équivaut à $r^2 = r + 2$. Cette équation s'écrit $(r - 2)(r + 1) = 0$. **Donc** $(r^n) \in S \Leftrightarrow r \in \{2, -1\}$, **et** $a = (2^n)$ **et** $b = ((-1)^n)$ **sont dans** S .

3. Soit $u, v \in S$ avec $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$. Montrons par récurrence double que $u_n = v_n$ pour tout n . C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Si $u_n = v_n$ et $u_{n+1} = v_{n+1}$, alors $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n = v_{n+1} + 2v_n = v_{n+2}$. **Donc** $u = v$.

4. On a déjà $\text{Vect}(a, b) \subset S$, car S est un sous-espace. Inversement, soit $u \in S$. On cherche α, β tels que $\alpha + \beta = u_0$ et $2\alpha - \beta = u_1$. En additionnant, $3\alpha = u_0 + u_1$, donc :

$$\alpha = \frac{u_0 + u_1}{3}, \quad \beta = u_0 - \alpha = \frac{2u_0 - u_1}{3}.$$

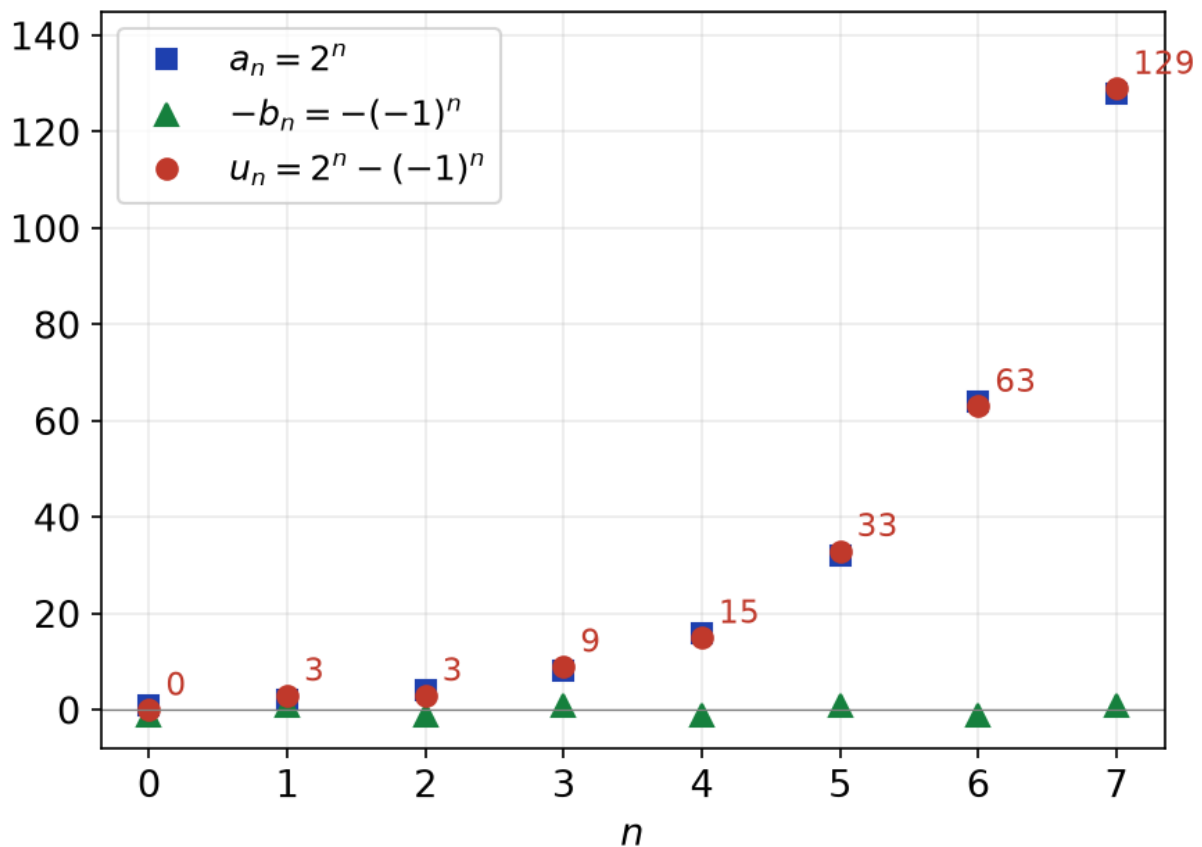
La suite $\alpha a + \beta b$ est dans S et a les mêmes deux premiers termes que u . D'après la question 3, elle est égale à u . **Donc** $S = \text{Vect}(a, b)$, **avec** $u_n = \alpha 2^n + \beta (-1)^n$.

5. Supposons $\lambda 2^n = \mu (-1)^n$ pour tout n . En $n = 0$, $\lambda = \mu$. En $n = 1$, $2\lambda = -\mu = -\lambda$, donc $3\lambda = 0$. Ainsi $\lambda = \mu = 0$ et $\text{Vect}(a) \cap \text{Vect}(b) = \{0\}$. Avec la question 4, $S = \text{Vect}(a) + \text{Vect}(b)$. **Donc** $S = \text{Vect}(a) \oplus \text{Vect}(b)$.

6. Avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$, on obtient $\alpha = 1$ et $\beta = -1$. Donc $u_n = 2^n - (-1)^n$. Vérification : la formule donne $u_2 = 4 - 1 = 3$ et la relation donne $u_2 = u_1 + 2u_0 = 3$. De même, $u_3 = 8 + 1 = 9$ et $u_2 + 2u_1 = 3 + 6 = 9$. **La suite cherchée est** $u_n = 2^n - (-1)^n$.

7. Soit $u = \alpha a + \beta b$ bornée par M . Alors $|\alpha| 2^n \leq |u_n| + |\beta| \leq M + |\beta|$ pour tout n . Si $\alpha \neq 0$, la suite (2^n) serait bornée, ce qui est faux. Donc $\alpha = 0$. Inversement, toute suite βb est bornée. Ainsi $S_b = \text{Vect}(b)$, qui est un sous-espace. Enfin, une suite convergente est bornée, donc de la forme $\beta (-1)^n$. Ses termes pairs valent β et ses termes impairs $-\beta$. Elle converge seulement si $\beta = -\beta$, soit $\beta = 0$. **Donc** $S_b = \text{Vect}(b)$, **et la seule suite convergente de** S **est la suite nulle.**

La figure ci-dessous montre les premiers termes de $u_n = 2^n - (-1)^n$: la composante 2^n domine, tandis que $-(-1)^n$ oscille entre -1 et 1 .



Point de méthode : pour décrire un espace de solutions, on trouve des solutions particulières simples, puis on prouve qu'elles engendrent tout grâce à l'unicité donnée par les conditions initiales.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [espaces vectoriels, cours de maths en L1](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur espaces vectoriels](#)
- À maîtriser avant : [Systèmes linéaires et calcul matriciel](#)
- Chapitre précédent : [Formules de Taylor et développements limités](#)

- Chapitre suivant : [Familles libres, bases et dimension](#)
- Le même thème en maths sup : [espaces vectoriels, exercices de maths sup](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)