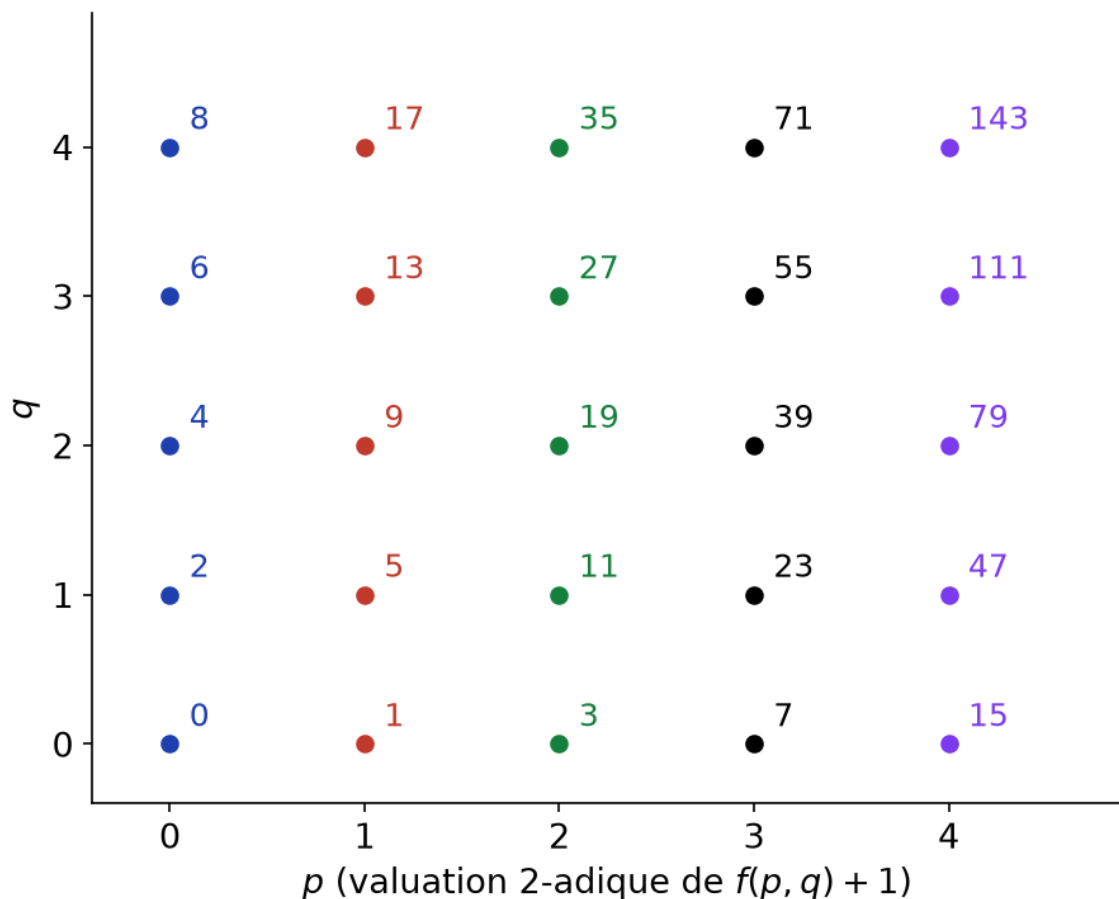


Espaces probabilisés

Corrigé de l'exercice 1 : Une bijection explicite de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$

1. Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on a $2^p \geq 1$ et $2q + 1 \geq 1$, donc $2^p(2q+1) - 1 \geq 0$. Ainsi f est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrons que f est bijective. Soit $m \in \mathbb{N}$. Il s'agit de résoudre $2^p(2q+1) = m + 1$, avec $m + 1 \geq 1$. Or tout entier $N \geq 1$ s'écrit de façon unique $N = 2^p \times r$ avec r impair : l'exposant p est la valuation 2-adique de N , c'est-à-dire la plus grande puissance de 2 qui divise N , et $r = N / 2^p$ est alors impair. Ensuite, r impair s'écrit de façon unique $r = 2q + 1$ avec $q \in \mathbb{N}$. Donc l'équation $f(p, q) = m$ a une unique solution. **L'application f est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.**
2. On a $f(2, 3) = 4 \times 7 - 1 = 27$. Ensuite, $100 + 1 = 101$ est impair, donc $p = 0$ et $2q + 1 = 101$, soit $q = 50$. Enfin, $47 + 1 = 48 = 2^4 \times 3$, donc $p = 4$ et $q = 1$. **Ainsi $f(2, 3) = 27$, $f^{-1}(100) = (0, 50)$ et $f^{-1}(47) = (4, 1)$.** La figure ci-dessous donne les valeurs de f sur une partie de la grille. Chaque colonne correspond à une valuation 2-adique fixée de $f(p, q) + 1$.



- Pour $p = 1$, c'est évident. Supposons $\mathbb{N}^p$ dénombrable, et soit $\psi : \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection. Alors $(x, n) \rightarrow f(\psi(x), n)$ est une bijection de $\mathbb{N}^p \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^{p+1}$ sur $\mathbb{N}$, comme composée de bijections. **Par récurrence, $\mathbb{N}^p$ est dénombrable pour tout $p \geq 1$.**
- Soit $\alpha : E \rightarrow \mathbb{N}$ et $\beta : F \rightarrow \mathbb{N}$ deux bijections. L'application $(x, y) \rightarrow f(\alpha(x), \beta(y))$ est bijective de $E \times F$ sur $\mathbb{N}$. **Donc $E \times F$ est dénombrable.**

Corrigé de l'exercice 2 : Quelques ensembles dénombrables usuels

- La fonction g envoie $\mathbb{N}$ sur les entiers pairs et $\{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}$ sur les entiers impairs. En effet, pour $n < 0$, $-2n - 1 = 2(-n) - 1$ parcourt $1, 3, 5, \dots$ quand $-n$ parcourt $1, 2, 3, \dots$. Chacune de ces deux restrictions est bijective. Donc g est une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$. Ensuite, 7 est impair : $-2n - 1 = 7$ donne $n = -4$. De même, 10 est pair :

$2n = 10$ donne $n = 5$. **Donc** $g^{-1}(7) = -4$ **et** $g^{-1}(10) = 5$.

2. L'application $(a, b) \rightarrow \frac{a}{b}$ est une surjection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{Q}$. Or $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable, comme produit de deux ensembles dénombrables. Donc $\mathbb{Q}$ est au plus dénombrable. Comme il contient $\mathbb{N}$, il est infini. **Ainsi $\mathbb{Q}$ est dénombrable.**
3. C'est un produit de deux ensembles dénombrables. **Donc $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable.**
4. Un tel disque est déterminé par son centre $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ et son rayon $r \in \mathbb{Q}_+^*$. L'application $(a, b, r) \rightarrow D((a, b), r)$ est donc une surjection de $\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}_+^*$, qui est dénombrable, sur l'ensemble étudié. Cet ensemble est donc au plus dénombrable. De plus, il est infini, puisque les disques de centre $(0,0)$ et de rayons $1, 2, 3, \dots$ sont distincts. **L'ensemble de ces disques est dénombrable.**
5. La réunion est au plus dénombrable, comme réunion dénombrable d'ensembles finis. Par ailleurs, les E_n sont non vides et deux à deux disjoints : en choisissant $x_n \in E_n$, on obtient une suite injective (x_n) . La réunion est donc infinie. **Ainsi $\bigcup_n E_n$ est dénombrable.**

Corrigé de l'exercice 3 : Polynômes à coefficients entiers et nombres algébriques

1. L'application $(a_0, \dots, a_n) \rightarrow \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est une bijection de $\mathbb{Z}^{n+1}$ sur $\mathbb{Z}_n[X]$. Or $\mathbb{Z}^{n+1}$ est un produit fini d'ensembles dénombrables. **Donc $\mathbb{Z}_n[X]$ est dénombrable.**
2. On a $\mathbb{Z}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_n[X]$. C'est une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables, donc elle est au plus dénombrable. Elle est infinie, puisqu'elle contient les constantes entières. **Donc $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable.**
3. Pour $P \in \mathbb{Z}[X]$ non nul, l'ensemble $\mathcal{Z}(P)$ de ses racines complexes est fini, de cardinal au plus $\deg P$. Par définition, $\mathcal{A} = \bigcup_{P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}} \mathcal{Z}(P)$. C'est une réunion indexée par un ensemble dénombrable d'ensembles finis. Elle est donc au plus dénombrable. Enfin, tout entier k est racine de $X - k$, donc $\mathcal{A}$ est infini. **L'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.**
4. L'ensemble $\mathcal{A} \cap \mathbb{R}$ est au plus dénombrable, comme partie de $\mathcal{A}$. Or $\mathbb{R}$ n'est pas

dénombrable. Donc $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$ est non vide. Mieux, si $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$ était au plus dénombrable, $\mathbb{R}$ serait la réunion de deux ensembles au plus dénombrables, donc au plus dénombrable : c'est absurde. **Il existe des réels non algébriques, et leur ensemble n'est même pas dénombrable.**

Point de méthode : pour montrer qu'un ensemble n'est pas dénombrable, il suffit souvent de montrer que son complémentaire dans un ensemble non dénombrable est au plus dénombrable.

Corrigé de l'exercice 4 : Suites de 0 et de 1 et argument diagonal

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par construction, $u_n = 1 - \varphi(n)_n \neq \varphi(n)_n$. Les suites u et $\varphi(n)$ diffèrent donc au rang n , d'où $u \neq \varphi(n)$. Ceci vaut pour tout n , donc u n'a pas d'antécédent. Ainsi, aucune application de $\mathbb{N}$ dans Ω n'est surjective. Or Ω est infini ; s'il était dénombrable, il existerait une bijection de $\mathbb{N}$ sur Ω . **Donc $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.**

2. Pour tout n , $0 \leq \frac{2u_n}{3^{n+1}} \leq \frac{2}{3^{n+1}}$, et $\sum_{n \geq 0} \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-1/3} = 1$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série converge et $h(u) \in [0, 1]$. Soit maintenant $u \neq v$, et k le plus petit indice tel que $u_k \neq v_k$. Quitte à échanger, $u_k = 1$ et $v_k = 0$. Les termes d'indice inférieur à k se compensent. Donc

$$h(u) - h(v) = \frac{2}{3^{k+1}} + \sum_{n > k} \frac{2(u_n - v_n)}{3^{n+1}} \geq \frac{2}{3^{k+1}} - \sum_{n > k} \frac{2}{3^{n+1}}.$$

Or $\sum_{n > k} \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3^{k+2}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{3^{k+1}}$. Par conséquent, $h(u) - h(v) \geq \frac{1}{3^{k+1}} > 0$.

L'application h est injective.

3. Si $[0,1]$ était dénombrable, l'injection h ferait de Ω un ensemble au plus dénombrable, ce qui contredit la question 1. De plus, $\mathbb{R}$ contient $[0,1]$, et une partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable. **Ni $[0,1]$ ni $\mathbb{R}$ ne sont dénombrables.**

4. Une suite qui ne s'annule qu'un nombre fini de fois est entièrement déterminée par l'ensemble fini $\{n : u_n = 0\}$. On obtient ainsi une bijection entre ces suites et les parties finies de $\mathbb{N}$, qui forment un ensemble dénombrable (exercice 5). Ensuite, Ω est la réunion de cet ensemble et de l'ensemble Ω_∞ des suites comportant une infinité de 0. Si Ω_∞ était au plus dénombrable, Ω le serait aussi. **Les suites comportant une infinité de 0 forment un ensemble non**

dénombrable.

Corrigé de l'exercice 5 : Parties finies et parties quelconques de $\mathbb{N}$

1. Pour A finie, $\Phi(A)$ est un entier naturel, et $\Phi(\emptyset) = 0$. L'unicité de l'écriture binaire des entiers donne la bijectivité. En effet, tout $m \in \mathbb{N}$ s'écrit de manière unique $m = \sum_{a \in A} 2^a$ avec A finie : A est l'ensemble des positions des chiffres 1 dans l'écriture de m en base 2. Ensuite, $\Phi(\{0, 2, 5\}) = 1 + 4 + 32 = 37$. Enfin, $100 = 64 + 32 + 4 = 2^6 + 2^5 + 2^2$. **Donc Φ est bijective, $\Phi(\{0, 2, 5\}) = 37$ et $\Phi^{-1}(100) = \{2, 5, 6\}$.**
2. Supposons que $B = f(m)$ pour un certain m . Si $m \in B$, alors par définition de B , $m \notin f(m) = B$: contradiction. Si $m \notin B$, alors $m \notin f(m)$, donc $m \in B$: contradiction encore. Ainsi B n'a pas d'antécédent, et aucune application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est surjective. **L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.**
3. On a $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{F} \cup \mathcal{I}$, où $\mathcal{I}$ désigne l'ensemble des parties infinies. Comme $\mathcal{F}$ est dénombrable, si $\mathcal{I}$ était au plus dénombrable, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ le serait. **L'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.**

Corrigé de l'exercice 6 : Tribus sur un ensemble fini

1. La première famille contient Ω et elle est stable par complémentaire : $\overline{\{1\}} = \{2, 3, 4\}$. Elle est aussi stable par réunion, puisque toute réunion de ses éléments vaut $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2, 3, 4\}$ ou Ω . Comme Ω est fini, les réunions dénombrables se ramènent à des réunions finies. **La première famille est une tribu.** La seconde ne contient pas $\overline{\{1\}} = \{2, 3, 4\}$. **La seconde famille n'est pas une tribu.**
2. Une tribu contenant $\{1\}$ et $\{2, 3\}$ contient leur réunion $\{1, 2, 3\}$, donc son complémentaire $\{4\}$. Elle contient alors toutes les réunions des trois parties $\{1\}$, $\{2, 3\}$ et $\{4\}$, qui forment une partition de Ω . Réciproquement, la famille de ces réunions est stable par complémentaire et

par réunion, et elle contient Ω : c'est une tribu. **Donc**

$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{4\}, \{1,2,3\}, \{1,4\}, \{2,3,4\}, \Omega\}$, qui a $2^3 = 8$ éléments.

3. Soit $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux tribus sur Ω . D'abord, Ω appartient aux deux. Ensuite, si A appartient aux deux, $\bar{A}$ aussi. Enfin, si tous les A_n appartiennent aux deux, leur réunion aussi. **Donc $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ est une tribu.**
4. On a $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3,4\}, \Omega\}$ et $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1,3,4\}, \Omega\}$. Or $\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\}$ n'appartient pas à $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$. **La réunion de deux tribus n'est pas une tribu en général.**

Corrigé de l'exercice 7 : La tribu des parties dénombrables ou codénombrables

1. D'abord, $\mathbb{R} \in \mathcal{C}$, car son complémentaire $\emptyset$ est fini. Ensuite, la définition est symétrique en A et $\mathbb{R} \setminus A$, donc $\mathcal{C}$ est stable par complémentaire. Soit enfin (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ et $U = \bigcup_n A_n$. Premier cas : tous les A_n sont au plus dénombrables. Alors U est au plus dénombrable, comme réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables. Second cas : il existe k tel que $\mathbb{R} \setminus A_k$ soit au plus dénombrable. Alors $\mathbb{R} \setminus U \subset \mathbb{R} \setminus A_k$ est au plus dénombrable. Dans les deux cas, $U \in \mathcal{C}$. **Donc $\mathcal{C}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.**
2. L'intervalle $]0,1[$ n'est pas dénombrable (exercice 4, question 3 : sinon $[0,1] =]0,1[\cup \{0,1\}$ le serait). Donc $[0,1]$ n'est pas au plus dénombrable. De plus, $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ contient $]1,2[$, qui est en bijection avec $]0,1[$ par $x \rightarrow x - 1$. Il n'est donc pas au plus dénombrable non plus. **Ainsi $[0,1] \notin \mathcal{C}$.**
3. Une partie A ne peut pas être à la fois au plus dénombrable et de complémentaire au plus dénombrable, sinon $\mathbb{R} = A \cup \bar{A}$ serait au plus dénombrable. Donc P est bien définie. Ensuite, $P(\mathbb{R}) = 1$, car $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. Soit (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ deux à deux disjoints. Deux éléments codénombrables ne peuvent pas être disjoints : si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbb{R} = \bar{A} \cup \bar{B}$ serait au plus dénombrable. Donc au plus un A_n est codénombrable. S'il n'y en a aucun, la réunion est au plus dénombrable et $P(\bigcup A_n) = 0 = \sum P(A_n)$. S'il y en a exactement un, disons A_k , la réunion contient A_k , donc elle est codénombrable, et $P(\bigcup A_n) = 1 = P(A_k) = \sum P(A_n)$. **Donc P est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$.**

Corrigé de l'exercice 8 : Distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$

1. Les termes sont positifs. De plus, $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. Par télescopage,

$\sum_{n=0}^N \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{N+2}$, qui tend vers 1. **La famille est une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}$.**

2. Par le même télescopage,

$$P(\{k, 1, \dots\}) = \sum_{n=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{k+1}.$$

Donc $P(\{k, 1, \dots\}) = \frac{1}{k+1}$. On remarque que ces événements décroissent et que leur intersection est vide : la continuité décroissante est cohérente avec $\frac{1}{k+1} \rightarrow 0$.

3. La probabilité des entiers pairs vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right)$. La somme partielle jusqu'à $k = K$ vaut $\sum_{j=1}^{2K+2} \frac{(-1)^{j+1}}{j}$. Or la série harmonique alternée converge vers $\ln 2$. **La probabilité des entiers pairs vaut $\ln 2 \approx 0,693$.**

4. On a $\sum_{n \geq 0} 4^{-n} = \frac{1}{1-1/4} = \frac{4}{3}$. La condition $\lambda \cdot \frac{4}{3} = 1$ donne $\lambda = \frac{3}{4}$, et la positivité est claire. Ensuite, $Q(\{k, 1, \dots\}) = \frac{3}{4} \sum_{n \geq k} 4^{-n} = \frac{3}{4} \cdot 4^{-k} \cdot \frac{4}{3} = 4^{-k}$.
Donc $\lambda = \frac{3}{4}$ et $Q(\{k, 1, \dots\}) = 4^{-k}$.

5. Supposons $P(\{n\}) = c$ pour tout n . Par σ -additivité, $1 = P(\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} c$. Si $c = 0$, la somme est nulle ; si $c > 0$, la série diverge. Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction.
Il n'existe pas de probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$.

Corrigé de l'exercice 9 : Parité d'un entier choisi au hasard

1. La condition $\sum_{n \geq 1} \frac{c}{n^2} = 1$ donne $c = \frac{6}{\pi^2}$, et les termes sont alors positifs. Ensuite, par σ -additivité, la probabilité d'être multiple de d vaut

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c}{(dk)^2} = \frac{1}{d^2} \cdot c \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{d^2}.$$

Donc $c = \frac{6}{\pi^2}$, la probabilité d'être pair vaut $\frac{1}{4}$ et celle d'être multiple de d vaut $\frac{1}{d^2}$.

2. La probabilité d'être pair vaut $e^{-2} \sum_{k \geq 0} \frac{2^{2k}}{(2k)!} = e^{-2} \text{ch}(2) = e^{-2} \cdot \frac{e^2 + e^{-2}}{2}$. La probabilité d'être pair vaut $\frac{1 + e^{-4}}{2} \approx 0,509$. Ainsi, les pairs sont légèrement favorisés, contrairement à la question précédente.

3. On a $\sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} - \sum_{k \geq 1} \frac{1}{4k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$. La condition de somme égale à 1 impose donc $a = \frac{8}{\pi^2}$. Le support est l'ensemble des n tels que $p_n \neq 0$. Ainsi $a = \frac{8}{\pi^2}$, et le support est l'ensemble des entiers naturels impairs.

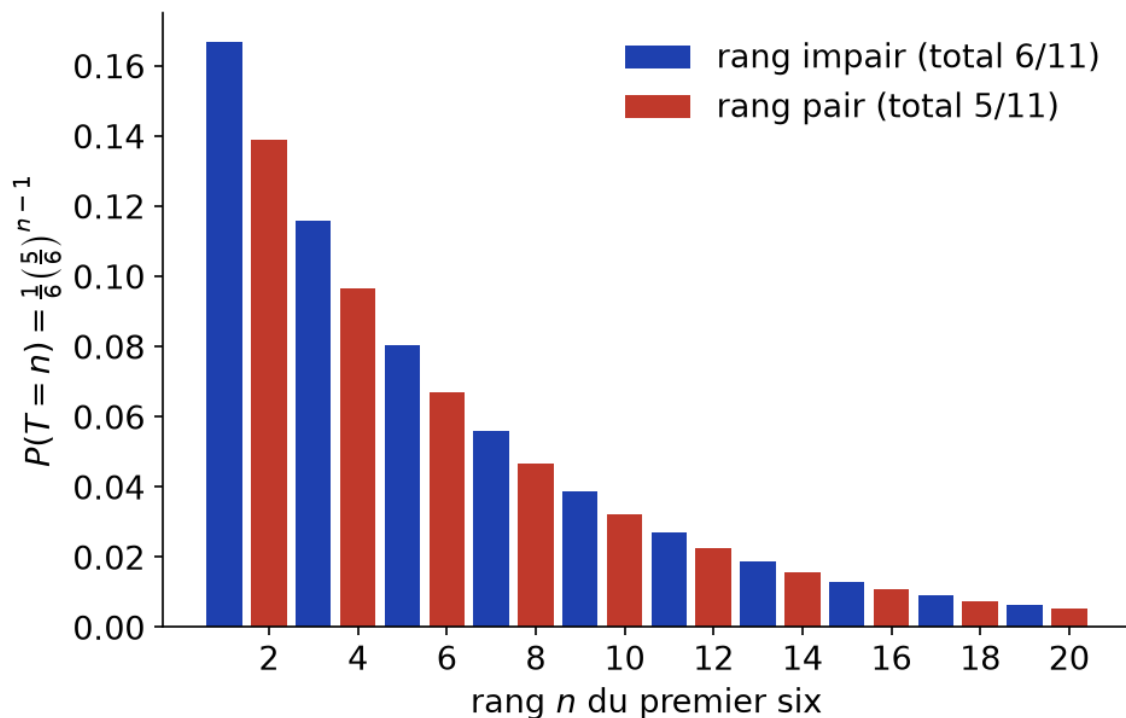
Corrigé de l'exercice 10 : Ne jamais obtenir de six

1. On a $B_n = \overline{S_1} \cap \dots \cap \overline{S_n}$. Les S_k sont mutuellement indépendants, donc leurs complémentaires aussi. **Par conséquent**, $P(B_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
2. L'événement « ne jamais obtenir six » est $B = \bigcap_{n \geq 1} B_n$. La suite (B_n) est décroissante, puisque $B_{n+1} = B_n \cap \overline{S_{n+1}}$. Par continuité décroissante, $P(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$. **L'événement « ne jamais obtenir six » est négligeable.**
3. On a $C_k = \bigcap_{m \geq 1} (\overline{S_{k+1}} \cap \dots \cap \overline{S_{k+m}})$, intersection décroissante d'événements de probabilité $\left(\frac{5}{6}\right)^m$. Par continuité décroissante, $P(C_k) = 0$. Or l'événement « on obtient un nombre fini de six » est $\bigcup_{k \geq 0} C_k$. C'est une réunion dénombrable d'événements négligeables, donc il est négligeable par sous-additivité. **Presque sûrement, on obtient une infinité de six.**

4. Soit T_n : « le premier six apparaît au lancer n ». Par indépendance, $P(T_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$.
Les T_{2k} sont deux à deux incompatibles. Par σ -additivité,

$$P\left(\bigcup_{k \geq 1} T_{2k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{2k-1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{1 - 25/36} = \frac{5}{36} \cdot \frac{36}{11}.$$

La probabilité que le premier six apparaisse à un rang pair vaut $\frac{5}{11}$. La figure ci-dessous montre la distribution du rang du premier six : les barres des rangs pairs totalisent $\frac{5}{11}$, celles des rangs impairs $\frac{6}{11}$.



Corrigé de l'exercice 11 : Sous-additivité et lemme de Borel-Cantelli

1. Si $P(N_n) = 0$ pour tout n , la sous-additivité donne
 $0 \leq P\left(\bigcup N_n\right) \leq \sum P(N_n) = 0$. Ensuite, si les A_n sont presque sûrs, leurs complémentaires sont négligeables, et $\overline{\bigcap A_n} = \bigcup \overline{A_n}$ est négligeable. **Une réunion dénombrable d'événements négligeables est négligeable ; une intersection dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.**

2. Une issue ω appartient à L si et seulement si, pour tout n , il existe $k \geq n$ tel que $\omega \in A_k$. Autrement dit, L est l'événement « une infinité de A_k sont réalisés ».
3. Pour tout n , on a $L \subset \bigcup_{k \geq n} A_k$. Par croissance de P et sous-additivité,
- $$P(L) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k). \text{ Or ce reste de série convergente tend vers 0 quand } n \rightarrow +\infty.$$
- Donc** $P(L) = 0$.
4. Soit A_n : « la n -ième pièce donne pile ». On a $P(A_n) = \frac{1}{n^2}$, et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. D'après la question 3, l'événement « une infinité de piles » est négligeable. **Presque sûrement, on n'obtient qu'un nombre fini de piles.** On remarque que ce résultat n'utilise pas l'indépendance des pièces.

Corrigé de l'exercice 12 : Modélisation du jeu de pile ou face infini

1. Le premier pile apparaît au lancer n si et seulement si les $n-1$ premiers lancers donnent face et le n -ième donne pile. Donc $T_n = \overline{P_1} \cap \dots \cap \overline{P_{n-1}} \cap P_n$. Par indépendance mutuelle, conservée par passage aux complémentaires, $P(T_n) = q^{n-1}p$.
2. Soit $F_n = \overline{P_1} \cap \dots \cap \overline{P_n}$. La suite (F_n) est décroissante, $P(F_n) = q^n$, et « jamais pile » est égal à $\bigcap_n F_n$. Comme $0 < q < 1$, la continuité décroissante donne une probabilité $\lim q^n = 0$. **L'événement « on n'obtient jamais pile » est négligeable.**
3. Pour $n \neq m$, les événements T_n et T_m sont incompatibles : le premier pile ne peut pas apparaître à deux rangs différents. De plus, $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}p = \frac{p}{1-q} = 1$. **Donc** $(T_n)_n \geq 1$ **est un système quasi-complet.** Ce n'est pas un système complet : la suite $(0, 0, 0, \dots)$ « toujours face » est un élément de Ω qui n'appartient à aucun T_n .
4. Soit $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega$ et $n \geq 1$. On note $E_n(\omega)$ l'événement « pour tout $k \leq n$, le lancer k donne ω_k ». C'est une intersection de n événements indépendants, chacun de probabilité p ou q . Donc $P(E_n(\omega)) \leq \max(p, q)^n$. Comme $\{\omega\} \subset E_n(\omega)$ pour tout n , on obtient $P(\{\omega\}) \leq \max(p, q)^n$, qui tend vers 0. Donc $P(\{\omega\}) = 0$. Si Ω était dénombrable, la σ -additivité donnerait $P(\Omega) = \sum_{\omega} P(\{\omega\}) = 0$, ce qui contredit $P(\Omega) = 1$. **Chaque issue est négligeable, et Ω n'est pas dénombrable.**

5. Par σ -additivité,

$$P\left(\bigcup_{k \geq 1} T_{2k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-1}p = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{pq}{(1-q)(1+q)}.$$

Comme $1 - q = p$, la probabilité que le premier pile apparaisse à un rang pair vaut $\frac{q}{1+q}$, soit $\frac{1}{3}$ pour une pièce équilibrée.

Corrigé de l'exercice 13 : Lancers alternés et système quasi-complet

1. Alice lance aux rangs impairs. Soit G l'événement « Alice gagne ». Pour n impair, $T_n \subset G$, et pour n pair, $T_n \cap G = \emptyset$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système quasi-complet (T_n) ,

$$P(G) = \sum_{n \geq 1} P(G \cap T_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k}p = \frac{p}{1-q^2} = \frac{1}{1+q}.$$

De même, Bruno gagne avec probabilité $\sum_{k \geq 1} q^{2k-1}p = \frac{q}{1+q}$, d'après l'exercice 12. **Alice gagne avec probabilité $\frac{1}{1+q}$ et Bruno avec probabilité $\frac{q}{1+q}$.**

2. La partie se termine dès qu'un pile apparaît. Or pile apparaît presque sûrement (exercice 12). On le vérifie aussi par le calcul : $\frac{1}{1+q} + \frac{q}{1+q} = 1$. **La partie se termine presque sûrement.**

3. Le jeu est équitable si et seulement si $\frac{1}{1+q} = \frac{1}{2}$, soit $q = 1$. C'est exclu, puisque $p > 0$. **Le jeu n'est jamais équitable : Alice est toujours avantagée.**

4. On a $T_1 \subset G$, donc $P(T_1 | G) = \frac{P(T_1)}{P(G)} = p(1+q) = p(2-p)$. **La probabilité cherchée vaut $p(2-p)$, soit $\frac{3}{4}$ pour $p = \frac{1}{2}$.**

Corrigé de l'exercice 14 : Urne choisie au hasard et formule de Bayes

1. Notons C_n l'événement « on choisit l'urne U_n ». Les C_n sont deux à deux incompatibles et $\sum_{n \geq 1} 2^{-n} = 1$: ils forment un système quasi-complet. De plus, $P(W | C_n) = \frac{1}{n}$. Par la formule des probabilités totales,

$$P(W) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right).$$

Donc $P(W) = \ln 2 \approx 0,693$.

2. Par la formule de Bayes, $P(C_1 | W) = \frac{P(W | C_1) P(C_1)}{P(W)} = \frac{1/2}{\ln 2}$. Plus généralement,
 $P(C_n | W) = \frac{1}{n 2^n \ln 2}$. **La boule blanche provient de U_1 avec probabilité**
 $\frac{1}{2 \ln 2} \approx 0,721$, **et de U_n avec probabilité** $\frac{1}{n 2^n \ln 2}$. On vérifie que la somme de ces probabilités vaut $\frac{\ln 2}{\ln 2} = 1$.

3. Soit $E = \bigcup_{k \geq 1} C_{2k}$. Par σ -additivité, $P(E) = \sum_{k \geq 1} 4^{-k} = \frac{1}{3}$. Ensuite,

$$P(W \cap E) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{4^k} = \frac{1}{2} \left(-\ln\left(1 - \frac{1}{4}\right) \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}.$$

Donc $P(W | E) = 3 \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$. **La probabilité cherchée vaut** $\frac{3}{2} \ln \frac{4}{3} \approx 0,432$.

Corrigé de l'exercice 15 : Test de dépistage

1. Les événements M et $\overline{M}$ forment un système complet. Par la formule des probabilités totales, $P(+)=0,001 \times 0,99 + 0,999 \times 0,02 = 0,00099 + 0,01998$. **Donc**
 $P(+)=0,02097$.

2. Par la formule de Bayes, $P(M | +) = \frac{0,00099}{0,02097} = \frac{99}{2097} = \frac{11}{233}$. **Donc**

$P(M | +) = \frac{11}{233} \approx 0,047$. Ainsi, moins de 5 % des personnes positives sont malades. En

effet, la maladie est si rare que les faux positifs, issus d'une population saine très nombreuse, dominant largement.

3. On a $P(-) = 1 - 0,02097 = 0,97903$ et $P(M \cap -) = 0,001 \times 0,01 = 0,00001$.
Donc $P(M | -) = \frac{1}{97903} \approx 1,02 \times 10^{-5}$. Un test négatif est donc très rassurant.

4. Par indépendance conditionnelle, $P(++ | M) = 0,99^2 = 0,9801$ et
 $P(++ | \bar{M}) = 0,02^2 = 0,0004$. Par la formule de Bayes,

$$P(M | ++) = \frac{0,001 \times 0,9801}{0,001 \times 0,9801 + 0,999 \times 0,0004} = \frac{0,0009801}{0,0013797}.$$

Donc $P(M | ++) = \frac{363}{511} \approx 0,710$. Le second test multiplie la probabilité par environ quinze.

Corrigé de l'exercice 16 : Urne de Pólya

1. Après le premier tirage, l'urne contient trois boules. Si la première boule est blanche, il y a deux blanches ; sinon, une seule. Par la formule des probabilités totales avec le système complet

$$(W_1, \bar{W}_1), \quad P(W_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}. \quad \text{Donc} \quad P(W_2) = \frac{1}{2}.$$

2. Sachant $W_1 \cap \dots \cap W_{k-1}$, l'urne contient k boules blanches et une noire, soit $k+1$ boules. Donc $P(W_k | W_1 \cap \dots \cap W_{k-1}) = \frac{k}{k+1}$. Par la formule des probabilités composées,

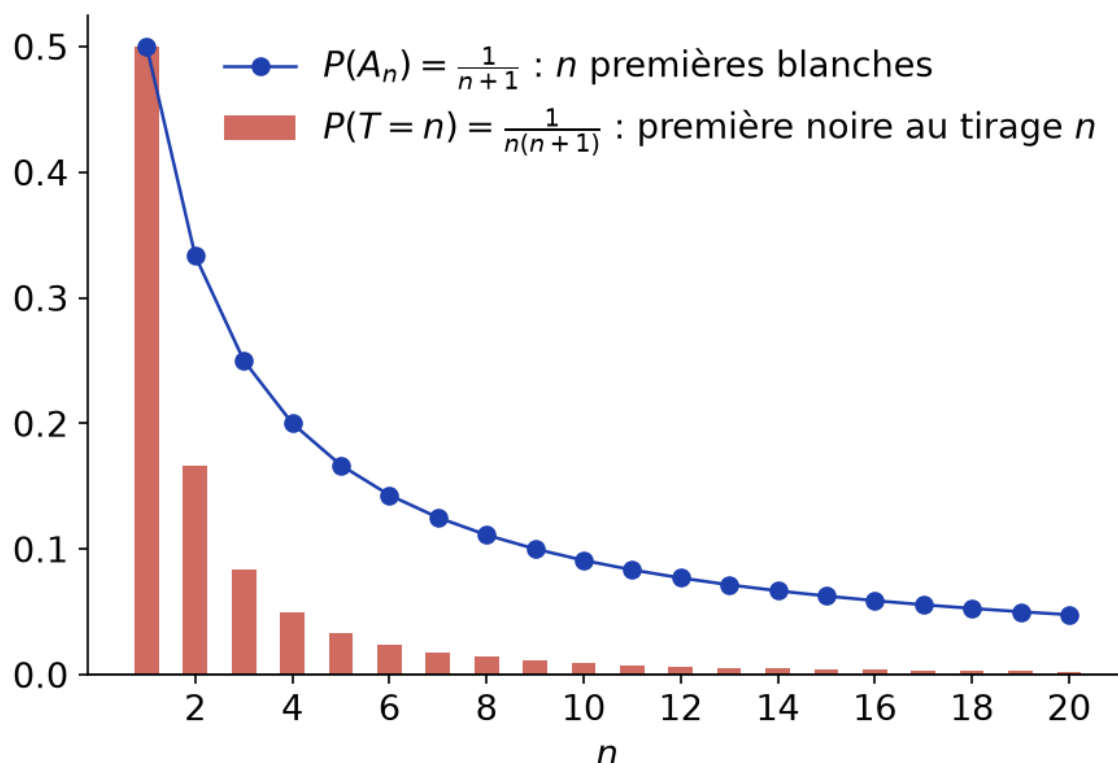
$$P(A_n) = \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi $P(A_n) = \frac{1}{n+1}.$

3. L'événement « ne tirer que des boules blanches » est $\bigcap_n A_n$, et la suite (A_n) est décroissante. Par continuité décroissante, sa probabilité vaut $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$. **Presque sûrement, on finit par tirer une boule noire.**

4. La première noire apparaît au tirage n si et seulement si A_{n-1} est réalisé puis la n -ième boule est noire (avec la convention $A_0 = \Omega$). Sachant A_{n-1} , l'urne contient n blanches et une noire. Donc cette probabilité vaut $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}$. **La première noire apparaît au tirage n avec probabilité $\frac{1}{n(n+1)}$.** Ces événements sont incompatibles et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ par

télescopage : c'est cohérent avec la question 3. La figure ci-dessous compare les deux suites.



Corrigé de l'exercice 17 : Indépendance deux à deux et indépendance mutuelle

- On munit $\{1, \dots, 6\}^2$ de la probabilité uniforme. On a $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. La somme est paire si et seulement si les deux dés ont la même parité, donc $P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Ensuite, $P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. De plus, $A \cap C = A \cap B$, car si le premier dé est pair, la somme est paire exactement quand le second l'est. De même, $B \cap C = A \cap B$. Ainsi, les trois intersections deux à deux ont pour probabilité $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. En revanche, $A \cap B \cap C = A \cap B$, de probabilité $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$. **Les trois événements sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.**
- On a $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B))$. **Donc $P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$: A et $\bar{B}$ sont indépendants.**

3. L'événement A est indépendant de lui-même si et seulement si $P(A) = P(A)^2$, soit $P(A)(1 - P(A)) = 0$. **Les événements indépendants d'eux-mêmes sont exactement les événements négligeables et les événements presque sûrs.**

Corrigé de l'exercice 18 : Suite d'événements indépendants

1. Les $\overline{A_n}$ sont mutuellement indépendants, puisque l'indépendance se conserve par passage aux complémentaires. Pour $n \geq 1$, on pose $D_n = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n}$. Alors

$P(D_n) = \prod_{k=1}^n (1 - p_k)$. La suite (D_n) est décroissante et $\bigcap_n D_n$ est l'événement « aucun A_n n'est réalisé ».

Par continuité décroissante, sa probabilité vaut

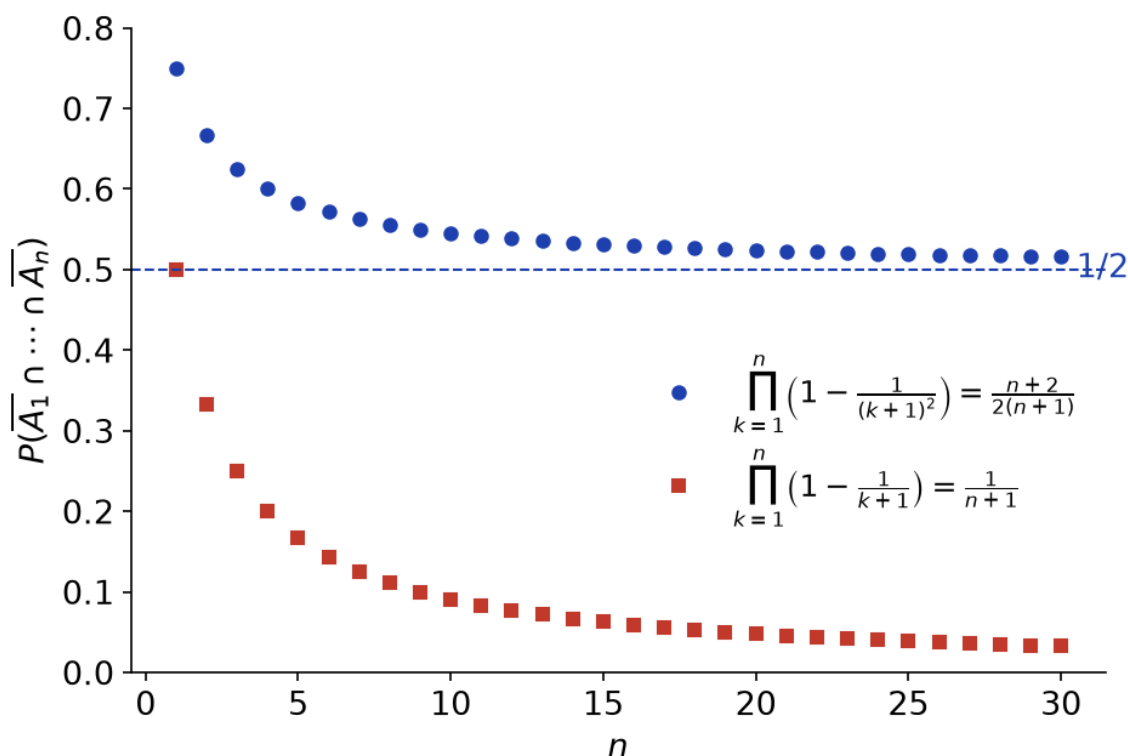
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n (1 - p_k).$$

2. On pose $j = k + 1$. Alors $1 - \frac{1}{j^2} = \frac{(j-1)(j+1)}{j^2}$, donc

$$\prod_{k=1}^n (1 - p_k) = \prod_{j=2}^{n+1} \frac{j-1}{j} \cdot \prod_{j=2}^{n+1} \frac{j+1}{j} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n+2}{2} = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

Cette quantité tend vers $\frac{1}{2}$. La probabilité qu'aucun A_n ne soit réalisé vaut donc $\frac{1}{2}$. **La probabilité qu'au moins un A_n soit réalisé vaut $\frac{1}{2}$.**

3. Ici, $\prod_{k=1}^n (1 - \frac{1}{k+1}) = \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$, qui tend vers 0. La probabilité qu'aucun A_n ne soit réalisé est donc nulle. **Presque sûrement, au moins un A_n est réalisé.** La figure ci-dessous compare les deux produits partiels.



4. Soit $m \geq 1$. Le même raisonnement, appliqué à la suite $(A_n)_n \geq m$, donne

$$P\left(\bigcap_{n \geq m} \overline{A_n}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=m}^N \frac{k}{k+1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{m}{N+1} = 0.$$

Or l'événement « seul un nombre fini de A_n sont réalisés » est $\bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} \overline{A_n}$. C'est une réunion dénombrable d'événements négligeables. **Presque sûrement, une infinité de A_n sont réalisés.**

Point de méthode : comparer avec l'exercice 11. Lorsque $\sum P(A_n)$ converge, seul un nombre fini de A_n se réalise ; ici, la série $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge et l'indépendance donne la conclusion inverse.

Corrigé de l'exercice 19 : Tout motif fini apparaît presque sûrement

1. L'événement E_j est l'intersection de k événements indépendants portant sur les lancers $jk + 1, \dots, jk + k$, chacun de probabilité $\frac{1}{2}$. **Donc** $P(E_j) = \frac{1}{2^k}$.
2. Les événements E_j portent sur des blocs de lancers deux à deux disjoints. Ils sont donc mutuellement indépendants, et leurs complémentaires aussi. Ainsi $P(\overline{E_0} \cap \dots \cap \overline{E_{N-1}}) = (1 - 2^{-k})^N$. Par continuité décroissante, $P(\bigcap_j \overline{E_j}) = \lim_N (1 - 2^{-k})^N = 0$. Or si le motif m n'apparaît jamais, aucun E_j n'est réalisé. Donc l'événement « m n'apparaît jamais » est inclus dans un événement négligeable.
Presque sûrement, le motif m apparaît au moins une fois.
3. L'ensemble des motifs finis est $\bigcup_{k \geq 1} \{P, F\}^k$. C'est une réunion dénombrable d'ensembles finis, et il est infini. Il est donc dénombrable. Pour chaque motif m , l'événement G_m : « m apparaît » est presque sûr. Ainsi, $\bigcap_m G_m$ est une intersection dénombrable d'événements presque sûrs. **Presque sûrement, tous les motifs finis apparaissent.**

Corrigé de l'exercice 20 : Deux motifs en compétition

1. Supposons que l'un des deux premiers lancers donne face, et notons $\tau \in \{1, 2\}$ le rang du premier face. Presque sûrement, un pile apparaît après le rang τ (même argument que dans l'exercice 12). Soit t le rang du premier pile après τ . Le lancer $t - 1$ donne face, donc FP apparaît au rang t . Montrons que PP n'est pas apparu avant. Si $\tau = 1$, les lancers 1 à $t - 1$ donnent tous face. Si $\tau = 2$, le lancer 1 donne pile, puis les lancers 2 à $t - 1$ donnent face. Dans les deux cas, aucun pile n'est suivi d'un pile avant le rang t . **Donc, presque sûrement, FP apparaît avant PP dès qu'un des deux premiers lancers donne face.**
2. Soit D l'événement « les deux premiers lancers donnent pile ». Sur D , PP apparaît au rang 2, alors que FP ne peut pas apparaître avant le rang 3. Sur $\overline{D}$, FP gagne presque sûrement. Donc la probabilité que PP apparaisse en premier vaut $P(D)$. **La probabilité que PP apparaisse avant FP vaut $\frac{1}{4}$.** Ce résultat surprend, car les deux motifs ont la même probabilité $\frac{1}{4}$ à un rang donné.
3. Presque sûrement, un pile apparaît ; soit t le rang du premier pile. Aucun des deux motifs, qui commencent par P, ne peut apparaître avant le rang $t + 1$. Au rang $t + 1$, l'un des deux apparaît : PP si le lancer $t + 1$ donne pile, PF sinon. Par la formule des probabilités totales appliquée au système quasi-complet (T_n) ,

$$P(\text{PP avant PF}) = \sum_{n \geq 1} P(T_n) P(P_{n+1} | T_n) = \sum_{n \geq 1} P(T_n) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

puisque le lancer $n+1$ est indépendant des n premiers. **La probabilité que PP apparaisse avant PF vaut $\frac{1}{2}$.**

Corrigé de l'exercice 21 : Tribu engendrée par une partition dénombrable

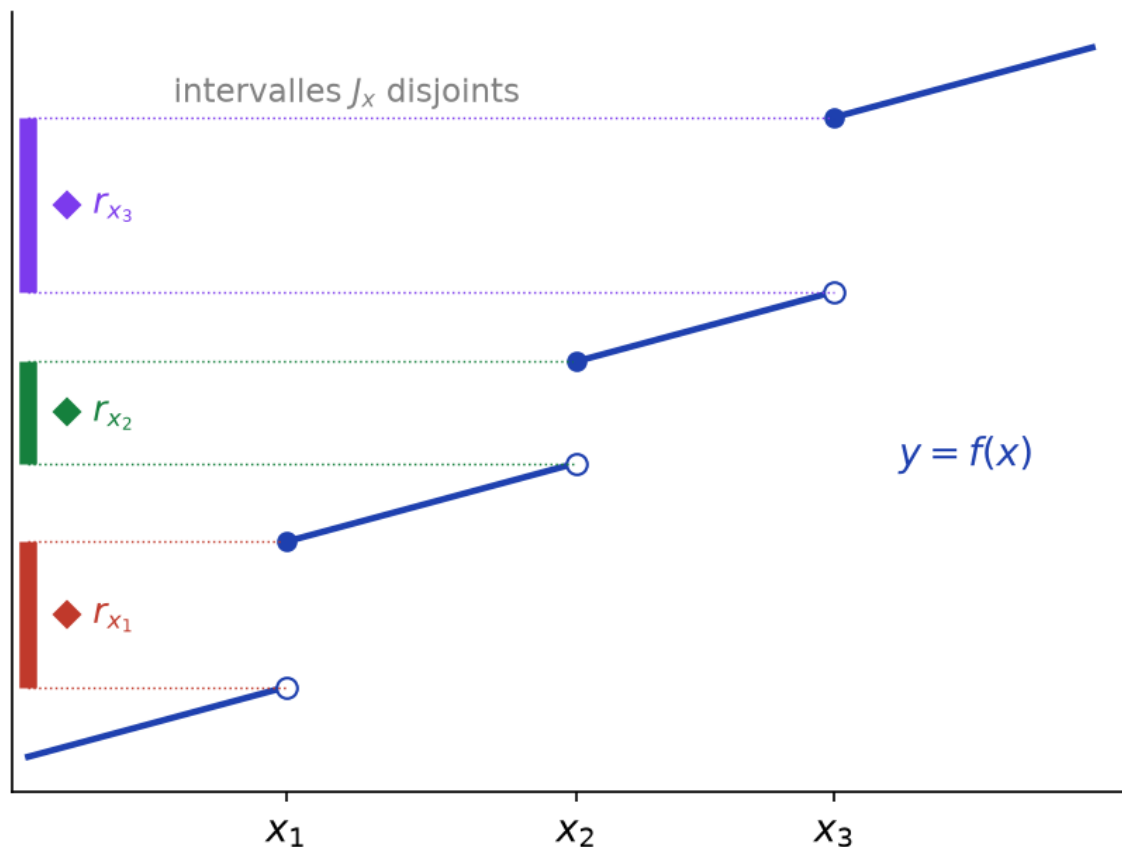
1. D'abord, $\Omega = A_{\mathbb{N}} \in \mathcal{T}$, car les A_n recouvrent Ω . Ensuite, les A_n forment une partition, donc $A_I = A_{\mathbb{N} \setminus I} \in \mathcal{T}$. Enfin, pour une suite (I_k) de parties de $\mathbb{N}$,

$$\bigcup_k A_{I_k} = A_{\bigcup_k I_k} \in \mathcal{T}.$$
Donc $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω .
2. Soit $\mathcal{B}$ une tribu contenant tous les A_n . Pour $I \subset \mathbb{N}$, l'ensemble I est au plus dénombrable, donc A_I est une réunion au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{B}$. Ainsi $A_I \in \mathcal{B}$. **Toute tribu contenant les A_n contient $\mathcal{T}$: $\mathcal{T}$ est la tribu engendrée par la partition.**
3. La surjectivité découle de la définition de $\mathcal{T}$. Pour l'injectivité, soit $I \neq J$, par exemple $n \in I \setminus J$. Alors $A_n \subset A_I$, tandis que $A_n \cap A_J = \emptyset$, car les A_m sont deux à deux disjoints. Comme $A_n \neq \emptyset$, on obtient $A_I \neq A_J$. Or $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable (exercice 5). **L'application est bijective, et la tribu $\mathcal{T}$ n'est pas dénombrable.**
4. Si P convient, la σ -additivité impose $P(A_I) = \sum_{n \in I} p_n$: d'où l'unicité. Réciproquement, cette formule définit une application sur $\mathcal{T}$, grâce à la bijection de la question 3. On a $P(\Omega) = \sum_n p_n = 1$. Soit ensuite (A_{I_k}) une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{T}$. D'après l'argument de la question 3, les I_k sont deux à deux disjoints. Le théorème de sommation par paquets pour les familles positives donne alors
$$P\left(A_{\bigcup_k I_k}\right) = \sum_{n \in \bigcup_k I_k} p_n = \sum_k \sum_{n \in I_k} p_n = \sum_k P(A_{I_k}).$$
Il existe donc une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{T})$ telle que $P(A_n) = p_n$.
5. On a $[2, +\infty[= A_I$ avec $I = \{2, 3, \dots\}$, donc $P([2, +\infty[) = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}$.

Ensuite, $\bigcup_k [2k, 2k+1[= \mathbb{A}_{2\mathbb{N}}$, donc sa probabilité vaut $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-1/4} = \frac{2}{3}$.
 . Ainsi $P([2, +\infty[) = \frac{1}{4}$ et $P(\bigcup_k [2k, 2k+1[) = \frac{2}{3}$.

Corrigé de l'exercice 22 : Discontinuités d'une fonction monotone

- Si $f(x^-) = f(x^+)$, l'encadrement $f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+)$ impose que les deux limites valent $f(x)$. Donc f est continue en x . Réciproquement, si f est continue en x , ses limites à gauche et à droite valent $f(x)$. **Donc $x \in D$ si et seulement si $f(x^-) < f(x^+)$, et J_x est alors un intervalle ouvert non vide.**
- Soit $t \in]x, y[$. Pour $x < u < t$, on a $f(u) \leq f(t)$. En faisant tendre u vers x^+ , on obtient $f(x^+) \leq f(t)$. De même, $f(t) \leq f(y^-)$. **Donc $f(x^+) \leq f(y^-)$.** Par conséquent, tout élément de J_x est strictement inférieur à $f(x^+) \leq f(y^-)$, alors que tout élément de J_y est strictement supérieur à $f(y^-)$. **Ainsi $J_x \cap J_y = \emptyset$.** La figure ci-dessous montre ces intervalles de saut, disjoints sur l'axe des ordonnées.



3. Pour chaque $x \in D$, l'intervalle ouvert non vide J_x contient un rationnel, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. On en choisit un, noté r_x . D'après la question 2, les J_x sont deux à deux disjoints, donc $x \rightarrow r_x$ est injective de D dans $\mathbb{Q}$. **Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, D est au plus dénombrable.**

4. Soit $x_1 < \dots < x_m$ des éléments de D_k . Par la question 2 appliquée sur $[0,1]$, on a $f(0) \leq f(x_1^-)$, $f(x_i^+) \leq f(x_{i+1}^-)$ et $f(x_m^+) \leq f(1)$. Donc

$$\frac{m}{k} \leq \sum_{i=1}^m (f(x_i^+) - f(x_i^-)) \leq f(1) - f(0).$$

Ainsi $m \leq k(f(1) - f(0))$. **Chaque D_k est fini, de cardinal au plus $k(f(1) - f(0))$.**

Enfin, un point de $]0,1[$ est une discontinuité si et seulement si son saut est strictement positif, c'est-à-dire supérieur à $\frac{1}{k}$ pour un certain k . L'ensemble des discontinuités dans $]0,1[$ est donc

$\bigcup_k D_k$, réunion dénombrable d'ensembles finis. **Il est au plus dénombrable.**

5. La fonction partie entière $x \rightarrow \lfloor x \rfloor$ est croissante. Elle est continue sur chaque $]n, n+1[$ et discontinue en chaque entier n , puisque $\lfloor n^- \rfloor = n-1 \neq n$. **Son ensemble de points de discontinuité est $\mathbb{Z}$, qui est dénombrable.**

Corrigé de l'exercice 23 : Problème : loi zêta et produit eulérien

1. Comme $s > 1$, la série de Riemann $\sum n^{-s}$ converge, et $\zeta(s) > 0$. Les nombres $\frac{1}{\zeta(s)} n^{-s}$ sont positifs et de somme $\frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} = 1$. **Ils définissent une distribution de probabilités, donc P est une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.**

2. On a $M_d = \{dk : k \geq 1\}$, et $k \rightarrow dk$ est injective. Par σ -additivité,

$$P(M_d) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s) (dk)^s} = \frac{1}{d^s} \cdot \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Donc $P(M_d) = d^{-s}$.

3. Soit J une partie finie de $\mathbb{N}^*$. Un entier est divisible par tous les p_j , $j \in J$, si et seulement s'il est divisible par leur produit, car ces nombres premiers distincts sont deux à deux premiers entre eux. Donc $\bigcap_{j \in J} M_{p_j} = M_d$ avec $d = \prod_{j \in J} p_j$. D'après la question 2,

$$P\left(\bigcap_{j \in J} M_{p_j}\right) = \prod_{j \in J} p_j^{-s} = \prod_{j \in J} P(M_{p_j}).$$

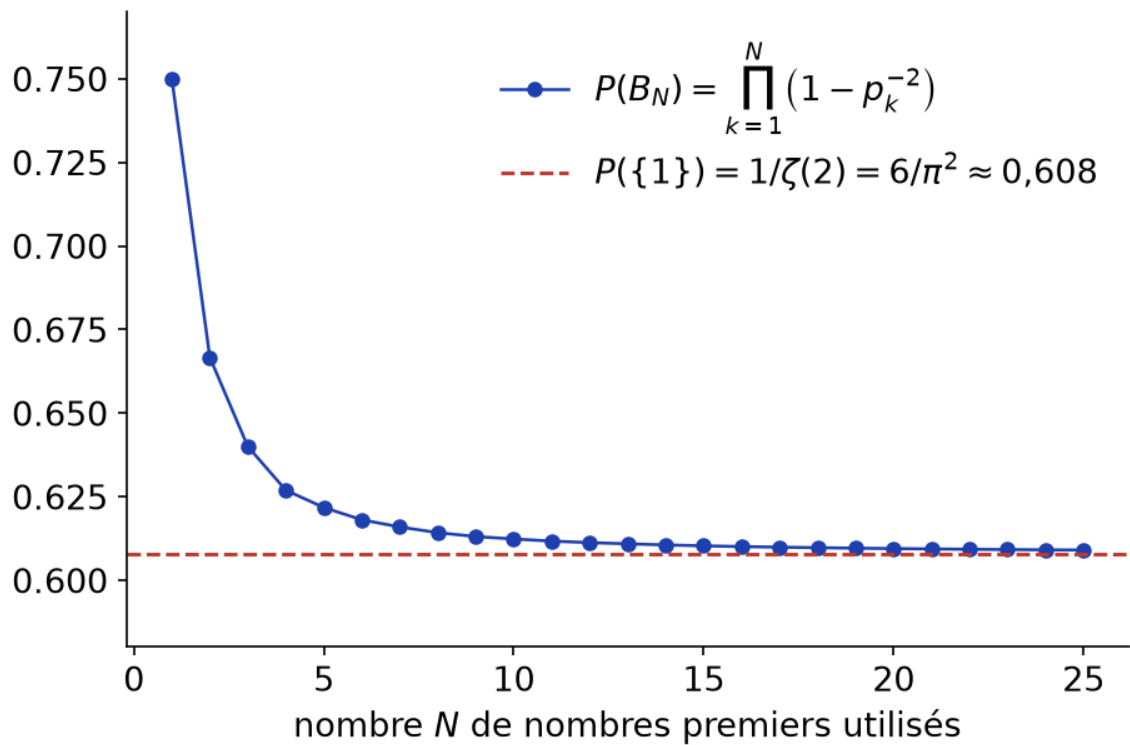
Les événements $(M_{p_k})_{k \geq 1}$ sont mutuellement indépendants.

4. On a $B_N = \bigcap_{k=1}^N \overline{M_{p_k}}$. Les complémentaires d'événements mutuellement indépendants sont mutuellement indépendants. **Donc** $P(B_N) = \prod_{k=1}^N (1 - p_k^{-s})$.

5. L'entier 1 n'est divisible par aucun nombre premier, donc il appartient à tous les B_N . Réciproquement, si $n \geq 2$, il admet un diviseur premier p_k , et alors $n \notin B_k$. **Donc**

$\bigcap_{N \geq 1} B_N = \{1\}$. La suite (B_N) est décroissante. Par continuité décroissante, $P(\{1\}) = \lim_N P(B_N)$. Or $P(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$. **On obtient le produit eulérien**

$\frac{1}{\zeta(s)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N (1 - p_k^{-s})$. La figure ci-dessous illustre cette convergence pour $s = 2$, vers $\frac{6}{\pi^2}$.



6. Soit J une partie finie de $\mathbb{N}^*$. Les carrés p_j^2 sont deux à deux premiers entre eux, donc

$$\bigcap_{j \in J} M_{p_j^2} = M_{d^2} \text{ avec } d = \prod_{j \in J} p_j. \text{ D'après la question 2,}$$

$$P(M_{d^2}) = d^{-2s} = \prod_{j \in J} P(M_{p_j^2}). \text{ Donc les } (M_{p_k^2}) \text{ sont mutuellement}$$

indépendants. Soit $Q_N = \bigcap_{k=1}^N \overline{M_{p_k^2}}$. Alors $P(Q_N) = \prod_{k=1}^N (1 - p_k^{-2s})$. La suite

(Q_N) est décroissante, et son intersection est l'ensemble Q des entiers sans facteur carré.

Par continuité décroissante, puis par la question 5 appliquée à $2s > 1$,

$$P(Q) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N (1 - p_k^{-2s}) = \frac{1}{\zeta(2s)}.$$

La probabilité qu'un entier soit sans facteur carré vaut $\frac{1}{\zeta(2s)}$, soit $\frac{90}{\pi^4} \approx 0,924$ pour $s = 2$.

Point de méthode : la continuité décroissante transforme ici une information arithmétique finie (divisibilité par N nombres premiers) en une identité portant sur tous les nombres premiers.

Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [espaces probabilisés, cours de maths spé](#)
- Les énoncés : [exercices de maths spé sur espaces probabilisés](#)
- Chapitre précédent : [Intégrales à paramètre](#)
- Chapitre suivant : [Variables aléatoires discrètes et lois usuelles](#)
- Le même thème en L2 : [espaces probabilisés, exercices de maths en L2](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)