

Espaces probabilisés

Corrigé de l'exercice 1 : Tribus sur un ensemble fini

1. Pour $\mathcal{T}_1$, vérifions les trois axiomes. D'abord, $\Omega \in \mathcal{T}_1$. Ensuite, les complémentaires de $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2,3,4\}$, Ω sont respectivement Ω , $\{2,3,4\}$, $\{1\}$, $\emptyset$: ils sont dans $\mathcal{T}_1$. Enfin, $\mathcal{T}_1$ est finie, donc une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}_1$ est une réunion finie. Or la réunion de deux éléments de $\mathcal{T}_1$ est l'un des deux ou Ω . **Donc $\mathcal{T}_1$ est une tribu.** En revanche, $\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\} \notin \mathcal{T}_2$. **Donc $\mathcal{T}_2$ n'est pas une tribu.**
2. Une tribu contenant $\{1\}$ et $\{2\}$ contient $\{1,2\}$, puis son complémentaire $\{3,4\}$. Elle contient donc toutes les réunions de parties prises parmi $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3,4\}$. Réciproquement, la famille de ces réunions est stable par complémentaire et par réunion : c'est une tribu. Par conséquent, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3,4\}, \{1,2\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \Omega\}$, **qui a $2^3 = 8$ éléments.**
3. Soit $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux tribus sur Ω . D'abord, Ω appartient aux deux, donc à $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$. Ensuite, si $A \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$, alors $\bar{A}$ est dans chacune des deux tribus. Enfin, une suite d'éléments de l'intersection est une suite d'éléments de chaque tribu, donc sa réunion est dans chacune. **Ainsi, $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$ est une tribu.**
4. On a $\{1\} \in \mathcal{T}_1$ et $\{2\} \in \mathcal{T}_3$. Cependant, $\{1,2\}$ n'appartient ni à $\mathcal{T}_1$ ni à $\mathcal{T}_3$. **Donc $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_3$ n'est pas stable par réunion : ce n'est pas une tribu.**

Corrigé de l'exercice 2 : Traduire des événements

1. « Au moins un » s'écrit $A \cup B \cup C$, et « aucun » s'écrit $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$. Ensuite, « exactement un » est la réunion disjointe

$$(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C).$$

Enfin, « au plus un » est le contraire de « au moins deux ». **Il s'écrit donc**

$$\overline{(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)}.$$

2. « À partir d'un certain rang k , tous les A_n sont réalisés » signifie : il existe k tel que, pour tout $n \geq k$, $\omega \in A_n$. De même, « une infinité de A_n » signifie : pour tout k , il existe $n \geq k$ avec $\omega \in A_n$. Ainsi,

$$G = \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{n \geq k} A_n, \quad L = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq k} A_n.$$

3. Une tribu est stable par réunion et intersection dénombrables. Donc chaque $\bigcap_{n \geq k} A_n$ est dans $\mathcal{A}$, puis leur réunion G aussi. Le même raisonnement vaut pour L . De plus, si $\omega \in G$, tous les A_n avec $n \geq k$ contiennent ω . En particulier, une infinité d'entre eux. **Donc** $G \subset L$.

4. Pour tout k , la suite $(A_n)_{n \geq k}$ prend les deux valeurs A et B . Par conséquent, $\bigcap_{n \geq k} A_n = A \cap B$ et $\bigcup_{n \geq k} A_n = A \cup B$. **On obtient** $G = A \cap B$ et $L = A \cup B$.

Corrigé de l'exercice 3 : Formule du crible pour trois événements

1. Appliquons la formule à $A \cup B$ et C :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C).$$

Or $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, et l'intersection de ces deux événements est $A \cap B \cap C$. Donc

$$P((A \cup B) \cap C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C).$$

En remplaçant aussi $P(A \cup B)$ par $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, **on obtient la formule**

annoncée.

2. Notons D_k l'événement « l'entier est divisible par k ». Comme k divise 60 pour $k \in \{2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, on a $P(D_k) = 1/k$. De plus, $D_2 \cap D_3 = D_6$, $D_2 \cap D_5 = D_{10}$, $D_3 \cap D_5 = D_{15}$ et $D_2 \cap D_3 \cap D_5 = D_{30}$, car 2, 3, 5 sont premiers entre eux. En comptant les entiers :

$$\frac{30 + 20 + 12 - 10 - 6 - 4 + 2}{60} = \frac{44}{60}.$$

La probabilité cherchée vaut $11/15$.

3. Un entier est premier avec $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ si et seulement s'il n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5. C'est l'événement contraire du précédent. **Sa probabilité vaut $1 - 11/15 = 4/15$** , soit 16 entiers sur 60.

Corrigé de l'exercice 4 : Une probabilité sur les entiers non nuls

1. Les p_n sont positifs. De plus, la décomposition $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ donne une somme télescopique :

$$\sum_{n=1}^N p_n = 1 - \frac{1}{N+1} \quad [N \rightarrow +\infty] 1.$$

D'après le théorème de construction d'une probabilité sur un univers dénombrable, **il existe une unique probabilité P telle que $P(\{n\}) = p_n$.**

2. Par σ -additivité, puis par télescopage,

$$P(\{n \geq k\}) = \sum_{n=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1} \right) = \frac{1}{k}.$$

Ainsi, $P(\{n \geq k\}) = 1/k$.

3. Les entiers pairs sont les $n = 2m$, $m \geq 1$. Donc

$$P(\text{pair}) = \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{m+1}} \right).$$

La somme partielle d'indice M vaut $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^M} - \frac{1}{2^{M+1}}$. Autrement dit, elle vaut $1 - S_{2M+1}$, où S_j est la somme partielle de la série $\sum (-1)^{j+1}/j$. Or $S_{2M+1} \rightarrow \ln 2$. **Donc** $P(\text{pair}) = 1 - \ln 2 \approx 0,307$ **et** $P(\text{impair}) = \ln 2 \approx 0,693$.

Corrigé de l'exercice 5 : Probabilité géométrique sur $\mathbb{N}$

1. Il faut $a \geq 0$ et $\sum_{n \geq 0} a 3^{-n} = 1$. Or la série géométrique vaut $\frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}$. Ainsi $\frac{3a}{2} = 1$. Réciproquement, le théorème de construction s'applique. **Donc** $a = 2/3$.

2. On calcule :

$$P(\{n \geq k\}) = \frac{2}{3} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3^{-k}}{1-1/3} = \frac{1}{3^k}.$$

Donc $P(\{n \geq k\}) = 3^{-k}$.

3. Pour les entiers pairs, $P = \frac{2}{3} \sum_{j \geq 0} 9^{-j} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8}$. **On obtient** $3/4$. De même, pour les multiples de 3, $P = \frac{2}{3} \sum_{j \geq 0} 27^{-j} = \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{26}$. **On obtient** $9/13$.

4. L'événement « pair et non nul » est « pair » privé de $\{0\}$. Sa probabilité vaut donc $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$. Par ailleurs, $P(\{n \geq 1\}) = \frac{1}{3}$. Par définition de la probabilité conditionnelle, **la probabilité cherchée vaut** $\frac{1/12}{1/3} = \frac{1}{4}$.

Corrigé de l'exercice 6 : Pas d'équiprobabilité sur $\mathbb{N}$

- Supposons que $P(\{n\}) = c$ pour tout n . Par σ -additivité, $1 = P(\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} c$. Si $c = 0$, cette somme est nulle. Si $c > 0$, elle vaut $+\infty$. Dans les deux cas, on obtient une contradiction. **Il n'existe donc pas d'équiprobabilité sur $\mathbb{N}$.**
- D'abord, la série $\sum P(\{n\})$ converge, de somme 1. Son terme général tend donc vers 0. Ensuite, posons $R_n = \{n, n+1, \dots\}$. La suite (R_n) est décroissante et $\bigcap_n R_n = \emptyset$. Par continuité décroissante, $P(R_n) \rightarrow P(\emptyset) = 0$.
- Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question 2, il existe n tel que $P(R_{n+1}) \leq \varepsilon$. Posons $F = \{0, \dots, n\}$, qui est le complémentaire de R_{n+1} . **Alors**
 $P(F) = 1 - P(R_{n+1}) \geq 1 - \varepsilon$.
- La suite $C_n = \{0, \dots, n\}$ est croissante, de réunion $\mathbb{N}$. Par continuité croissante, $P(C_n) \rightarrow P(\mathbb{N}) = 1$. Or une suite constante égale à $1/2$ ne tend pas vers 1. **Une telle probabilité n'existe donc pas.**

Point de méthode : dès qu'une suite d'événements est monotone, cherchez sa réunion ou son intersection ; la continuité monotone donne alors la limite des probabilités sans aucun calcul.

Corrigé de l'exercice 7 : Sous-additivité dénombrable

- Pour $n = 0$, l'égalité est immédiate. Supposons le résultat vrai au rang n , et posons $U_n = A_0 \cup \dots \cup A_n$. Alors
$$P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(A_{n+1}) - P(U_n \cap A_{n+1}) \leq P(U_n) + P(A_{n+1}).$$

Avec l'hypothèse de récurrence, **on obtient** $P(U_{n+1}) \leq \sum_{k=0}^{n+1} P(A_k)$.

2. La suite (U_n) est croissante et $\bigcup_n U_n = \bigcup_n A_n$. Par continuité croissante,

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n P(A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k).$$

C'est l'inégalité de Boole ; elle est triviale si la série diverge.

3. Si tous les A_n sont négligeables, la somme de droite est nulle. Donc $P\left(\bigcup_n A_n\right) = 0$.

Ensuite, si tous les A_n sont presque sûrs, les $\overline{A_n}$ sont négligeables. Or $\bigcap_n A_n = \overline{\bigcup_n \overline{A_n}}$ est négligeable. **Donc $\bigcap_n A_n$ est presque sûr.**

4. On applique l'inégalité de Boole aux complémentaires :

$$P\left(\bigcap_n A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_n \overline{A_n}\right) \geq 1 - \sum_n P(\overline{A_n}).$$

C'est l'inégalité demandée.

Corrigé de l'exercice 8 : Pile ne sort jamais

1. On a $E = \bigcap_{n \geq 1} \overline{P_n}$. Posons $C_n = \overline{P_1} \cap \dots \cap \overline{P_n}$. Les complémentaires d'événements mutuellement indépendants sont mutuellement indépendants. Donc $P(C_n) = (1/2)^n$. De plus, (C_n) est décroissante, d'intersection E . Par continuité décroissante,

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} = 0.$$

2. On a $D_k = \bigcap_{n \geq k} P_n$. Posons $D_{k,m} = P_k \cap \dots \cap P_{k+m-1}$. Par indépendance, $P(D_{k,m}) = 2^{-m}$. La suite $(D_{k,m})_m$ est décroissante, d'intersection D_k . Donc, par continuité décroissante, $P(D_k) = 0$.

3. L'événement « face n'apparaît qu'un nombre fini de fois » signifie : à partir d'un certain rang, on n'obtient que pile. C'est donc $\bigcup_k D_k$. D'après l'inégalité de Boole, cette réunion dénombrable d'événements négligeables est négligeable. **Par passage au complémentaire, face apparaît presque sûrement une infinité de fois.**

4. Pour $j \geq 1$, posons $G_j = P_{2j-1} \cap P_{2j}$. Chaque G_j est une intersection de P_n d'indices distincts, et deux G_j différents font intervenir des indices disjoints. Par conséquent, les G_j sont mutuellement indépendants, de probabilité $1/4$. Ainsi,

$$P(\overline{G_1} \cap \dots \cap \overline{G_m}) = \left(\frac{3}{4}\right)^m \quad [m \rightarrow +\infty] 0.$$

Par continuité décroissante, $P\left(\bigcap_j \overline{G_j}\right) = 0$. Or « jamais deux piles consécutifs » est inclus dans $\bigcap_j \overline{G_j}$. **Donc on obtient presque sûrement deux piles consécutifs.**

Corrigé de l'exercice 9 : Premier pile à un rang impair

1. Le premier pile apparaît au lancer n si et seulement si les $n-1$ premiers lancers donnent face et le n -ième donne pile. Par indépendance, $q_n = (1-p)^{n-1} p$. Ces nombres sont positifs et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

On pose donc $Q(\{n\}) = q_n$ pour $n \geq 1$ et $Q(\{\infty\}) = 0$. La famille est positive, de somme 1, donc elle définit une probabilité sur Ω . **La valeur $Q(\{\infty\}) = 0$ traduit que le jeu s'arrête presque sûrement.**

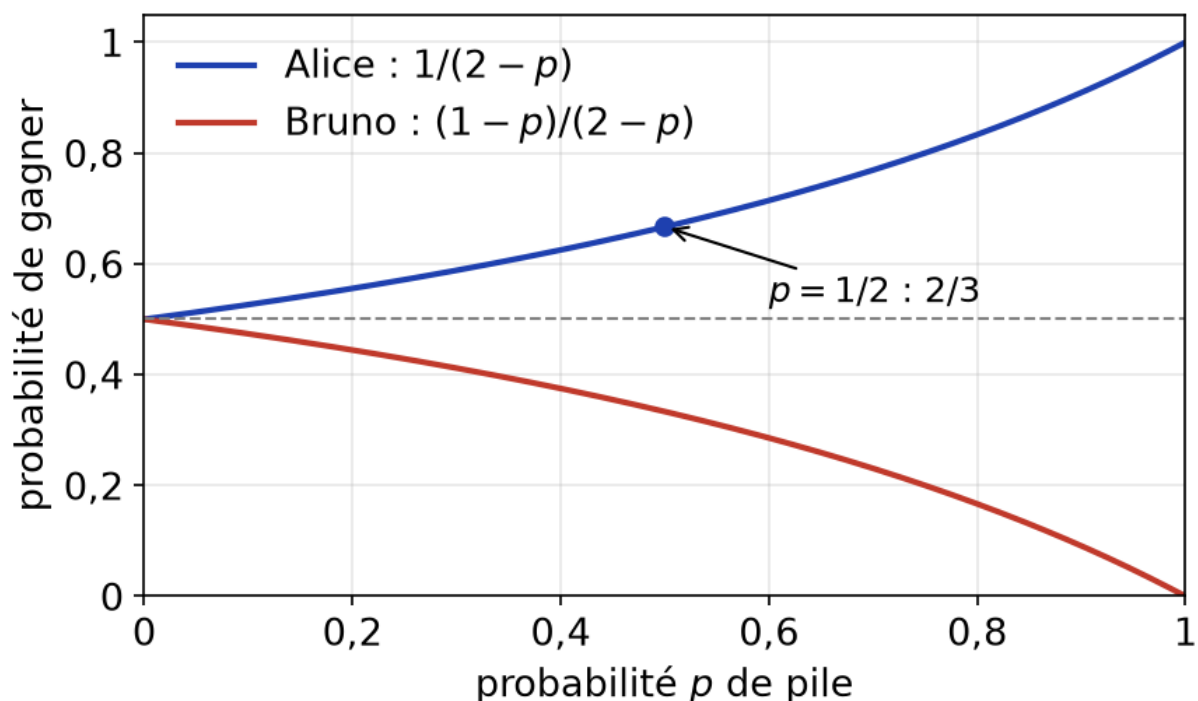
2. Alice gagne si le premier pile a lieu à un rang impair $n = 2k+1$, $k \geq 0$. Donc

$$Q(\text{Alice gagne}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{2k} p = \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{p(2-p)} = \frac{1}{2-p}.$$

Comme $Q(\{\infty\}) = 0$, Bruno gagne avec probabilité complémentaire. **Alice gagne avec probabilité $\frac{1}{2-p}$, Bruno avec probabilité $\frac{1-p}{2-p}$.**

3. Pour $p \in]0,1[$, on a $0 < 2-p < 2$, donc $\frac{1}{2-p} > \frac{1}{2}$. Pour $p = 1/2$, **Alice gagne avec probabilité $2/3$** . Enfin, quand $p \rightarrow 0$, la probabilité tend vers $1/2$: l'avantage de commencer s'efface lorsque la partie dure longtemps. La figure ci-dessous montre cette probabilité

en fonction de p .



Corrigé de l'exercice 10 : Tirages avec et sans remise

- On numérote les boules de 1 à 8, les blanches de 1 à 5. L'univers est $\{1, \dots, 8\}^3$, muni de l'équiprobabilité, de cardinal 512. Pour exactement 2 blanches, on choisit la position de la noire (3 choix), puis on obtient $5^2 \times 3$ listes. D'où $\frac{3 \times 75}{512} = \frac{225}{512}$. Par ailleurs, l'événement contraire de « au moins une noire » est « trois blanches », de probabilité $\frac{125}{512}$. **Les probabilités valent $225/512 \approx 0,439$ et $387/512 \approx 0,756$.**
- L'univers est l'ensemble des arrangements de 3 boules parmi 8, de cardinal $8 \times 7 \times 6 = 336$. Pour exactement 2 blanches, on choisit la position de la noire (3 choix), puis $5 \times 4 \times 3 = 60$ façons de placer les boules. D'où $\frac{180}{336} = \frac{15}{28}$. Ensuite, les tirages tout blancs sont au nombre de $5 \times 4 \times 3 = 60$. **Les probabilités valent $15/28 \approx 0,536$ et $1 - 60/336 = 23/28 \approx 0,821$.**
- L'univers est l'ensemble des parties à 3 éléments, de cardinal $\binom{8}{3} = 56$. On obtient

$\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$ et $1 - \frac{\binom{5}{3}}{56} = 1 - \frac{10}{56} = \frac{23}{28}$. **On retrouve exactement les résultats de la question 2.** En effet, chaque partie correspond à $3! = 6$ arrangements, ce qui ne change pas les proportions.

4. Comme $\frac{15}{28} \approx 0,536 > \frac{225}{512} \approx 0,439$, **obtenir exactement 2 blanches est plus probable sans remise.**

Corrigé de l'exercice 11 : Le paradoxe des anniversaires

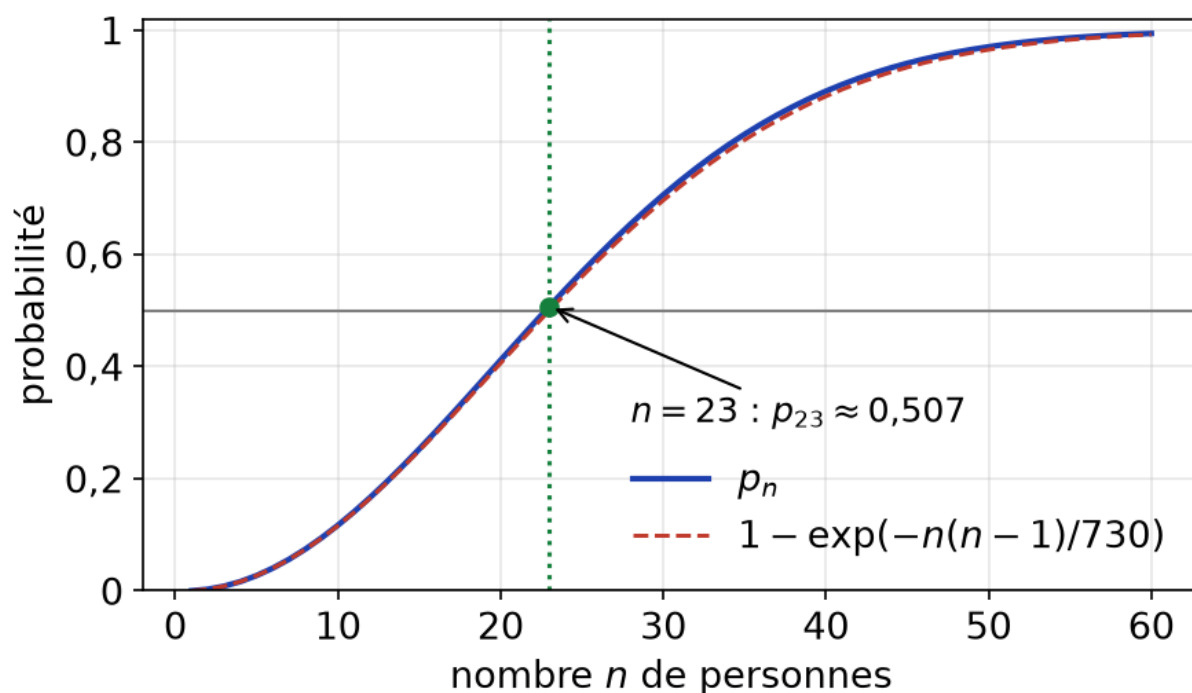
1. L'univers est $\Omega = \{1, \text{fév.}4.., 365\}^n$, muni de l'équiprobabilité : c'est la traduction de dates uniformes et indépendantes. Les issues à dates distinctes sont les arrangements, au nombre de $365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1)$. Ainsi,

$$q_n = \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1)}{365^n} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{365 - k}{365} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right).$$

2. La fonction exponentielle est convexe, donc sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0 : $e^{-x} \geq 1 - x$. Plus précisément, $g(x) = e^{-x} - 1 + x$ vérifie $g'(x) = 1 - e^{-x}$, qui est du signe de x . Donc g admet un minimum strict en 0, où elle vaut 0. Ensuite, les facteurs $1 - k/365$ sont strictement positifs, car $k \leq 364$. On peut donc multiplier les inégalités. Le facteur $k = 1$ donne une inégalité stricte. Par conséquent,

$$q_n < \prod_{k=0}^{n-1} e^{-k/365} = \exp\left(-\frac{1}{365} \sum_{k=0}^{n-1} k\right) = \exp\left(-\frac{n(n-1)}{730}\right).$$

3. Pour $n = 23$, on a $\frac{23 \times 22}{730} = \frac{253}{365} \approx 0,6931507$. Ce nombre est strictement supérieur à $\ln 2 \approx 0,6931472$. Par conséquent, $q_{23} < e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$. **Donc $p_{23} > 1/2$** : dans un groupe de 23 personnes, deux personnes ont plus d'une chance sur deux de partager leur anniversaire. La figure ci-dessous représente p_n .
4. Pour $n = 22$, on obtient $\frac{22 \times 21}{730} = \frac{231}{365} \approx 0,633 < \ln 2$. La majoration donne seulement $q_{22} < e^{-0,633} \approx 0,53$. **Elle ne permet donc pas de conclure.** En fait, un calcul direct donne $p_{22} \approx 0,476 < 1/2$.



Corrigé de l'exercice 12 : Mains de poker

1. Une main est une partie à 5 éléments d'un ensemble à 32 éléments. **Il y en a**

$$\binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{120} = 201\,376.$$

2. On choisit la hauteur du carré (8 choix), qui fixe ses quatre cartes. Ensuite, on choisit la cinquième carte parmi les 28 restantes. Il y a donc $8 \times 28 = 224$ carrés. Or $201\,376 = 224 \times 899$.

La probabilité vaut $1/899 \approx 0,0011$.

3. On choisit la hauteur du brelan (8), ses trois cartes ($\binom{4}{3} = 4$), puis la hauteur de la paire (7) et ses deux cartes ($\binom{4}{2} = 6$). On obtient $8 \times 4 \times 7 \times 6 = 1\,344 = 6 \times 224$. **La probabilité vaut** $6/899 \approx 0,0067$.

4. On choisit la couleur (4), puis 5 cartes parmi les 8 de cette couleur ($\binom{8}{5} = 56$). Cela donne 224 mains. **La probabilité vaut** $1/899$, exactement comme le carré.

5. On choisit la hauteur de la paire (8) et ses deux cartes (6). Ensuite, on choisit trois autres hauteurs parmi 7 ($\binom{7}{3} = 35$), puis une carte de chacune ($4^3 = 64$). On obtient $8 \times 6 \times 35 \times 64 = 107\,520 = 480 \times 224$. **La probabilité vaut** $480/899 \approx 0,534$.

Point de méthode : décrivez chaque main par une suite de choix successifs, sans ordre entre les cartes d'un même choix ; chaque main doit être obtenue une et une seule fois.

Corrigé de l'exercice 13 : L'urne de Pólya

1. Au départ, l'urne contient une boule de chaque couleur, donc $P(B_1) = 1/2$. Ensuite, $(B_1, \overline{B_1})$ est un système complet. Après une blanche, l'urne contient 2 blanches et 1 noire ; après une noire, 1 blanche et 2 noires. Par la formule des probabilités totales,

$$P(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $P(B_1) = P(B_2) = 1/2$.

2. D'après la formule de Bayes, $P(B_1 | B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{1/2 \times 2/3}{1/2}$. On obtient $P(B_1 | B_2) = 2/3$.

3. Si les $k-1$ premiers tirages sont blancs, l'urne contient k blanches et 1 noire. Donc $P(B_k | B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}) = \frac{k}{k+1}$. La formule des probabilités composées donne alors un produit télescopique :

$$P(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

4. Les événements $C_n = B_1 \cap \dots \cap B_n$ forment une suite décroissante, dont l'intersection est « ne tirer que des blanches ». Par continuité décroissante, **cette probabilité vaut** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

5. Fixons une suite de n couleurs comportant k blanches. Au j -ième tirage, l'urne contient $j+1$ boules. Donc les dénominateurs successifs sont $2, 3, \dots, n+1$. Ensuite, lors de la i -ième blanche tirée, il y a i blanches dans l'urne : les numérateurs correspondants sont $1, 2, \dots, k$. De même, les noires fournissent $1, 2, \dots, n-k$. La probabilité de la suite vaut donc $\frac{k! (n-k)!}{(n+1)!}$, quel que soit l'ordre. Il y a $\binom{n}{k}$ telles suites. **Ainsi, la probabilité d'obtenir exactement k blanches vaut $\frac{1}{n+1}$, pour tout k entre 0 et n .**

Corrigé de l'exercice 14 : Test de dépistage

1. Le couple $(M, \overline{M})$ est un système complet. Par la formule des probabilités totales,

$$P(T) = 0,01 \times 0,99 + 0,99 \times 0,02 = 0,0099 + 0,0198 = 0,0297.$$

2. Par la formule de Bayes, $P(M | T) = \frac{0,0099}{0,0297} = \frac{1}{3}$. **Une personne positive n'est malade qu'avec probabilité $1/3$.** En effet, les faux positifs, issus d'une population saine très nombreuse, sont deux fois plus nombreux que les vrais positifs.

3. On a $P(\overline{T}) = 1 - 0,0297 = 0,9703$ et $P(\overline{M} \cap \overline{T}) = 0,99 \times 0,98 = 0,9702$. **Donc** $P(\overline{M} | \overline{T}) = 0,9702/0,9703 \approx 0,9999$: un test négatif est très rassurant.

4. Notons T_2 le second test positif. Par l'indépendance conditionnelle supposée, $P(T \cap T_2 | M) = 0,99^2$ et $P(T \cap T_2 | \overline{M}) = 0,02^2$. Par Bayes,

$$P(M | T \cap T_2) = \frac{0,01 \times 0,99^2}{0,01 \times 0,99^2 + 0,99 \times 0,02^2} = \frac{0,009801}{0,010197} = \frac{99}{103}.$$

La probabilité d'être malade passe à $99/103 \approx 0,961$.

Point de méthode : on retrouve ce résultat en appliquant Bayes une seconde fois, avec la nouvelle probabilité a priori $1/3$: $\frac{(1/3) \times 0,99}{(1/3) \times 0,99 + (2/3) \times 0,02} = \frac{99}{103}$.

Corrigé de l'exercice 15 : Urnes choisies au hasard

1. Notons B : « la boule est blanche ». Le système (U_1, U_2, U_3) est complet, avec $P(U_k) = 1/3$ et $P(B | U_k) = k/4$. Par les probabilités totales,

$$P(B) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{6}{4} = \frac{1}{2}.$$

2. Par la formule de Bayes, $P(U_k|B) = \frac{(1/3)(k/4)}{1/2} = \frac{k}{6}$. On obtient $1/6$, $1/3$ et $1/2$ pour U_1 , U_2 , U_3 .
3. Sachant U_k , les deux tirages se font avec remise dans la même urne, donc $P(B_1 \cap B_2|U_k) = (k/4)^2$. Par les probabilités totales,
- $$P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 + 4 + 9}{16} = \frac{14}{48} = \frac{7}{24}.$$
4. Par symétrie, $P(B_2) = P(B_1) = 1/2$, donc $P(B_1)P(B_2) = 1/4 = 6/24$. Comme $7/24 \neq 6/24$, **les événements ne sont pas indépendants**. En effet, une première boule blanche rend plus probable l'urne U_3 , donc une seconde blanche :
- $$P(B_2|B_1) = 7/12 > 1/2. \text{ L'indépendance n'a lieu que conditionnellement à l'urne choisie.}$$

Corrigé de l'exercice 16 : Œufs et probabilités totales

1. Les nombres $e^{-\lambda} \lambda^n / n!$ sont positifs et, par la série exponentielle,
- $$\sum_{n \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1. \text{ Les } E_n, \text{ deux à deux incompatibles, forment donc un système complet dénombrable (à un événement négligeable près, ce qui ne change aucun calcul).}$$
2. Par la formule des probabilités totales, avec $P(F_0|E_n) = (1-p)^n$:
- $$P(F_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} (1-p)^n = e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}.$$
3. Seuls les $n \geq k$ contribuent. En posant $n = k + m$:
- $$P(F_k) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!}.$$
- Donc** $P(F_k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$: on retrouve la même forme, avec le paramètre λp .
4. Par la formule de Bayes,

$$P(E_n | F_0) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n (1-p)^n / n!}{e^{-\lambda} p} = e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!}.$$

Sachant qu'aucun œuf n'a éclos, le nombre d'œufs suit la même forme de loi, de paramètre $\lambda(1-p)$.

Corrigé de l'exercice 17 : Indépendance deux à deux

1. L'univers est $\{1, \dots, 6\}^2$, avec l'équiprobabilité sur ses 36 issues. On a $P(A) = P(B) = 18/36 = 1/2$. Ensuite, la somme est paire si et seulement si les deux dés ont la même parité, soit $9 + 9 = 18$ issues. Enfin, $D = \{(1,6), (2,5), \dots, (6,1)\}$ a 6 issues. **Donc** $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$ **et** $P(D) = 1/6$.
2. On a $A \cap B =$ « deux pairs », de probabilité $9/36 = 1/4$. De plus, $A \cap C =$ « premier pair et même parité » = $A \cap B$, et de même $B \cap C = A \cap B$. Chaque intersection a donc pour probabilité $1/4 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$. **Les trois événements sont deux à deux indépendants.**
3. On a $A \cap B \cap C = A \cap B$, de probabilité $1/4$. Or $P(A)P(B)P(C) = 1/8$. **Ils ne sont donc pas mutuellement indépendants.** La figure ci-dessous montre les trois événements sur la grille des 36 issues.
4. L'événement $A \cap D$ contient $(2,5), (4,3), (6,1)$, donc $P(A \cap D) = 3/36 = 1/12 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$. **Ainsi, A et D sont indépendants.** En revanche, 7 est impair, donc $C \cap D = \emptyset$. Comme $P(C)P(D) = 1/12 \neq 0$, **C et D ne sont pas indépendants** : ils sont incompatibles.

6	B	ABC	B	ABC	B	ABC
5	C	A	C	A	C	A
4	B	ABC	B	ABC	B	ABC
3	C	A	C	A	C	A
2	B	ABC	B	ABC	B	ABC
1	C	A	C	A	C	A
	1	2	3	4	5	6

second dé

premier dé

violet : $A \cap B = A \cap B \cap C$ (9 issues) ; orange : C seul

Corrigé de l'exercice 18 : Complémentaires et fiabilité

1. Soit $J \subset \{1, \dots, n\}$. Si $1 \notin J$, la formule du produit est celle de l'hypothèse. Sinon, écrivons

$$J = \{1\} \cup J' \text{ et } C = \bigcap_{j \in J'} A_j \text{ (avec } C = \Omega \text{ si } J' \text{ est vide). Alors}$$

$$P(\overline{A_1} \cap C) = P(C) - P(A_1 \cap C) = \prod_{j \in J'} P(A_j) - P(A_1) \prod_{j \in J'} P(A_j) = P(\overline{A_1}) \prod_{j \in J'} P(A_j).$$

La famille $\overline{A_1}, A_2, \dots, A_n$ est donc mutuellement indépendante.

2. La propriété ne dépend pas de l'ordre des événements. On remplace donc successivement A_1 , puis A_2 , etc., par son complémentaire, en appliquant chaque fois la question 1. Ainsi, les $\overline{A_i}$ sont mutuellement indépendants. Par conséquent,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i)).$$

3. La fiabilité vaut $1 - 0,1^n$. On veut $0,1^n \leq 0,001 = 0,1^3$, soit $n \geq 3$. **Il faut au minimum 3 composants.**
4. Par indépendance, la fiabilité vaut $0,99^{10} = e^{10 \ln 0,99}$. Or $10 \ln 0,99 \approx -0,10050$. **La fiabilité vaut environ 0,904.**

Corrigé de l'exercice 19 : Indépendance sur un univers équiprobable

1. Notons $a = \text{card}(A)$, $b = \text{card}(B)$, $c = \text{card}(A \cap B)$. L'indépendance s'écrit $\frac{c}{p} = \frac{a}{p} \cdot \frac{b}{p}$, soit $ab = pc$. Donc le nombre premier p divise ab . D'après le lemme d'Euclide, p divise a ou b . Or $0 \leq a, b \leq p$. Ainsi, $a \in \{0, p\}$ ou $b \in \{0, p\}$. **Donc A ou B vaut $\emptyset$ ou Ω .**
2. Les multiples de d dans $\{1, \dots, n\}$ sont $d, 2d, \dots, (n/d)d$. Ils sont au nombre de n/d . **Donc $P(M_d) = 1/d$.**
3. Un entier est multiple de a et de b si et seulement s'il est multiple de $m = \text{ppcm}(a, b)$. Or m divise n , car n est un multiple commun de a et b . Donc $M_a \cap M_b = M_m$, et $P(M_a \cap M_b) = 1/m$. L'indépendance équivaut à $m = ab$. Enfin, $\text{pgcd}(a, b) \times \text{ppcm}(a, b) = ab$. **Ainsi, M_a et M_b sont indépendants si et seulement si $\text{pgcd}(a, b) = 1$.**
4. Pour $n = 12$, $M_4 = \{4, 8, 12\}$ et $M_3 = \{3, 6, 9, 12\}$ sont indépendants, de probabilités $1/4$ et $1/3$: leur intersection $\{12\}$ a pour probabilité $1/12$. En revanche, M_2 et M_4 ne le sont pas : $P(M_2 \cap M_4) = P(M_4) = 1/4 \neq 1/8$.

Corrigé de l'exercice 20 : Indicatrice d'Euler par les probabilités

1. Soit $J \subset \{1, \dots, r\}$ non vide et $d_J = \prod_{i \in J} p_i$. Les p_i sont des nombres premiers distincts, donc deux à deux premiers entre eux. Par conséquent, un entier est divisible par tous les p_i , $i \in J$, si et seulement s'il est divisible par leur produit d_J . De plus, d_J divise n . D'après l'exercice 19, il vient

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = P(M_{d_J}) = \frac{1}{d_J} = \prod_{i \in J} \frac{1}{p_i} = \prod_{i \in J} P(A_i).$$

Les A_i sont donc mutuellement indépendants.

2. Un entier k est premier avec n si et seulement s'il n'a aucun facteur premier commun avec n . Autrement dit, aucun p_i ne le divise. L'événement cherché est donc $\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_r}$. Les complémentaires d'événements mutuellement indépendants sont mutuellement indépendants. Ainsi,

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

On obtient la formule annoncée en multipliant par n .

3. On a $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Donc $\varphi(360) = 360 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$. **On trouve $\varphi(360) = 96$.**
4. Si m et n sont premiers entre eux, les facteurs premiers de mn sont ceux de m et ceux de n , sans répétition. Le produit se scinde donc en deux :

$$\varphi(mn) = m \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \times n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Corrigé de l'exercice 21 : Problème des rencontres

1. Une permutation qui fixe $i_1, \dots, i_k$ est déterminée par sa restriction aux $n - k$ autres éléments, qui est une permutation quelconque de ceux-ci. Il y en a $(n-k)!$. **Donc**

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

2. Il y a $\binom{n}{k}$ choix de $i_1 < \dots < i_k$. La formule du crible donne donc

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!}.$$

L'absence de point fixe est l'événement contraire. Par conséquent,

$$d_n = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

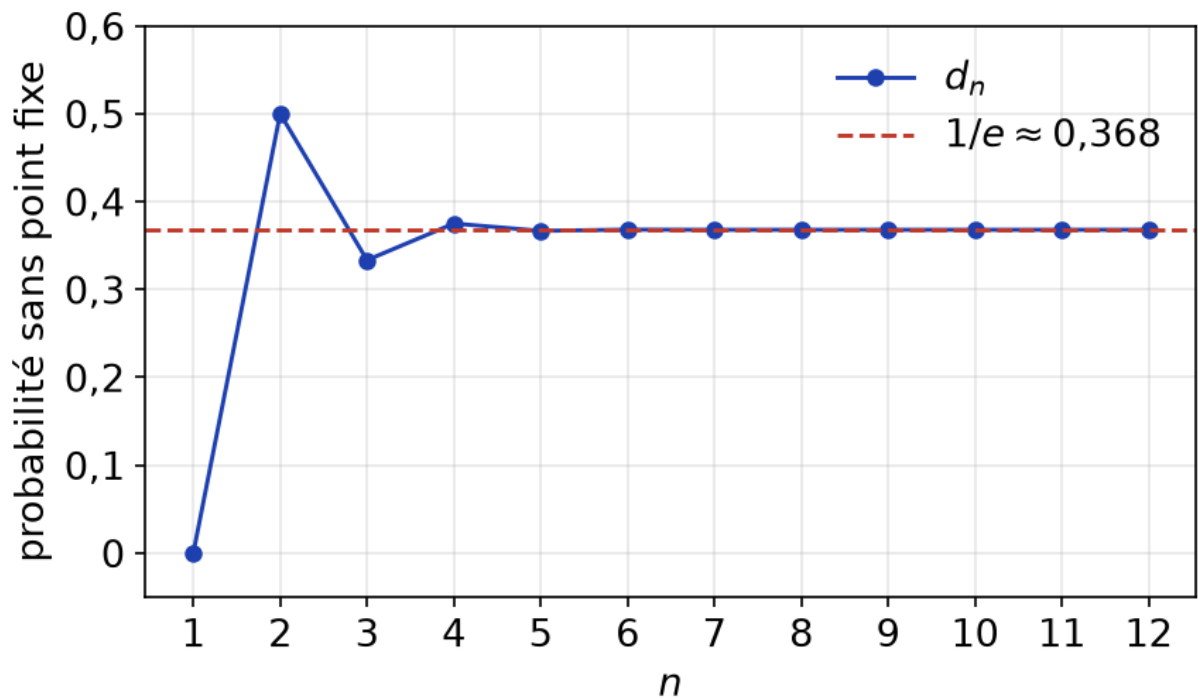
3. On reconnaît la somme partielle de la série exponentielle en -1 . **Donc** $d_n \rightarrow e^{-1} \approx 0,368$. La convergence est très rapide, comme le montre la figure ci-dessous. Ensuite,

$D_4 = 4! d_4 = 24\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = 12 - 4 + 1$. **On obtient** $D_4 = 9$. En écrivant σ sous la forme $\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)$, ce sont : 2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312, 4321.

4. On choisit d'abord l'ensemble des m points fixes, soit $\binom{n}{m}$ choix. Ensuite, la restriction de σ aux $n - m$ autres éléments doit être sans point fixe : il y a $(n-m)! d_{n-m}$ possibilités. La probabilité vaut donc

$$\binom{n}{m} \frac{(n-m)! d_{n-m}}{n!} = \frac{d_{n-m}}{m!}.$$

Elle tend vers $\frac{e^{-1}}{m!}$ **quand** $n \rightarrow +\infty$.



Corrigé de l'exercice 22 : Problème : lemme de Borel-Cantelli

- Chaque $U_k = \bigcup_{n \geq k} A_n$ est une réunion dénombrable d'événements, donc un événement.
 Puis $L = \bigcap_k U_k$ en est une intersection dénombrable. De plus, $\omega \in L$ signifie que, pour tout k , il existe $n \geq k$ avec $\omega \in A_n$. **Autrement dit, ω appartient à une infinité de A_n .**
- La suite (U_k) est décroissante, d'intersection L . Par l'inégalité de Boole,

$$P(U_k) \leq \sum_{n \geq k} P(A_n).$$
 Or c'est le reste d'une série convergente, donc il tend vers 0. Par continuité décroissante, $P(L) = \lim P(U_k) = 0$.
- Les $\overline{A_n}$ sont mutuellement indépendants, comme complémentaires d'événements indépendants. Avec l'inégalité $1 - x \leq e^{-x}$, on obtient

$$P\left(\bigcap_{n=k}^m \overline{A_n}\right) = \prod_{n=k}^m (1 - P(A_n)) \leq \exp\left(-\sum_{n=k}^m P(A_n)\right).$$

Comme la série diverge, le majorant tend vers 0 quand $m \rightarrow +\infty$. Or la suite

$\left(\bigcap_{n=k}^m \overline{A_n} \right)_m$ décroît vers $\bigcap_{n \geq k} \overline{A_n}$. Par continuité décroissante, cet événement est

négligeable. Enfin, $\overline{L} = \bigcup_k \bigcap_{n \geq k} \overline{A_n}$ est une réunion dénombrable d'événements

négligeables. **Donc** $P(\overline{L}) = 0$ **et** $P(L) = 1$.

4. Si $P(A_n) = 1/n$, la série harmonique diverge. **Presque sûrement, une infinité de A_n sont réalisés.** Si $P(A_n) = 1/n^2$, la série converge. **Presque sûrement, seul un nombre fini de A_n sont réalisés**, et cette conclusion ne demande pas l'indépendance.

5. Découpons les lancers en blocs disjoints de longueur r . Soit E_j l'événement « les lancers $(j-1)r + 1$ à $j r$ donnent tous pile ». Chaque E_j est une intersection de r événements « pile au lancer n », et les blocs utilisent des lancers distincts. Les E_j sont donc mutuellement indépendants, de probabilité 2^{-r} . La série $\sum 2^{-r}$ diverge. Par la question 3, une infinité de E_j sont réalisés presque sûrement. Chacun fournit une série de r piles consécutifs, à des positions différentes. Enfin, notons H_r cet événement presque sûr. **L'intersection dénombrable $\bigcap_{r \geq 1} H_r$ est presque sûre**, d'après l'exercice 7.

Point de méthode : le premier lemme de Borel-Cantelli utilise seulement la sous-additivité ; le second exige l'indépendance, que l'on exploite par le produit des complémentaires et l'inégalité $1 - x \leq e^{-x}$.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [espaces probabilisés, cours de maths en L2](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L2 sur espaces probabilisés](#)
- Chapitre précédent : [Différentiabilité, formule de Taylor et extrema](#)
- Chapitre suivant : [Variables aléatoires discrètes](#)

- Le même thème en maths spé : [espaces probabilisés, exercices de maths spé](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)