

Espaces préhilbertiens réels

Exercice 1 : Produits scalaires sur $\mathbb{R}^2$

Pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$, on pose

$$\varphi(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3x_2 y_2, \quad \psi(x, y) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + x_2 y_2.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que ψ n'est pas un produit scalaire.
3. On note $\|\cdot\|_\varphi$ la norme associée à φ . Calculer $\|u\|_\varphi$ pour $u = (1, -1)$.
4. Déterminer les vecteurs φ -orthogonaux à $(1, 0)$, puis une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ pour φ .

Exercice 2 : Un produit scalaire intégral sur les polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sur $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $\langle 1, X \rangle$, $\|1\|$ et $\|X\|$. En déduire l'angle entre les polynômes 1 et X .

3. Déterminer le réel α tel que $X - \alpha$ soit orthogonal à 1 .

4. On pose $\beta(P, Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t) dt$. Montrer que β n'est pas un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, mais que c'en est un sur le sous-espace $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}$.

Exercice 3 : Produit scalaire canonique sur les matrices

Soit $n \geq 2$. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$. On note $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ les sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques.

1. Montrer que $\text{tr}(A^T B) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} b_{ij}$, puis que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

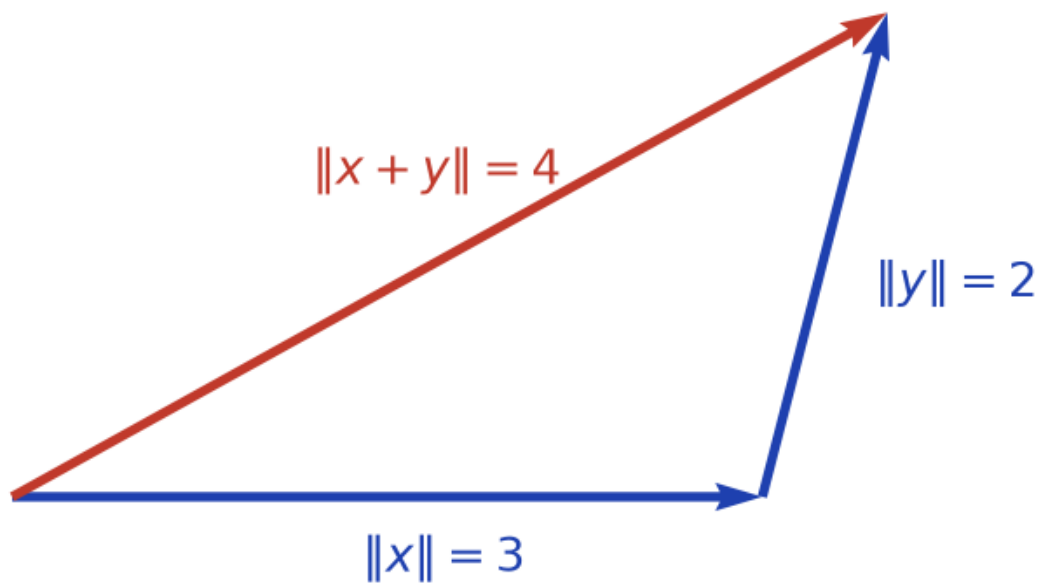
2. Pour $n = 2$, calculer $\langle A, B \rangle$ et $|A|$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que toute matrice symétrique est orthogonale à toute matrice antisymétrique.

4. En utilisant les dimensions $\dim \mathcal{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}$, montrer que $\mathcal{A}_n = \mathcal{S}_n^\perp$.

Exercice 4 : Identités de polarisation et du parallélogramme

Dans un espace préhilbertien réel E , on considère deux vecteurs x et y tels que $|x| = 3$, $|y| = 2$ et $|x + y| = 4$, comme sur la figure ci-dessous.



1. Calculer $\langle x, y \rangle$.
2. Calculer $\|x - y\|$, puis vérifier l'identité du parallélogramme.
3. Calculer $\|2x - 3y\|$.
4. Déterminer le cosinus de l'angle entre x et y .
5. Sur $\mathbb{R}^2$, on pose $N(x) = |x_1| + |x_2|$. Montrer que la norme N ne provient d'aucun produit scalaire.

Exercice 5 : Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

1. Montrer que pour tous réels $a_1, \dots, a_n$, on a $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n a_k^2$. Préciser le cas d'égalité.
2. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs tels que $\sum_{k=1}^n a_k = 1$. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \geq n^2$, et préciser le cas d'égalité.
3. Montrer que $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$.

Exercice 6 : Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales

1. Soit f continue et strictement positive sur $[a, b]$, avec $a < b$. Montrer que $\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right) \geq (b-a)^2$, et étudier le cas d'égalité.
2. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x)^2 \leq x \int_0^1 f'(t)^2 dt$.
3. En déduire que $\int_0^1 f(x)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t)^2 dt$.
4. Vérifier cette inégalité pour $f(x) = x$ et pour $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Exercice 7 : Extremums sous contrainte par Cauchy-Schwarz

On travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.

1. Déterminer le maximum et le minimum de $x + 2y + 2z$ lorsque $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ainsi que les points où ils sont atteints.
2. Déterminer le minimum de $x^2 + y^2 + z^2$ lorsque $x + 2y + 2z = 6$, et le point où il est atteint.
3. Interpréter le résultat de la question 2 comme une distance.

Exercice 8 : Orthogonal d'une partie

Soit E un espace préhilbertien réel.

1. Soient $A \subset B$ deux parties de E . Montrer que $B^\perp \subset A^\perp$.
2. Montrer que $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$ et que $A \subset (A^\perp)^\perp$.
3. Dans $\mathbb{R}^4$ canonique, on pose $a = (1,1,1,1)$, $b = (1,-1,0,0)$ et $F = \text{Vect}(a,b)$. Déterminer une base de $F^\perp$.
4. Vérifier sur cet exemple que $\dim F + \dim F^\perp = 4$.

Exercice 9 : Famille orthogonale de fonctions sinus

On munit $E = \mathcal{C}([0,\pi], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(t)g(t) \, dt$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_k(t) = \sin(kt)$.

1. Montrer que $\langle s_k, s_l \rangle = 0$ pour $k \neq l$, et calculer $|s_k|$.

2. En déduire que pour tout n , la famille $(s_1, \dots, s_n)$ est libre, et construire une famille orthonormée à partir d'elle.
3. Calculer $|s_1 + 2s_2 + 3s_3|^2$ sans calculer d'intégrale supplémentaire.

Exercice 10 : Un sous-espace sans supplémentaire orthogonal

On munit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$, et l'on pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E , distinct de E .
2. Soit $g \in F^\perp$. En considérant la fonction $f : t \rightarrow t g(t)$, montrer que $g = 0$.
3. En déduire que $F \oplus F^\perp \neq E$ et que $(F^\perp)^\perp \neq F$. Quelle hypothèse du théorème du supplémentaire orthogonal n'est pas satisfaite ?

Exercice 11 : Orthonormalisation de Gram-Schmidt dans $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$ canonique, on pose $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,0,1)$ et $v_3 = (0,1,1)$.

1. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à cette base.
3. Donner les coordonnées de v_3 dans la base orthonormée obtenue, et vérifier le résultat avec $|v_3|^2$.

Exercice 12 : Polynômes orthogonaux sur $[-1,1]$

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

1. Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ par le procédé de Gram-Schmidt.
2. En déduire le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ et la distance $d(X^2, \mathbb{R}_1[X])$.
3. Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 (t^2 - at - b)^2 dt$.

Exercice 13 : Coordonnées dans une base orthonormée

Dans $\mathbb{R}^3$ canonique, on pose $u_1 = \frac{1}{3}(1,2,2)$, $u_2 = \frac{1}{3}(2,1,-2)$ et $u_3 = \frac{1}{3}(2,-2,1)$.

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées de $x = (3,0,3)$ et de $y = (0,3,0)$ dans cette base.
3. Retrouver $|x|^2$ et $\langle x, y \rangle$ à partir des coordonnées.
4. Déterminer le projeté orthogonal de x sur $P = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et la distance de x à P .

Exercice 14 : Projection orthogonale sur un plan de $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$ canonique, on note P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et p la projection orthogonale

sur P .

1. Déterminer un vecteur normal n à P et exprimer $p(v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice M de P dans la base canonique. Vérifier que $M^2 = M$ et $M^T = M$.
3. Calculer le projeté de $v = (1, 2, 3)$ sur P et la distance de v à P .
4. Écrire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à P .

Exercice 15 : Projeté orthogonal dans $\mathbb{R}^4$ par le système normal

Dans $\mathbb{R}^4$ canonique, on pose $a = (1, 0, 1, 0)$, $b = (1, 1, 1, 1)$, $F = \text{Vect}(a, b)$ et $x = (1, 2, 3, 4)$.

1. Justifier que (a, b) est une base de F et écrire le système normal vérifié par les coordonnées (λ, μ) de $p_F(x)$ dans cette base.
2. Calculer $p_F(x)$ et vérifier que $x - p_F(x)$ est orthogonal à a et à b .
3. En déduire $d(x, F)$, et vérifier la relation de Pythagore entre $\|x\|$, $\|p_F(x)\|$ et $d(x, F)$.

Exercice 16 : Matrices de trace nulle et matrices symétriques

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$. On note H l'ensemble des matrices de trace nulle. On admet le résultat de l'exercice 3 : $\mathcal{A}_n = \mathcal{S}_n^\perp$.

1. Montrer que $H = \{I_n\}^\perp$. Quelle est la dimension de H ?

2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer le projeté orthogonal de A sur H et montrer que $d(A, H) = \frac{|\operatorname{tr} A|}{\sqrt{n}}$.
3. En déduire que $(\operatorname{tr} A)^2 \leq n \operatorname{tr}(A^T A)$, avec égalité si et seulement si A est une matrice scalaire.
4. Montrer que le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}_n$ est $\frac{1}{2}(A + A^T)$.
5. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, calculer $d(A, \mathcal{S}_2)$ et $d(A, H)$.

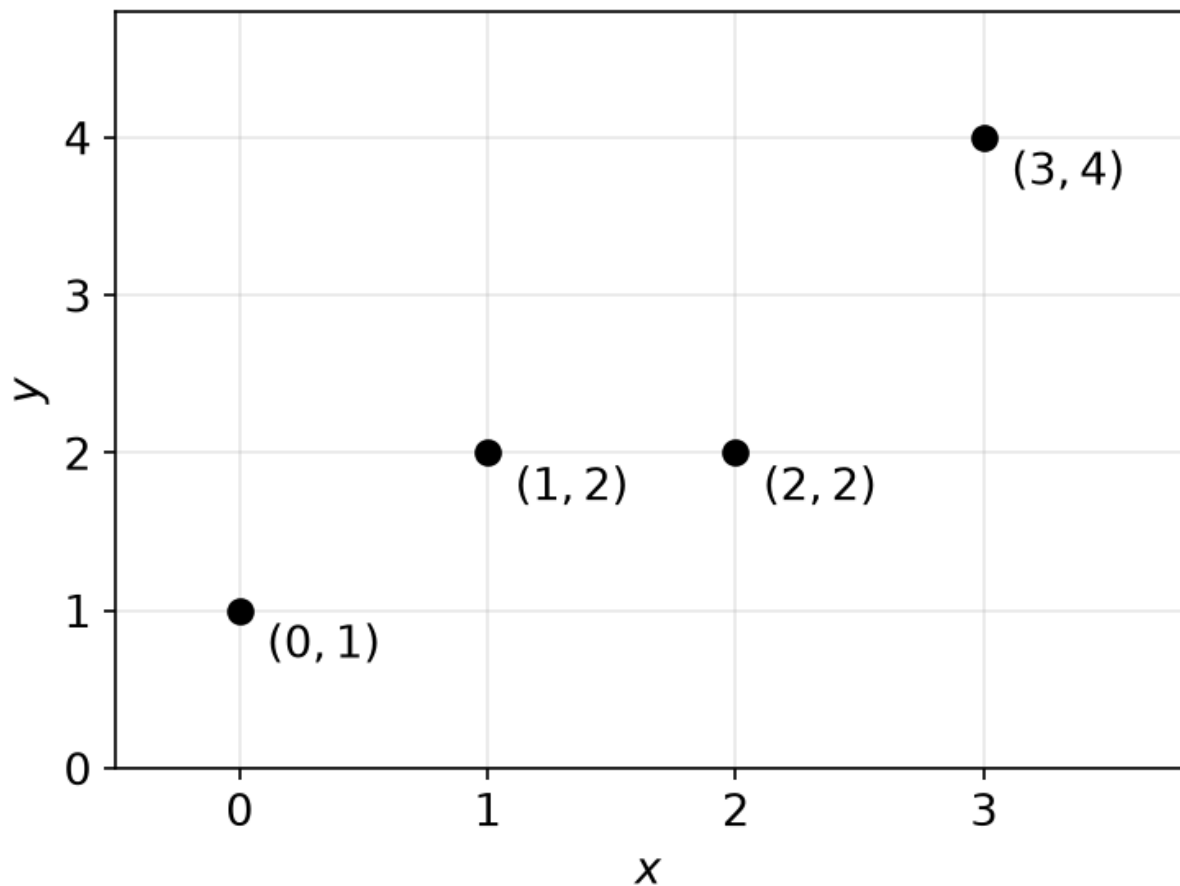
Exercice 17 : Meilleure approximation affine de x^3 sur $[0,1]$

On munit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$. On note h la fonction $t \rightarrow t^3$.

1. Déterminer la constante c qui minimise $\int_0^1 (t^3 - c)^2 dt$, ainsi que ce minimum.
2. Déterminer le couple (a, b) qui minimise $\int_0^1 (t^3 - at - b)^2 dt$.
3. Calculer ce minimum et le comparer à celui de la question 1.

Exercice 18 : Droite des moindres carrés

On a relevé les quatre points $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$ et $(3,4)$, représentés ci-dessous. On cherche la droite d'équation $y = ax + b$ qui minimise $S(a, b) = \sum_{i=1}^4 (y_i - ax_i - b)^2$.



1. Écrire $S(a,b)$ comme le carré d'une distance dans $\mathbb{R}^4$ à un sous-espace F de dimension 2.
2. Écrire le système normal et le résoudre.
3. Calculer les résidus $r_i = y_i - ax_i - b$ et la valeur minimale de S .
4. Vérifier que le vecteur des résidus est orthogonal à F .

Exercice 19 : Caractérisation des projecteurs orthogonaux

Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E , c'est-à-dire un endomorphisme tel que $p \circ p = p$. On rappelle que $E = \text{Im } p \oplus \text{ker } p$.

1. On suppose que p est une projection orthogonale. Montrer que $|p(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in E$.
2. Réciproquement, on suppose que $|p(x)| \leq |x|$ pour tout x . Soient $a \in \text{Im } p$ et $b \in \ker p$. Montrer que $|a|^2 \leq |a + tb|^2$ pour tout réel t , puis que $\langle a, b \rangle = 0$.
3. En déduire que p est la projection orthogonale sur $\text{Im } p$.
4. Dans $\mathbb{R}^2$ canonique, soit q la projection sur $\text{Vect}((1,0))$ parallèlement à $\text{Vect}((1,1))$. Expliciter $q(x,y)$ et trouver un vecteur v tel que $|q(v)| > |v|$.

Exercice 20 : Matrice de Gram et distance à une droite

Soit E un espace préhilbertien réel et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E . Sa matrice de Gram est $G = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p}$.

1. Pour $A = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^T \in \mathbb{R}^p$, montrer que $A^T G A = \left\| \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j \right\|^2$.
2. Montrer que G est inversible si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.
3. Soit $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$, de dimension m , et $(e_1, \dots, e_m)$ une base orthonormée de F . On note $A \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ la matrice dont la colonne j contient les coordonnées de x_j dans cette base. Montrer que $G = A^T A$, puis que $\det G \geq 0$.
4. Pour $p = 2$, écrire $\det G$ et retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec son cas d'égalité.
5. Soit $u \neq 0$ et $D = \text{Vect}(u)$. Montrer que $d(x, D)^2 = \frac{\det G(u, x)}{|u|^2}$, où $G(u, x)$ est la matrice de Gram de (u, x) . Application : $u = (1,1,1)$ et $x = (1,2,3)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 21 : Problème : inégalité de Bessel et somme des inverses des carrés

On note $E = \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ et l'on pose $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $c_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $c_k(t) = \cos(kt)$ et $s_k(t) = \sin(kt)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $T_n = \text{Vect}(c_0, c_1, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n)$.

Partie A : une famille orthonormée.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. Montrer que la famille $(c_0, c_1, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n)$ est orthonormée. En déduire $\dim T_n$.

Partie B : projection de la fonction identité. On note f la fonction $t \rightarrow t$.

1. Calculer $\langle f, c_k \rangle$ pour $0 \leq k \leq n$, puis montrer que $\langle f, s_k \rangle = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$ pour $k \geq 1$.
2. En déduire le projeté orthogonal $p_n(f)$ de f sur T_n .
3. Calculer $|f|^2$, puis exprimer $d(f, T_n)^2$ en fonction de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

Partie C : conséquence sur une série.

1. Établir l'inégalité de Bessel $\sum_{k=1}^n \langle f, s_k \rangle^2 \leq |f|^2$ pour cette fonction.
2. En déduire que la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge et que sa somme est inférieure ou égale à $\frac{\pi^2}{6}$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [espaces préhilbertiens réels, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Espaces vectoriels de dimension finie](#), [Applications linéaires et théorème du rang](#)
- Chapitre précédent : [Espérance, variance et inégalités probabilistes](#)
- Chapitre suivant : [Fonctions de deux variables](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)