

Espaces probabilisés

Exercice 1 : Une bijection explicite de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$

On définit $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ par $f(p, q) = 2^p(2q + 1) - 1$.

1. Justifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$, puis montrer que f est bijective.
2. Calculer $f(2, 3)$, puis déterminer les antécédents de 100 et de 47.
3. En déduire, par récurrence, que $\mathbb{N}^p$ est dénombrable pour tout $p \geq 1$.
4. Soit E et F deux ensembles dénombrables. Montrer que $E \times F$ est dénombrable.

Exercice 2 : Quelques ensembles dénombrables usuels

1. Montrer que l'application $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $g(n) = 2n$ si $n \geq 0$ et $g(n) = -2n - 1$ si $n < 0$ est une bijection. Déterminer $g^{-1}(7)$ et $g^{-1}(10)$.
2. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
3. Montrer que $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable.
4. Montrer que l'ensemble des disques ouverts du plan dont le centre a des coordonnées rationnelles et dont le rayon est rationnel strictement positif est dénombrable.
5. Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles finis non vides, deux à deux disjoints. Montrer que $\bigcup_n E_n$ est dénombrable.

Exercice 3 : Polynômes à coefficients entiers et nombres algébriques

Un nombre complexe est dit algébrique s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{Z}_n[X]$ est dénombrable.
2. En déduire que $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable.
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ des nombres algébriques est dénombrable.
4. En déduire qu'il existe des nombres réels qui ne sont pas algébriques. Que dire de l'ensemble des réels non algébriques ?

Exercice 4 : Suites de 0 et de 1 et argument diagonal

On note $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$.

1. Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \Omega$. On définit $u \in \Omega$ par $u_n = 1 - \varphi(n)_n$. Montrer que u n'a pas d'antécédent par φ . Conclure.
2. On définit $h : \Omega \rightarrow [0, 1]$ par $h(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2u_n}{3^{n+1}}$. Justifier la convergence, puis montrer que h est injective. Indication : si $u \neq v$, considérer le plus petit indice k tel que $u_k \neq v_k$.
3. En déduire que $[0, 1]$, puis $\mathbb{R}$, ne sont pas dénombrables.
4. Montrer que l'ensemble des suites de Ω qui ne s'annulent qu'un nombre fini de fois est dénombrable. En déduire que l'ensemble des suites comportant une infinité de 0 n'est pas dénombrable.

Exercice 5 : Parties finies et parties quelconques de $\mathbb{N}$

1. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Montrer que l'application $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$,

$$A \mapsto \sum_{a \in A} 2^a$$
est une bijection. Donner $\Phi(\{0, 2, 5\})$ et $\Phi^{-1}(100)$.
2. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ une application. On pose $B = \{n \in \mathbb{N} : n \notin f(n)\}$.
Montrer que B n'a pas d'antécédent par f . Qu'en déduit-on pour $\mathcal{P}(\mathbb{N})$?
3. Montrer que l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 6 : Tribus sur un ensemble fini

On pose $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.

1. La famille $\{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\}$ est-elle une tribu sur Ω ? Et la famille $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \Omega\}$?
2. Déterminer la plus petite tribu $\mathcal{T}$ sur Ω contenant $\{1\}$ et $\{2, 3\}$. Combien a-t-elle d'éléments ?
3. Montrer que l'intersection de deux tribus sur un ensemble quelconque est une tribu.
4. On note $\mathcal{T}_1$ la plus petite tribu contenant $\{1\}$ et $\mathcal{T}_2$ la plus petite tribu contenant $\{2\}$. La réunion $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ est-elle une tribu ?

Exercice 7 : La tribu des parties dénombrables ou codénombrables

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties A de $\mathbb{R}$ telles que A ou $\mathbb{R} \setminus A$ soit au plus dénombrable.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $[0, 1] \notin \mathcal{C}$.

3. Pour $A \in \mathcal{C}$, on pose $P(A) = 0$ si A est au plus dénombrable et $P(A) = 1$ sinon. Montrer que P est bien définie, puis que c'est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$.

Exercice 8 : Distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$

1. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}$. On note P la probabilité associée sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $P(\{k, k+1, 2, \dots\})$.
3. Calculer la probabilité de l'ensemble des entiers pairs.
4. Déterminer le réel λ tel que $(\lambda 4^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ soit une distribution de probabilités, puis calculer pour la probabilité associée Q la valeur de $Q(\{k, 1, \dots\})$.
5. Montrer qu'il n'existe aucune probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ qui attribue la même probabilité à tous les singletons.

Exercice 9 : Parité d'un entier choisi au hasard

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Déterminer c pour que $P(\{n\}) = \frac{c}{n^2}$ définisse une probabilité sur $\mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité qu'un entier soit pair, puis qu'il soit multiple d'un entier $d \geq 1$ donné.
2. On munit $\mathbb{N}$ de la loi de Poisson de paramètre 2 : $P(\{n\}) = e^{-2} \frac{2^n}{n!}$. Calculer la probabilité qu'un entier soit pair.
3. Déterminer a pour que la famille définie par $p_n = \frac{a}{n^2}$ si n est impair et $p_n = 0$ si n est pair ($n \geq 1$) soit une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}^*$. Quel est son support ?

Exercice 10 : Ne jamais obtenir de six

On lance indéfiniment un dé équilibré. Les lancers sont supposés mutuellement indépendants. Pour $n \geq 1$, on note S_n l'événement « le n -ième lancer donne six ».

1. Pour $n \geq 1$, calculer la probabilité de B_n : « aucun six lors des n premiers lancers ».
2. Montrer que l'événement « ne jamais obtenir six » est négligeable.
3. Pour $k \geq 0$, on note C_k : « aucun six après le lancer k ». Montrer que $P(C_k) = 0$. En déduire que, presque sûrement, on obtient une infinité de six.
4. Calculer la probabilité que le premier six apparaisse à un lancer de rang pair.

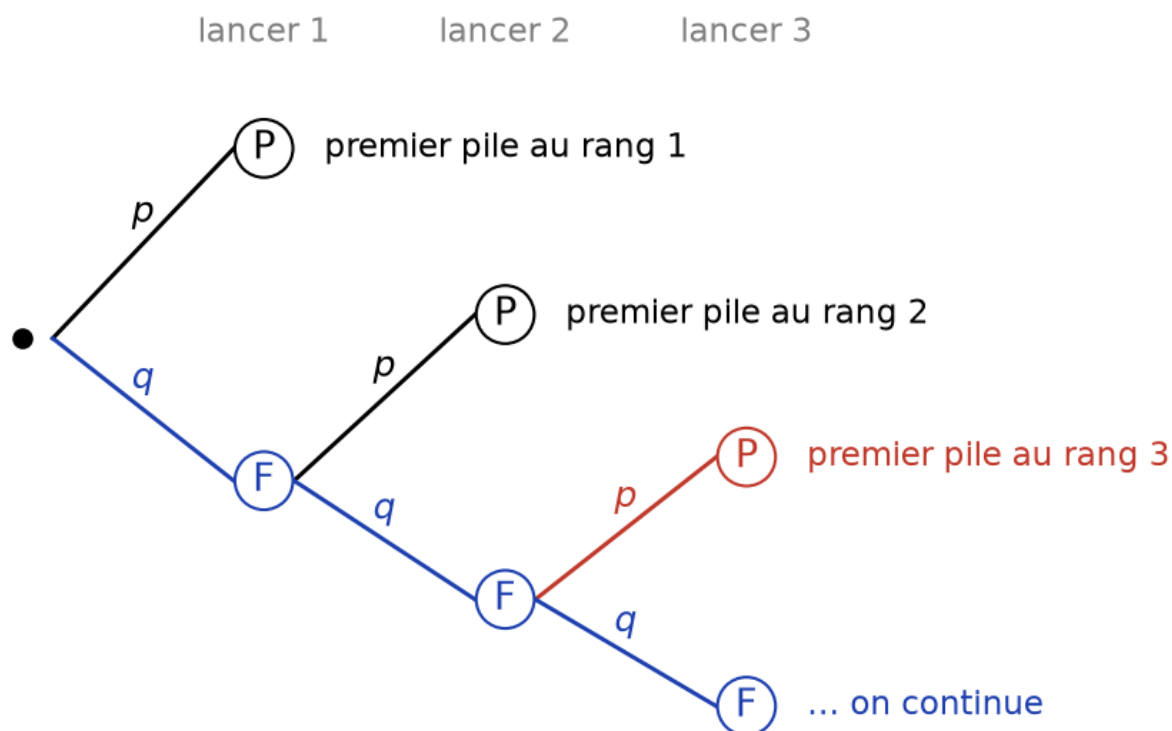
Exercice 11 : Sous-additivité et lemme de Borel-Cantelli

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

1. Montrer qu'une réunion dénombrable d'événements négligeables est négligeable, puis qu'une intersection dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.
2. On note $L = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k$. Décrire L par une phrase.
3. On suppose que la série $\sum P(A_n)$ converge. Montrer que $P(L) = 0$.
4. On lance une suite de pièces : la n -ième pièce ($n \geq 1$) donne pile avec probabilité $\frac{1}{n^2}$. Montrer que, presque sûrement, on n'obtient qu'un nombre fini de piles.

Exercice 12 : Modélisation du jeu de pile ou face infini

On lance indéfiniment une pièce qui donne pile avec probabilité $p \in]0, 1[$; on pose $q = 1 - p$. On admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur lequel les événements P_n : « le n -ième lancer donne pile » sont mutuellement indépendants, de probabilité p . L'arbre ci-dessous décrit les premiers lancers.



1. Pour $n \geq 1$, exprimer l'événement T_n : « le premier pile apparaît au lancer n » à l'aide des P_k , puis calculer $P(T_n)$.
2. Montrer que l'événement « on n'obtient jamais pile » est négligeable.
3. Montrer que $(T_n)_{n \geq 1}$ est un système quasi-complet d'événements. Est-ce un système complet ?
4. On prend $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$. Montrer que chaque singleton $\{\omega\}$ est négligeable. En déduire à nouveau que Ω n'est pas dénombrable.
5. Calculer la probabilité que le premier pile apparaisse à un rang pair.

Exercice 13 : Lancers alternés et système quasi-complet

Deux joueurs, Alice et Bruno, lancent à tour de rôle une pièce qui donne pile avec probabilité $p \in]0, 1[$; on pose $q = 1 - p$. Alice commence, et le premier qui obtient pile gagne. On reprend les notations T_n de l'exercice 12.

1. À l'aide du système quasi-complet $(T_n)_{n \geq 1}$, calculer la probabilité qu'Alice gagne, puis celle que Bruno gagne.
2. Montrer que la partie se termine presque sûrement.
3. Existe-t-il une valeur de p pour laquelle le jeu est équitable ?
4. Sachant qu'Alice a gagné, quelle est la probabilité qu'elle ait gagné dès son premier lancer ? Donner la valeur pour $p = \frac{1}{2}$.

Exercice 14 : Urne choisie au hasard et formule de Bayes

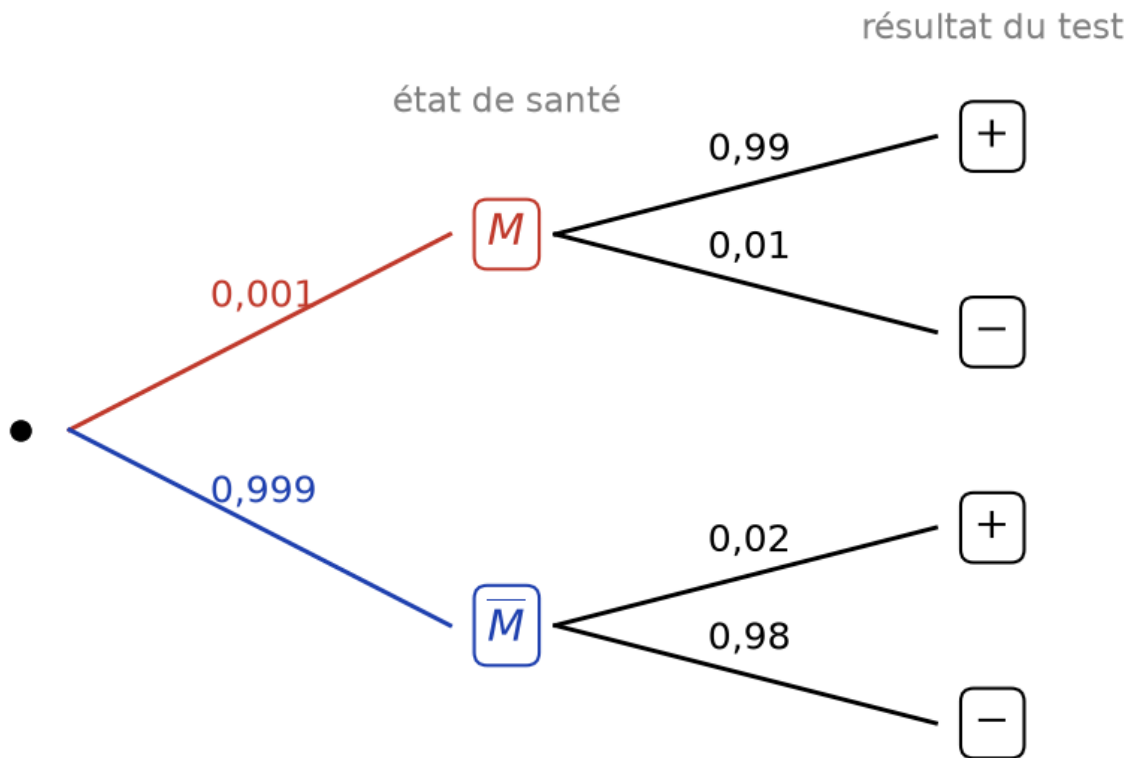
On dispose d'une suite d'urnes $(U_n)_{n \geq 1}$. L'urne U_n contient n boules, dont une seule est blanche. On choisit l'urne U_n avec probabilité $\frac{1}{2^n}$, puis on tire une boule au hasard dans l'urne choisie. On note W l'événement « la boule tirée est blanche ». On rappelle que

$$-\ln(1 - x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \text{ pour } |x| < 1.$$

1. Calculer $P(W)$.
2. Sachant que la boule tirée est blanche, quelle est la probabilité qu'elle provienne de U_1 ? Plus généralement, de U_n ?
3. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche sachant que le numéro de l'urne choisie est pair.

Exercice 15 : Test de dépistage

Une maladie touche une personne sur mille. Un test la détecte chez 99 % des malades, mais il est aussi positif chez 2 % des personnes saines. L'arbre ci-dessous résume ces données. On note M l'événement « la personne est malade » et $+$ l'événement « le test est positif ».



1. Calculer la probabilité qu'un test soit positif.
2. Calculer $P(M \mid +)$. Commenter.
3. Calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est négatif.
4. Une personne positive passe un second test, indépendant du premier conditionnellement à son état de santé. Calculer la probabilité qu'elle soit malade si les deux tests sont positifs.

Exercice 16 : Urne de Pólya

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une suite de tirages : à chaque fois, on tire une boule, on note sa couleur, puis on la remet avec une boule supplémentaire de la même couleur. On note W_k l'événement « le k -ième tirage donne une boule blanche ».

1. Calculer $P(W_2)$.
2. Pour $n \geq 1$, calculer la probabilité de $A_n = W_1 \cap \dots \cap W_n$.
3. Calculer la probabilité de ne tirer que des boules blanches.
4. Pour $n \geq 1$, calculer la probabilité que la première boule noire apparaisse au tirage n . Vérifier la cohérence avec la question précédente.

Exercice 17 : Indépendance deux à deux et indépendance mutuelle

1. On lance deux dés équilibrés. On note A : « le premier dé donne un nombre pair », B : « le second dé donne un nombre pair » et C : « la somme est paire ». Montrer que A , B , C sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.
2. Montrer que si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.
3. Déterminer les événements indépendants d'eux-mêmes.

Exercice 18 : Suite d'événements indépendants

Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements mutuellement indépendants, avec $P(A_n) = p_n$.

1. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_n ne soit réalisé vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n (1 - p_k)$.

2. On suppose $p_n = \frac{1}{(n+1)^2}$. Calculer $\prod_{k=1}^n (1 - p_k)$, puis la probabilité qu'au moins un A_n soit réalisé.
3. On suppose $p_n = \frac{1}{n+1}$. Montrer que, presque sûrement, au moins un A_n est réalisé.
4. Avec $p_n = \frac{1}{n+1}$, montrer que, presque sûrement, une infinité de A_n sont réalisés.

Exercice 19 : Tout motif fini apparaît presque sûrement

On lance indéfiniment une pièce équilibrée ; les lancers sont mutuellement indépendants. Un motif de longueur $k \geq 1$ est un mot $m = (m_1, \dots, m_k)$ de $\{P, F\}^k$. On admet que des événements qui dépendent de lancers de numéros deux à deux disjoints sont mutuellement indépendants.

1. Pour $j \geq 0$, on note E_j l'événement « les lancers $jk + 1, \dots, jk + k$ forment le motif m ». Calculer $P(E_j)$.
2. Montrer que, presque sûrement, le motif m apparaît au moins une fois.
3. Montrer que l'ensemble de tous les motifs finis est dénombrable. En déduire que, presque sûrement, tous les motifs finis apparaissent.

Exercice 20 : Deux motifs en compétition

On lance indéfiniment une pièce équilibrée ; les lancers sont mutuellement indépendants.

1. On attend l'apparition du motif PP (deux piles consécutifs) ou du motif FP (face puis pile). Montrer que, si l'un des deux premiers lancers donne face, alors presque sûrement FP apparaît avant PP.
2. En déduire la probabilité que PP apparaisse avant FP.
3. On met maintenant en compétition PP et PF. Calculer la probabilité que PP apparaisse avant PF.

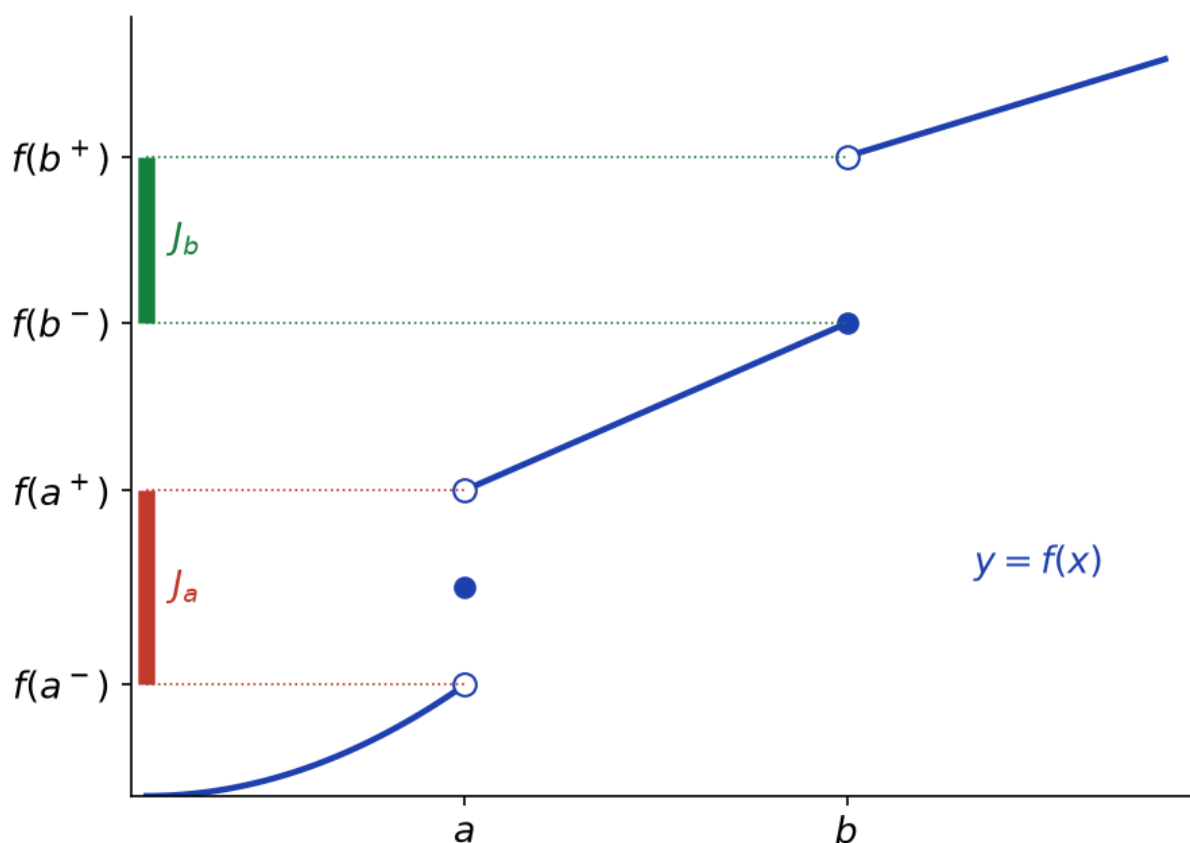
Exercice 21 : Tribu engendrée par une partition dénombrable

Soit Ω un ensemble et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de Ω en parties non vides. Pour $I \subset \mathbb{N}$, on note $A_I = \bigcup_{n \in I} A_n$, et on pose $\mathcal{T} = \{A_I : I \subset \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω .
2. Montrer que toute tribu contenant tous les A_n contient $\mathcal{T}$.
3. Montrer que $I \rightarrow A_I$ est une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sur $\mathcal{T}$. La tribu $\mathcal{T}$ est-elle dénombrable ?
4. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{T})$ telle que $P(A_n) = p_n$ pour tout n .
5. Application : $\Omega = \mathbb{R}_+$, $A_n = [n, n+1[$ et $p_n = \frac{1}{2^{n+1}}$. Calculer $P([2, +\infty[)$ et $P(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [2k, 2k+1[)$.

Exercice 22 : Discontinuités d'une fonction monotone

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. On admet que f admet en tout point x une limite à gauche $f(x^-)$ et une limite à droite $f(x^+)$, avec $f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+)$. On note D l'ensemble des points où f n'est pas continue. La figure ci-dessous illustre deux sauts de f .



1. Montrer que $x \in D$ si et seulement si $f(x^-) < f(x^+)$. On pose alors $J_x =]f(x^-), f(x^+)[$.
2. Soit $x < y$ deux points de D . Montrer que $f(x^+) \leq f(y^-)$, puis que $J_x \cap J_y = \emptyset$.
3. En déduire que D est au plus dénombrable.
4. Autre méthode. On suppose f croissante sur $[0, 1]$ et, pour $k \geq 1$, on note D_k l'ensemble des $x \in]0, 1[$ tels que $f(x^+) - f(x^-) \geq \frac{1}{k}$. Montrer que D_k est fini, de cardinal au plus $k(f(1) - f(0))$, puis conclure.
5. Donner un exemple de fonction croissante sur $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable.

Exercice 23 : Problème : loi zêta et produit eulérien

Soit $s > 1$ et $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. On munit $\mathbb{N}^*$ de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ et de la probabilité P définie par $P(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s) n^s}$. On note $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite croissante des nombres premiers et, pour $d \geq 1$, $M_d = d \mathbb{N}^*$ l'ensemble des multiples de d .

1. Vérifier que P est une probabilité.
2. Montrer que $P(M_d) = d^{-s}$ pour tout $d \geq 1$.
3. Montrer que les événements $(M_{p_k})_{k \geq 1}$ sont mutuellement indépendants.
4. Pour $N \geq 1$, on note B_N l'événement « n n'est divisible par aucun des nombres $p_1, \dots, p_N$ ». Calculer $P(B_N)$.
5. Déterminer $\bigcap_{N \geq 1} B_N$, puis en déduire le produit eulérien

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

6. Un entier est dit sans facteur carré s'il n'est divisible par aucun carré de nombre premier. Montrer que les événements $(M_{p_k^2})_{k \geq 1}$ sont mutuellement indépendants, puis que la probabilité qu'un entier soit sans facteur carré vaut $\frac{1}{\zeta(2s)}$. Donner une valeur approchée pour $s = 2$, sachant que $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [espaces probabilisés, cours de maths spé](#)
- Chapitre précédent : [Intégrales à paramètre](#)
- Chapitre suivant : [Variables aléatoires discrètes et lois usuelles](#)
- Le même thème en L2 : [espaces probabilisés, exercices de maths en L2](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)