

Espaces probabilisés

Exercice 1 : Tribus sur un ensemble fini

On pose $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.

1. La famille $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\}$ est-elle une tribu sur Ω ? Même question pour $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \Omega\}$.
2. Déterminez la plus petite tribu $\mathcal{T}$ sur Ω contenant $\{1\}$ et $\{2\}$. Combien a-t-elle d'éléments ?
3. Montrez que l'intersection de deux tribus sur un même ensemble est une tribu.
4. On pose $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3, 4\}, \Omega\}$. Montrez que $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_3$ n'est pas une tribu.

Exercice 2 : Traduire des événements

Soit A, B, C trois événements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, puis $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements.

1. Écrivez à l'aide de A, B, C , des réunions, intersections et complémentaires les événements : « au moins un des trois est réalisé » ; « aucun n'est réalisé » ; « exactement un est réalisé » ; « au plus un est réalisé ».
2. Écrivez l'événement G : « tous les A_n sont réalisés à partir d'un certain rang », puis l'événement L : « une infinité de A_n sont réalisés ».

- Justifiez que G et L appartiennent à $\mathcal{A}$, puis que $G \subset L$.
- Déterminez G et L lorsque $A_n = A$ pour n pair et $A_n = B$ pour n impair.

Exercice 3 : Formule du crible pour trois événements

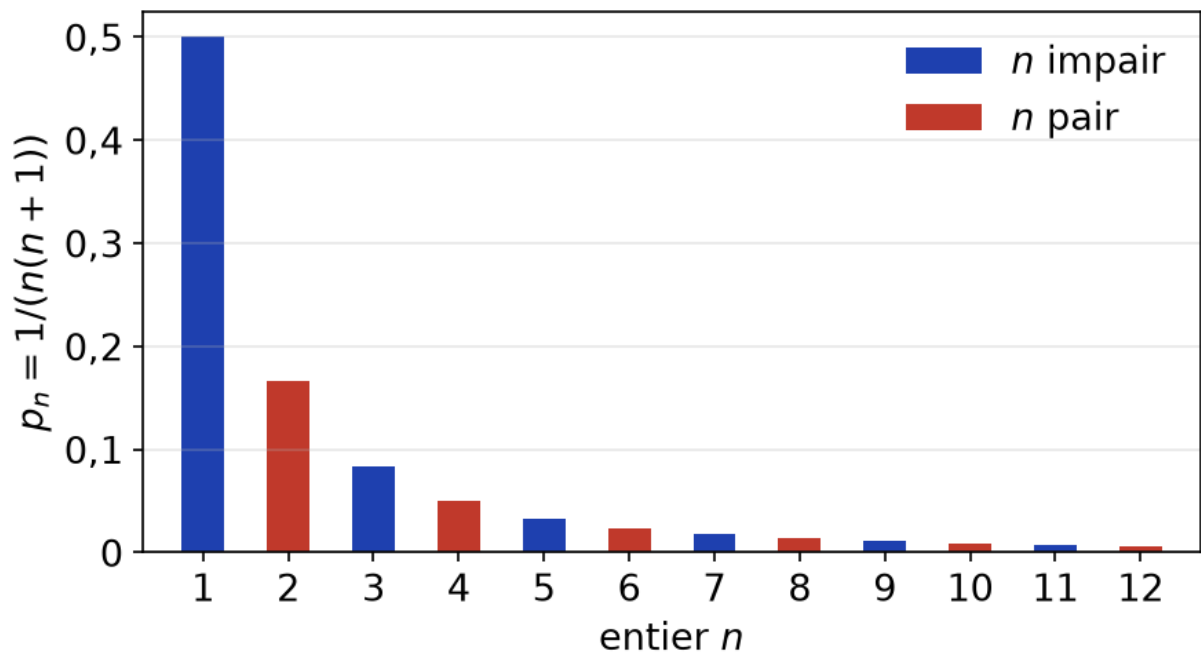
- À partir de la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, démontrez que pour trois événements :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

- On choisit un entier au hasard dans $\left\{1, 2, \dots, 60\right\}$, de manière équiprobable. Calculez la probabilité qu'il soit divisible par 2, par 3 ou par 5.
- Déduisez-en la probabilité qu'il soit premier avec 60.

Exercice 4 : Une probabilité sur les entiers non nuls

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = \frac{1}{n(n+1)}$. La figure ci-dessous représente les premières valeurs de p_n .



1. Montrez qu'il existe une unique probabilité P sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que $P(\{n\}) = p_n$ pour tout $n \geq 1$.
2. Pour $k \geq 1$, calculez $P(\{n \in \mathbb{N}^* \mid n \geq k\})$.
3. On admet que $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} = \ln 2$. Calculez la probabilité de l'ensemble des entiers pairs, puis celle des entiers impairs.

Exercice 5 : Probabilité géométrique sur $\mathbb{N}$

Soit α un réel. On cherche une probabilité P sur $\mathbb{N}$ telle que $P(\{n\}) = \frac{\alpha}{3^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminez l'unique valeur de α qui convient.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculez $P(\{n \geq k\})$.
3. Calculez la probabilité d'obtenir un entier pair, puis celle d'obtenir un multiple de 3.

4. Calculez la probabilité d'obtenir un entier pair sachant que l'entier obtenu est non nul.

Exercice 6 : Pas d'équiprobabilité sur $\mathbb{N}$

1. Montrez qu'il n'existe aucune probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que tous les singletons aient la même probabilité.
2. Soit P une probabilité quelconque sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrez que $P(\{n\}) \rightarrow 0$ et que $P(\{n, n+1, 2, \dots\}) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
3. Déduisez-en que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie F de $\mathbb{N}$ telle que $P(F) \geq 1 - \varepsilon$.
4. Montrez qu'il n'existe aucune probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que $P(\{0, 1, \dots, n\}) = \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 : Sous-additivité dénombrable

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements quelconques.

1. Montrez par récurrence que $P(A_0 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_{k=0}^n P(A_k)$ pour tout n .
2. En utilisant la continuité croissante, démontrez l'inégalité de Boole

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n),$$
la somme pouvant valoir $+\infty$.
3. Déduisez-en qu'une réunion dénombrable d'événements négligeables est négligeable, et qu'une intersection dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.
4. Montrez que, pour toute suite (A_n) , $P\left(\bigcap_n A_n\right) \geq 1 - \sum_n P(\overline{A_n})$.

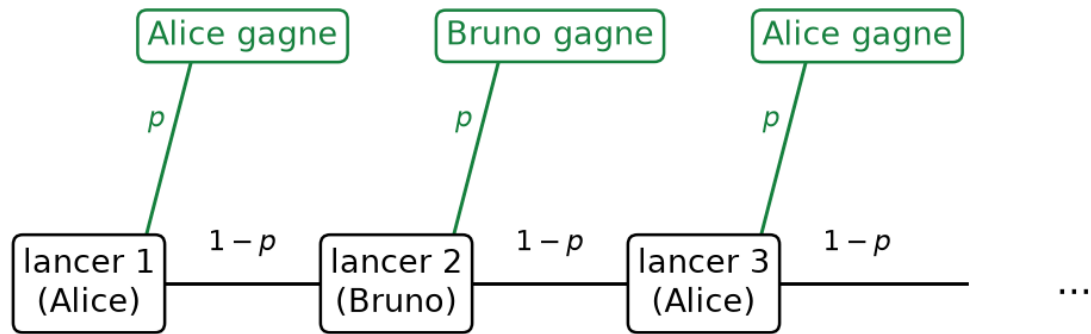
Exercice 8 : Pile ne sort jamais

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. On admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et d'événements P_n (« pile au n -ième lancer »), $n \geq 1$, mutuellement indépendants et de probabilité $1/2$.

1. Exprimez l'événement E : « on n'obtient jamais pile » à l'aide des P_n , puis montrez que $P(E) = 0$.
2. Pour $k \geq 1$, soit D_k l'événement « à partir du lancer k , on n'obtient que pile ». Montrez que $P(D_k) = 0$.
3. Déduisez-en que, presque sûrement, face apparaît une infinité de fois.
4. Montrez qu'avec probabilité 1, on finit par obtenir deux piles consécutifs. On pourra regrouper les lancers par blocs disjoints $(1, 2)$, $(3, 4)$, etc.

Exercice 9 : Premier pile à un rang impair

Deux joueurs, Alice et Bruno, lancent à tour de rôle une pièce qui donne pile avec probabilité $p \in]0, 1[$. Alice commence. Le premier qui obtient pile gagne. Les lancers sont indépendants. L'arbre ci-dessous décrit le début du jeu.



1. Pour $n \geq 1$, calculez la probabilité q_n que le premier pile apparaisse au lancer n . Construisez un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), Q)$ avec $\Omega = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ qui modélise le rang du premier pile, et calculez $Q(\{\infty\})$.
2. Calculez la probabilité qu'Alice gagne, puis celle que Bruno gagne.
3. Montrez que le jeu est toujours favorable à Alice. Que vaut la probabilité qu'elle gagne pour $p = 1/2$? Quelle est sa limite quand $p \rightarrow 0$?

Exercice 10 : Tirages avec et sans remise

Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires. On tire 3 boules.

1. Les tirages sont successifs avec remise. Précisez l'univers, puis calculez la probabilité d'obtenir exactement 2 boules blanches et celle d'obtenir au moins une boule noire.
2. Même question lorsque les tirages sont successifs sans remise.
3. Même question lorsque les 3 boules sont tirées simultanément. Comparez avec la question 2.
4. Dans quel protocole est-il le plus probable d'obtenir exactement 2 boules blanches ?

Exercice 11 : Le paradoxe des anniversaires

Dans un groupe de n personnes ($2 \leq n \leq 365$), on suppose les dates d'anniversaire indépendantes et uniformes sur 365 jours. On note q_n la probabilité que les n dates soient deux à deux distinctes, et $p_n = 1 - q_n$.

1. Précisez l'univers, puis montrez que $q_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right)$.
2. Montrez que $1 - x \leq e^{-x}$ pour tout réel x , avec égalité seulement pour $x = 0$. Déduisez-en $q_n < \exp\left(-\frac{n(n-1)}{730}\right)$.
3. On donne $\ln 2 \approx 0,693147$. Montrez que $p_{23} > \frac{1}{2}$.
4. La majoration permet-elle de conclure pour $n = 22$?

Exercice 12 : Mains de poker

Un jeu de 32 cartes comporte 8 hauteurs (de 7 à l'as) et 4 couleurs. Une main est une partie à 5 cartes, tirée de façon équiprobable.

1. Combien y a-t-il de mains ?
2. Calculez la probabilité d'obtenir un carré (quatre cartes de même hauteur).
3. Calculez la probabilité d'un full (trois cartes d'une hauteur et deux d'une autre).
4. Calculez la probabilité d'obtenir cinq cartes de la même couleur.
5. Calculez la probabilité d'obtenir exactement une paire (deux cartes d'une hauteur, les trois autres de hauteurs différentes entre elles et de la première).

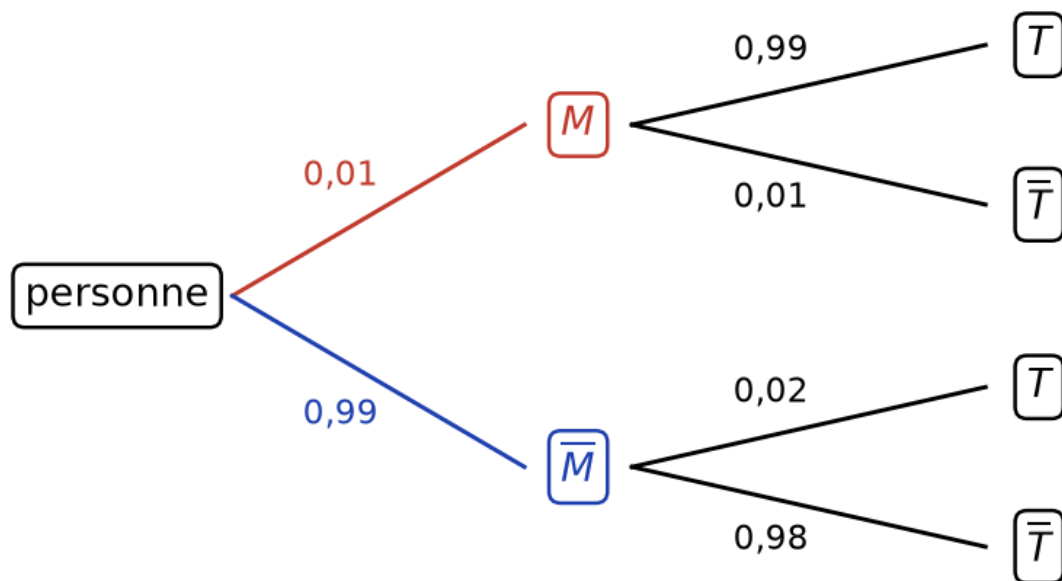
Exercice 13 : L'urne de Pólya

Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. À chaque étape, on tire une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la remet avec une boule supplémentaire de la même couleur. On note B_k l'événement « la k -ième boule tirée est blanche ».

1. Calculez $P(B_1)$ et $P(B_2)$.
2. Calculez $P(B_1 | B_2)$.
3. Montrez que $P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = \frac{1}{n+1}$.
4. Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules blanches, indéfiniment ?
5. Soit $0 \leq k \leq n$. Calculez la probabilité d'une suite donnée de n tirages comportant k blanches, puis la probabilité d'obtenir exactement k blanches lors des n premiers tirages.

Exercice 14 : Test de dépistage

Une maladie touche 1 % d'une population. Un test est positif chez 99 % des malades et négatif chez 98 % des personnes saines. L'arbre ci-dessous résume ces données. On note M : « la personne est malade » et T : « le test est positif ».



1. Calculez $P(T)$.
2. Calculez $P(M | T)$. Commentez.
3. Calculez $P(\overline{M} | \overline{T})$.
4. Une personne positive refait un second test, dont le résultat est, sachant M comme sachant $\overline{M}$, indépendant du premier. Il est encore positif. Quelle est maintenant la probabilité qu'elle soit malade ?

Exercice 15 : Urnes choisies au hasard

On dispose de trois urnes. Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, l'urne U_k contient k boules blanches et $4 - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, puis on y tire une boule.

1. Calculez la probabilité que la boule soit blanche.
2. La boule est blanche. Calculez la probabilité qu'elle provienne de chacune des urnes.

3. On remet la boule dans la même urne et on effectue un second tirage dans cette urne. Calculez la probabilité que les deux boules soient blanches.
4. Les événements « première boule blanche » et « seconde boule blanche » sont-ils indépendants ? Expliquez ce résultat.

Exercice 16 : Œufs et probabilités totales

Soit $\lambda > 0$ et $p \in]0, 1[$. Le nombre d'œufs pondus par un insecte vaut n avec probabilité $e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$, pour $n \in \mathbb{N}$. Chaque œuf éclos avec probabilité p , indépendamment des autres. On note E_n : « l'insecte pond n œufs » et F_k : « exactement k œufs éclosent ». Ainsi, $P(F_k | E_n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ si $k \leq n$, et 0 sinon.

1. Vérifiez que $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut former un système complet d'événements, c'est-à-dire que les probabilités données ont pour somme 1.
2. Calculez $P(F_0)$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculez $P(F_k)$.
4. Aucun œuf n'a éclos. Calculez $P(E_n | F_0)$ pour tout n .

Exercice 17 : Indépendance deux à deux

On lance deux dés équilibrés discernables. On considère A : « le premier dé donne un nombre pair », B : « le second dé donne un nombre pair », C : « la somme est paire », D : « la somme vaut 7 ».

1. Calculez $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(D)$.

- Montrez que A , B , C sont deux à deux indépendants.
- Sont-ils mutuellement indépendants ?
- Les événements A et D sont-ils indépendants ? Et C et D ?

Exercice 18 : Complémentaires et fiabilité

Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants.

- Montrez que $\overline{A_1}, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants.
- Déduisez-en que $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n}$ sont mutuellement indépendants, puis que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i)).$$
- Un système comporte n composants montés en parallèle : il fonctionne si au moins un composant fonctionne. Chaque composant fonctionne avec probabilité $0,9$, indépendamment des autres. Quelle valeur minimale de n garantit une fiabilité d'au moins $0,999$?
- Un autre système comporte 10 composants en série : il fonctionne si tous fonctionnent. Chacun fonctionne avec probabilité $0,99$, indépendamment. Donnez sa fiabilité à 10^{-3} près.

Exercice 19 : Indépendance sur un univers équiprobable

- Soit p un nombre premier et $\Omega = \{1, \dots, p\}$ muni de l'équiprobabilité. Montrez que si A et B sont indépendants, alors l'un des deux est $\emptyset$ ou Ω .
- Soit $n \geq 2$ et $\Omega = \{1, \dots, n\}$ muni de l'équiprobabilité. Pour d diviseur de n , on note M_d l'ensemble des multiples de d dans Ω . Calculez $P(M_d)$.
- Soit a et b deux diviseurs de n . Montrez que $M_a \cap M_b = M_m$, où m est le ppcm de

a et b . Déduisez-en que M_a et M_b sont indépendants si et seulement si a et b sont premiers entre eux.

4. Pour $n = 12$, donnez deux événements indépendants de probabilités $1/4$ et $1/3$, puis deux événements de la forme M_d non indépendants.

Exercice 20 : Indicatrice d'Euler par les probabilités

Soit $n \geq 2$, de décomposition en facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$. On munit $\Omega = \{1, \dots, n\}$ de l'équiprobabilité. Pour $i \in \{1, \dots, r\}$, on note A_i l'événement « l'entier tiré est divisible par p_i ». On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers de Ω premiers avec n .

- Montrez que les événements $A_1, \dots, A_r$ sont mutuellement indépendants.
- Exprimez l'événement « l'entier tiré est premier avec n » à l'aide des A_i . Déduisez-en la formule

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

- Calculez $\varphi(360)$.
- Déduisez de la formule que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ lorsque m et n sont premiers entre eux.

Exercice 21 : Problème des rencontres

Soit $n \geq 1$. On choisit une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ de manière équiprobable. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on note A_i l'événement « $\sigma(i) = i$ » (i est un point fixe).

- Pour $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, calculez $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$.

2. À l'aide de la formule du crible, montrez que la probabilité d_n que σ n'ait aucun point fixe vaut

$$d_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

3. Déterminez la limite de d_n . Calculez le nombre D_4 de permutations de $\{1, 2, 3, 4\}$ sans point fixe, puis vérifiez-le en les énumérant.

4. Soit $0 \leq m \leq n$. Montrez que la probabilité que σ ait exactement m points fixes vaut $\frac{d_{n-m}}{m!}$, avec $d_0 = 1$. Déterminez sa limite quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 22 : Problème : lemme de Borel-Cantelli

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements. On pose

$$L = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq k} A_n.$$

1. Justifiez que L est un événement et que L est réalisé si et seulement si une infinité de A_n sont réalisés.

2. On suppose que la série $\sum P(A_n)$ converge. Montrez que $P(L) = 0$.

3. On suppose désormais les A_n mutuellement indépendants et $\sum P(A_n) = +\infty$. Pour $k \leq m$, montrez que

$$P\left(\bigcap_{n=k}^m \overline{A_n}\right) \leq \exp\left(-\sum_{n=k}^m P(A_n)\right),$$

puis que $P\left(\bigcap_{n \geq k} \overline{A_n}\right) = 0$. Concluez que $P(L) = 1$.

4. Soit (A_n) des événements mutuellement indépendants. Que peut-on dire de L si $P(A_n) = \frac{1}{n}$? Et si $P(A_n) = \frac{1}{n^2}$?

5. On lance indéfiniment une pièce équilibrée (lancers indépendants). Soit $r \geq 1$. Montrez que, presque sûrement, on observe une infinité de fois r piles consécutifs. Montrez ensuite que, presque sûrement, cela a lieu pour toutes les valeurs de r à la fois.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [espaces probabilisés, cours de maths en L2](#)
- Chapitre précédent : [Différentiabilité, formule de Taylor et extrema](#)
- Chapitre suivant : [Variables aléatoires discrètes](#)
- Le même thème en maths spé : [espaces probabilisés, exercices de maths spé](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)