

Espaces préhilbertiens réels

Corrigé de l'exercice 1 : Produits scalaires sur $\mathbb{R}^2$

1. Posons $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. En notant X et Y les colonnes de x et y , on a $\varphi(x,y) = X^T M Y$. Cette écriture montre que φ est bilinéaire. De plus, M est symétrique, donc $\varphi(y,x) = \varphi(x,y)$. Ensuite, on complète le carré :

$$\varphi(x,x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2 \geq 0.$$

Enfin, si $\varphi(x,x) = 0$, les deux carrés sont nuls : $x_2 = 0$, puis $x_1 = 0$. **Donc φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.**

2. On a $\psi(x,x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$. Pour $x = (1,-1)$, on obtient $1 - 4 + 1 = -2 < 0$. **Ainsi, ψ n'est pas positive, donc ce n'est pas un produit scalaire.**

3. Avec l'écriture de la question 1, $\varphi(u,u) = (1-1)^2 + 2 \times 1 = 2$. **Donc $\|u\|_\varphi = \sqrt{2}$.**

4. On calcule $\varphi((1,0), y) = y_1 + y_2$. Les vecteurs orthogonaux à $(1,0)$ forment donc la droite d'équation $y_1 + y_2 = 0$, c'est-à-dire $\text{Vect}((1,-1))$. Par ailleurs, $\varphi((1,0), (1,0)) = 1$, donc $(1,0)$ est unitaire. Enfin, $u = (1,-1)$ a pour norme $\sqrt{2}$. **Une base orthonormée pour φ est $\left((1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\right)$.**

Point de méthode : la forme canonique $(x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2$ donne à la fois la positivité et le caractère défini ; c'est la réduction de Gauss.

Corrigé de l'exercice 2 : Un produit scalaire intégral sur les polynômes

1. L'intégrale existe, car PQ est continue sur $[0,1]$. La linéarité de l'intégrale donne la linéarité en P , et la symétrie vient de $PQ = QP$. Ensuite, $\langle P, P \rangle = \int_0^1 P^2 \geq 0$. Supposons maintenant $\int_0^1 P^2 = 0$. La fonction $t \rightarrow P(t)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,1]$: elle est donc nulle. Par conséquent, P s'annule sur tout $[0,1]$. Un polynôme ayant une infinité de racines est nul. **Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.**

2. On trouve $\langle 1, X \rangle = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}$, puis $|1|^2 = 1$ et $|X|^2 = \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3}$. L'angle θ vérifie donc

$$\cos \theta = \frac{\langle 1, X \rangle}{|1| |X|} = \frac{1/2}{1/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc $|1| = 1$, $|X| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et l'angle vaut $\frac{\pi}{6}$.

3. On a $\langle X - a, 1 \rangle = \frac{1}{2} - a$. **Ce produit est nul si et seulement si $a = \frac{1}{2}$.** Autrement dit, $\frac{1}{2}$ est le projeté orthogonal de X sur les constantes, c'est-à-dire la moyenne de t sur $[0,1]$.
4. L'application β est bilinéaire, symétrique et positive, par les mêmes arguments. Cependant, $\beta(1,1) = 0$ alors que $1 \neq 0$. Donc β n'est pas définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Sur F , supposons $\beta(P,P) = \int_0^1 P'^2 = 0$. Comme ci-dessus, P' est nul sur $[0,1]$,

donc $P' = 0$. Ainsi, P est constant, égal à $P(0) = 0$. De plus, F est bien un sous-espace, noyau de la forme linéaire $P \rightarrow P(0)$. **Par conséquent, β est un produit scalaire sur F mais pas sur $\mathbb{R}_n[X]$.**

Corrigé de l'exercice 3 : Produit scalaire canonique sur les matrices

1. Par définition du produit matriciel, le coefficient (j,j) de $A^T B$ vaut

$$\sum_{i=1}^n (A^T)_{ji} b_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ij} . \text{ En sommant sur } j, \text{ on obtient}$$
$$\text{tr}(A^T B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} . \text{ Cette expression est bilinéaire et symétrique. De plus,}$$
$$\langle A, A \rangle = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0 , \text{ et cette somme de carrés est nulle seulement si tous les } a_{ij} \text{ sont}$$

nuls. **C'est donc un produit scalaire : le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$ écrit en tableau.**

2. On multiplie terme à terme : $\langle A, B \rangle = 1 \times 3 + 2 \times 1 + 0 \times 1 + (-1) \times 2 = 3$. Ensuite, $|A|^2 = 1 + 4 + 0 + 1 = 6$. **Donc $\langle A, B \rangle = 3$ et $|A| = \sqrt{6}$.**
3. Soient $S \in \mathcal{S}_n$ et $T \in \mathcal{A}_n$. D'abord, $\langle S, T \rangle = \text{tr}(S^T T) = \text{tr}(ST)$. Ensuite, une matrice et sa transposée ont la même trace :

$$\text{tr}(ST) = \text{tr}((ST)^T) = \text{tr}(T^T S^T) = \text{tr}(-TS) = -\text{tr}(TS) = -\text{tr}(ST) .$$

Donc $\text{tr}(ST) = 0$: toute matrice symétrique est orthogonale à toute matrice antisymétrique.

4. La question 3 donne $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{S}_n^\perp$. Or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc
- $$\dim \mathcal{S}_n^\perp = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \dim \mathcal{A}_n . \text{ Une inclusion entre deux espaces de même dimension finie est une égalité. Ainsi, } \mathcal{A}_n = \mathcal{S}_n^\perp .$$

Corrigé de l'exercice 4 : Identités de polarisation et du parallélogramme

1. La première identité de polarisation donne

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2) = \frac{1}{2}(16 - 9 - 4) .$$

Donc $\langle x, y \rangle = \frac{3}{2}$.

2. On développe : $|x - y|^2 = |x|^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2 = 9 - 3 + 4 = 10$. **Donc**
 $|x - y| = \sqrt{10}$. Ensuite, $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 16 + 10 = 26$, et
 $2|x|^2 + 2|y|^2 = 18 + 8 = 26$. L'identité du parallélogramme est bien vérifiée.
3. Par bilinéarité, $|2x - 3y|^2 = 4|x|^2 - 12\langle x, y \rangle + 9|y|^2 = 36 - 18 + 36 = 54$. **Donc**
 $|2x - 3y| = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.
4. On a $\cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|} = \frac{3/2}{6}$. **Le cosinus vaut** $\frac{1}{4}$. C'est d'ailleurs l'angle qui a servi à tracer la figure de l'énoncé.
5. Si N provenait d'un produit scalaire, elle vérifierait l'identité du parallélogramme. Prenons
 $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$. Alors $N(x+y) = N(x-y) = 2$, d'où
 $N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 8$. Or $2N(x)^2 + 2N(y)^2 = 4$. **L'identité est fautive, donc**
 N ne provient d'aucun produit scalaire.

Corrigé de l'exercice 5 : Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$

1. Posons $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $u = (1, \dots, 1)$. Alors $\langle a, u \rangle = \sum a_k$, $|u| = \sqrt{n}$ et
 $|a|^2 = \sum a_k^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $|\sum a_k| \leq \sqrt{n} |a|$. En élevant au
carré, **on obtient** $(\sum a_k)^2 \leq n \sum a_k^2$. Il y a égalité si et seulement si a et u sont
colinéaires. **Autrement dit, l'égalité a lieu exactement quand tous les a_k sont égaux.**
2. Posons cette fois $v = (\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})$ et $w = (\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n}})$. Leur produit scalaire vaut
 $\sum 1 = n$. De plus, $|v|^2 = \sum a_k = 1$ et $|w|^2 = \sum \frac{1}{a_k}$. Par Cauchy-Schwarz,
 $n \leq 1 \times \sqrt{\sum \frac{1}{a_k}}$. **Donc** $\sum \frac{1}{a_k} \geq n^2$.

En cas d'égalité, $w = \lambda v$ (car $v \neq 0$), soit $\frac{1}{\sqrt{a_k}} = \lambda \sqrt{a_k}$, donc $a_k = \frac{1}{\lambda^2}$ pour tout k .
Avec $\sum a_k = 1$, on obtient $a_k = \frac{1}{n}$. Réciproquement, ce choix donne $\sum \frac{1}{a_k} = n^2$.
L'égalité a lieu si et seulement si tous les a_k valent $\frac{1}{n}$.

3. On applique la question 1 avec $a_k = \sqrt{k}$: $\left(\sum_{k=1}^n \sqrt{k}\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n k = n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$. En

prenant la racine carrée, **on obtient** $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$.

Corrigé de l'exercice 6 : Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales

1. On munit $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ du produit scalaire intégral. Comme $f > 0$ est continue, les fonctions $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ sont continues. Leur produit scalaire vaut $\int_a^b 1 = b - a$. Cauchy-Schwarz donne alors

$$(b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f} \right).$$

C'est l'inégalité demandée. En cas d'égalité, les deux fonctions sont colinéaires. Comme elles ne sont pas nulles, il existe λ tel que $\frac{1}{\sqrt{f}} = \lambda\sqrt{f}$, donc $f = \frac{1}{\lambda}$ est constante. Réciproquement, si $f = c > 0$, les deux membres valent $(b-a)^2$. **Il y a égalité si et seulement si f est constante.**

2. Soit $x \in]0, 1]$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f(0) = 0$, on a $f(x) = \int_0^x f'(t) \times 1 \, dt$. Cauchy-Schwarz, appliqué sur $[0, x]$, donne

$$f(x)^2 \leq \left(\int_0^x 1 \, dt \right) \left(\int_0^x f'(t)^2 \, dt \right) = x \int_0^x f'^2.$$

Ensuite, f'^2 est positive, donc $\int_0^x f'^2 \leq \int_0^1 f'^2$. Pour $x = 0$, l'inégalité s'écrit $0 \leq 0$.

Ainsi, $f(x)^2 \leq x \int_0^1 f'^2$ pour tout $x \in [0,1]$.

3. Intégrons cette inégalité entre 0 et 1, ce qui est permis par croissance de l'intégrale. Il vient

$$\int_0^1 f^2 \leq \left(\int_0^1 x \, dx \right) \int_0^1 f'^2. \text{ Donc } \int_0^1 f^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'^2.$$

4. Pour $f(x) = x$, on a $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2} \int_0^1 1 = \frac{1}{2}$: on a bien $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}$.

Pour $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, on a bien $f(0) = 0$. D'abord,

$$\int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \int_0^1 \frac{1 - \cos(\pi x)}{2} dx = \frac{1}{2}. \text{ Ensuite, } f'(x) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), \text{ et}$$

$$\int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \text{ de la même façon. Donc } \int_0^1 f'^2 = \frac{\pi^2}{8}. \text{ On vérifie}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\pi^2}{16} \approx 0,617.$$

Corrigé de l'exercice 7 : Extremums sous contrainte par Cauchy-Schwarz

- Posons $w = (1,2,2)$, de norme $\sqrt{1+4+4} = 3$, et $v = (x,y,z)$. La quantité étudiée est $\langle v, w \rangle$. Si $|v| = 1$, Cauchy-Schwarz donne $|\langle v, w \rangle| \leq 3$. L'égalité impose $v = \lambda w$. Alors $|v| = 3|\lambda| = 1$, donc $\lambda = \pm \frac{1}{3}$, et $\langle v, w \rangle = 9\lambda = \pm 3$. **Le maximum vaut 3, atteint seulement en $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$; le minimum vaut -3, atteint seulement en $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.**
- Si $\langle v, w \rangle = 6$, Cauchy-Schwarz donne $6 \leq 3|v|$, donc $|v|^2 \geq 4$. L'égalité impose de nouveau $v = \lambda w$, avec $9\lambda = 6$, soit $\lambda = \frac{2}{3}$. On vérifie que $v = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ satisfait la contrainte : $\frac{2}{3} + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = 6$. De plus, $|v|^2 = \frac{4+16+16}{9} = 4$. **Le minimum vaut 4, atteint seulement en $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.**

3. L'ensemble $\{v \mid \langle v, w \rangle = 6\}$ est un plan affine Π de vecteur normal w . Le minimum de $\|v\|$ sur Π est la distance de l'origine à Π . **Cette distance vaut $2 = \frac{6}{\|w\|}$, et le point le plus proche est le projeté orthogonal de 0 sur Π .**

Corrigé de l'exercice 8 : Orthogonal d'une partie

- Soit $x \in B^\perp$. Alors x est orthogonal à tout vecteur de B , en particulier à tout vecteur de A . **Donc $x \in A^\perp$, et $B^\perp \subset A^\perp$.**
- Comme $A \subset \text{Vect}(A)$, la question 1 donne $\text{Vect}(A)^\perp \subset A^\perp$. Réciproquement, soit $x \in A^\perp$ et $v = \sum_{i=1}^r \lambda_i a_i$ une combinaison linéaire d'éléments de A . Par linéarité, $\langle x, v \rangle = \sum \lambda_i \langle x, a_i \rangle = 0$. **Donc $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$.** Enfin, soit $a \in A$. Pour tout $x \in A^\perp$, on a $\langle a, x \rangle = 0$. **Donc $a \in (A^\perp)^\perp$, et $A \subset (A^\perp)^\perp$.**
- D'après la question 2, $F^\perp = \{a, b\}^\perp$. Un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ est dans $F^\perp$ si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_4 = -2x_1 - x_3 \end{cases}$$

Ainsi, $x = x_1(1, 1, 0, -2) + x_3(0, 0, 1, -1)$. **Une base de $F^\perp$ est $((1, 1, 0, -2), (0, 0, 1, -1))$.**
On vérifie par exemple $\langle (1, 1, 0, -2), a \rangle = 1 + 1 + 0 - 2 = 0$ et $\langle (1, 1, 0, -2), b \rangle = 1 - 1 = 0$.

- Les vecteurs a et b ne sont pas colinéaires, donc $\dim F = 2$. De même, les deux vecteurs trouvés ne sont pas colinéaires, donc $\dim F^\perp = 2$. **On a bien $\dim F + \dim F^\perp = 4$, conformément au théorème du supplémentaire orthogonal.**

Corrigé de l'exercice 9 : Famille orthogonale de fonctions sinus

1. Pour tout entier $m \neq 0$, on a $\int_0^\pi \cos(mt) \, dt = \left[\frac{\sin(mt)}{m} \right]_0^\pi = 0$. Soient $k \neq l$ deux entiers naturels non nuls. La formule de linéarisation donne

$$\sin(kt)\sin(lt) = \frac{1}{2}(\cos((k-l)t) - \cos((k+l)t)).$$

Or $k-l \neq 0$ et $k+l \neq 0$. **Donc** $\langle s_k, s_l \rangle = 0$. Pour $k = l$, on écrit $\sin^2(kt) = \frac{1 - \cos(2kt)}{2}$, d'où $|s_k|^2 = \frac{\pi}{2}$. **Ainsi**, $|s_k| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2. La famille $(s_1, \dots, s_n)$ est orthogonale et formée de vecteurs non nuls. **Elle est donc libre**. En divisant chaque vecteur par sa norme, **on obtient la famille orthonormée**

$$\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} s_k \right)_{1 \leq k \leq n}.$$

3. Les vecteurs s_1 , $2s_2$ et $3s_3$ sont deux à deux orthogonaux. Le théorème de Pythagore donne donc

$$|s_1 + 2s_2 + 3s_3|^2 = |s_1|^2 + 4|s_2|^2 + 9|s_3|^2 = 14 \times \frac{\pi}{2}.$$

Donc $|s_1 + 2s_2 + 3s_3|^2 = 7\pi$.

Corrigé de l'exercice 10 : Un sous-espace sans supplémentaire orthogonal

1. L'application $f \rightarrow f(0)$ est une forme linéaire sur E , et F est son noyau. **Donc F est un sous-espace vectoriel de E** . Par ailleurs, la fonction constante égale à 1 n'est pas dans F . **Ainsi**, $F \neq E$.

2. La fonction $f : t \rightarrow t g(t)$ est continue et vérifie $f(0) = 0$. Donc $f \in F$, et

$$\langle g, f \rangle = 0, \text{ c'est-à-dire } \int_0^1 t g(t)^2 \, dt = 0. \text{ Or } t \rightarrow t g(t)^2 \text{ est continue et positive sur } [0,1].$$

Comme son intégrale est nulle, elle est nulle. Pour $t \in]0,1]$, on en déduit $g(t)^2 = 0$, donc $g(t) = 0$. Enfin, par continuité, $g(0) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$. **Donc** $g = 0$, et $F^\perp = \{0\}$.

3. D'une part, $F \oplus F^\perp = F \neq E$. D'autre part, $(F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E \neq F$. **Le théorème du supplémentaire orthogonal ne s'applique pas, car F n'est pas de dimension finie** : il contient la famille libre infinie $(t \rightarrow t^k)_k \geq 1$.

Point de méthode : pour montrer qu'un vecteur g est nul, on cherche un vecteur f du sous-espace tel que $\langle g, f \rangle$ soit l'intégrale d'une fonction positive liée à g^2 .

Corrigé de l'exercice 11 : Orthonormalisation de Gram-Schmidt dans $\mathbb{R}^3$

1. Calculons le déterminant de la matrice dont les lignes sont v_1, v_2, v_3 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (0 - 1) - 1 \times (1 - 0) + 0 = -2.$$

Ce déterminant est non nul, donc (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. D'abord, $|v_1| = \sqrt{2}$, donc $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$.

Ensuite, $\langle v_2, e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On pose

$$w_2 = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 = (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right). \text{ Sa norme vaut } \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \text{ Donc } e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2).$$

Enfin, $\langle v_3, e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\langle v_3, e_2 \rangle = \frac{0-1+2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Par conséquent,

$$w_3 = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) - \frac{1}{6}(1,-1,2) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Sa norme vaut $\frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, donc $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$. **La base orthonormée obtenue est**
 $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$. On contrôle : $\langle e_1, e_3 \rangle$ est

proportionnel à $-1 + 1 + 0 = 0$, et $\langle e_2, e_3 \rangle$ à $-1 - 1 + 2 = 0$.

3. Les coordonnées de v_3 sont ses produits scalaires avec les e_k : $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{6}}$ et
- $$\langle v_3, e_3 \rangle = \frac{0+1+1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \text{ Donc } v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}e_2 + \frac{2}{\sqrt{3}}e_3. \text{ Vérification :}$$
- $$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = \frac{3+1+8}{6} = 2 = |v_3|^2.$$

Corrigé de l'exercice 12 : Polynômes orthogonaux sur $[-1,1]$

1. On utilise que $\int_{-1}^1 t^k dt$ vaut 0 si k est impair et $\frac{2}{k+1}$ si k est pair.

D'abord, $|1|^2 = 2$, donc $e_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ensuite, $\langle X, e_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 t dt = 0$. Ainsi,

$$w_1 = X, \text{ de norme au carré } \frac{2}{3}, \text{ et } e_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} X.$$

Enfin, $\langle X^2, e_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{3}$ et $\langle X^2, e_1 \rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 t^3 dt = 0$. Donc

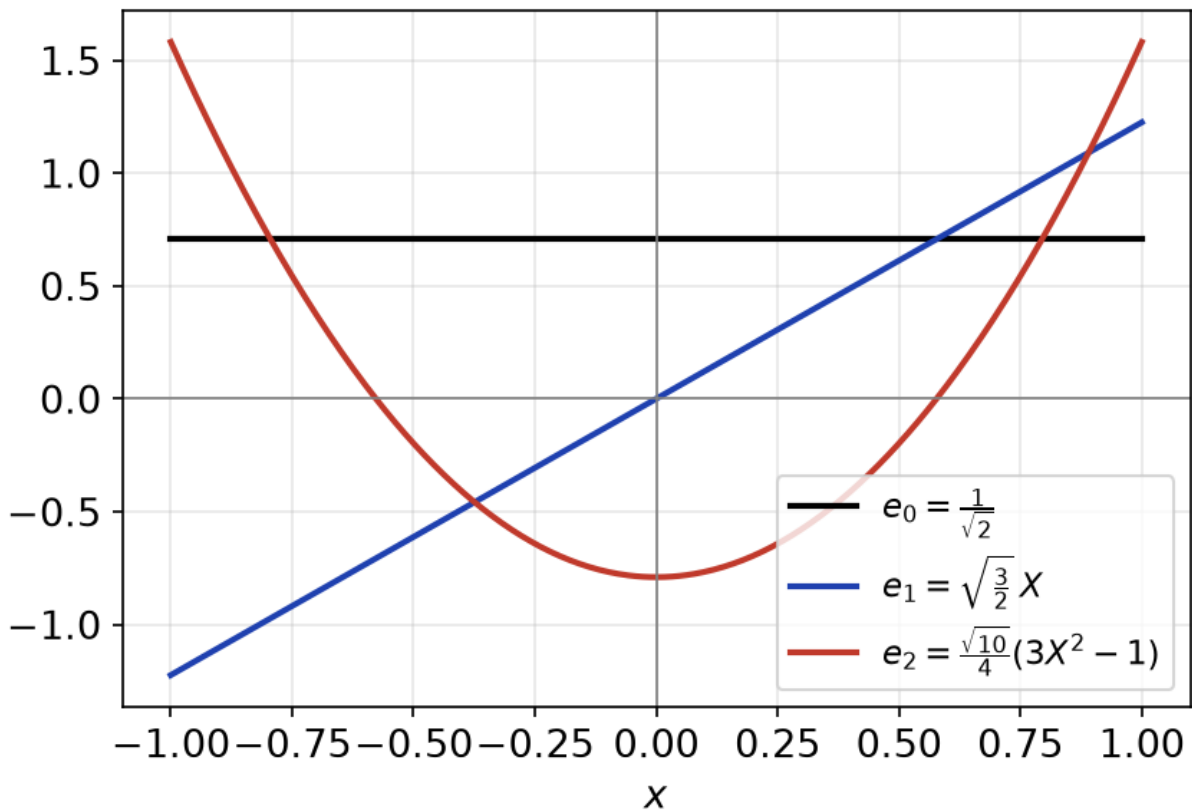
$$w_2 = X^2 - \frac{2}{3\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = X^2 - \frac{1}{3}. \text{ Calculons sa norme :}$$

$$|w_2|^2 = \int_{-1}^1 \left(t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9} \right) dt = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}.$$

Par conséquent, $e_2 = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(X^2 - \frac{1}{3} \right) = \frac{\sqrt{10}}{4} (3X^2 - 1)$. **La base orthonormée est**

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} X, \frac{\sqrt{10}}{4} (3X^2 - 1) \right).$$

La figure ci-dessous représente ces trois polynômes sur $[-1,1]$.



2. Comme $\mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(e_0, e_1)$, on a $p(X^2) = \langle X^2, e_0 \rangle e_0 + \langle X^2, e_1 \rangle e_1 = \frac{1}{3}$. La distance vaut $\left| X^2 - \frac{1}{3} \right| = \sqrt{\frac{8}{45}}$. **Le projeté est le polynôme constant $\frac{1}{3}$, et $d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \frac{2\sqrt{10}}{15}$.**
3. La borne inférieure demandée est $d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2$. **Elle vaut $\frac{8}{45}$, atteinte uniquement pour $a = 0$ et $b = \frac{1}{3}$.**

Corrigé de l'exercice 13 : Coordonnées dans une base orthonormée

1. Chaque vecteur a pour norme au carré $\frac{1+4+4}{9} = 1$. Ensuite,
 $\langle u_1, u_2 \rangle = \frac{2+2-4}{9} = 0$, $\langle u_1, u_3 \rangle = \frac{2-4+2}{9} = 0$ et
 $\langle u_2, u_3 \rangle = \frac{4-2-2}{9} = 0$. La famille est orthonormée, donc libre. Elle compte trois vecteurs

dans $\mathbb{R}^3$. C'est donc une base orthonormée.

2. Les coordonnées sont les produits scalaires. Pour x : $\langle x, u_1 \rangle = \frac{3+6}{3} = 3$,
 $\langle x, u_2 \rangle = \frac{6-6}{3} = 0$, $\langle x, u_3 \rangle = \frac{6+3}{3} = 3$. Pour y : 2, 1 et -2. Donc
 $x = 3u_1 + 3u_3$ et $y = 2u_1 + u_2 - 2u_3$.
3. D'une part, $3^2 + 0^2 + 3^2 = 18 = |x|^2$. D'autre part, $3 \times 2 + 0 \times 1 + 3 \times (-2) = 0$, et
en effet $\langle x, y \rangle = 0$ directement. **Les formules en base orthonormée sont vérifiées.**
4. Le projeté de x sur P garde les coordonnées selon u_1 et u_2 :
 $p_P(x) = 3u_1 + 0u_2 = (1,2,2)$. Ensuite, $x - p_P(x) = 3u_3 = (2,-2,1)$. Donc
 $p_P(x) = (1,2,2)$ et $d(x, P) = 3$.

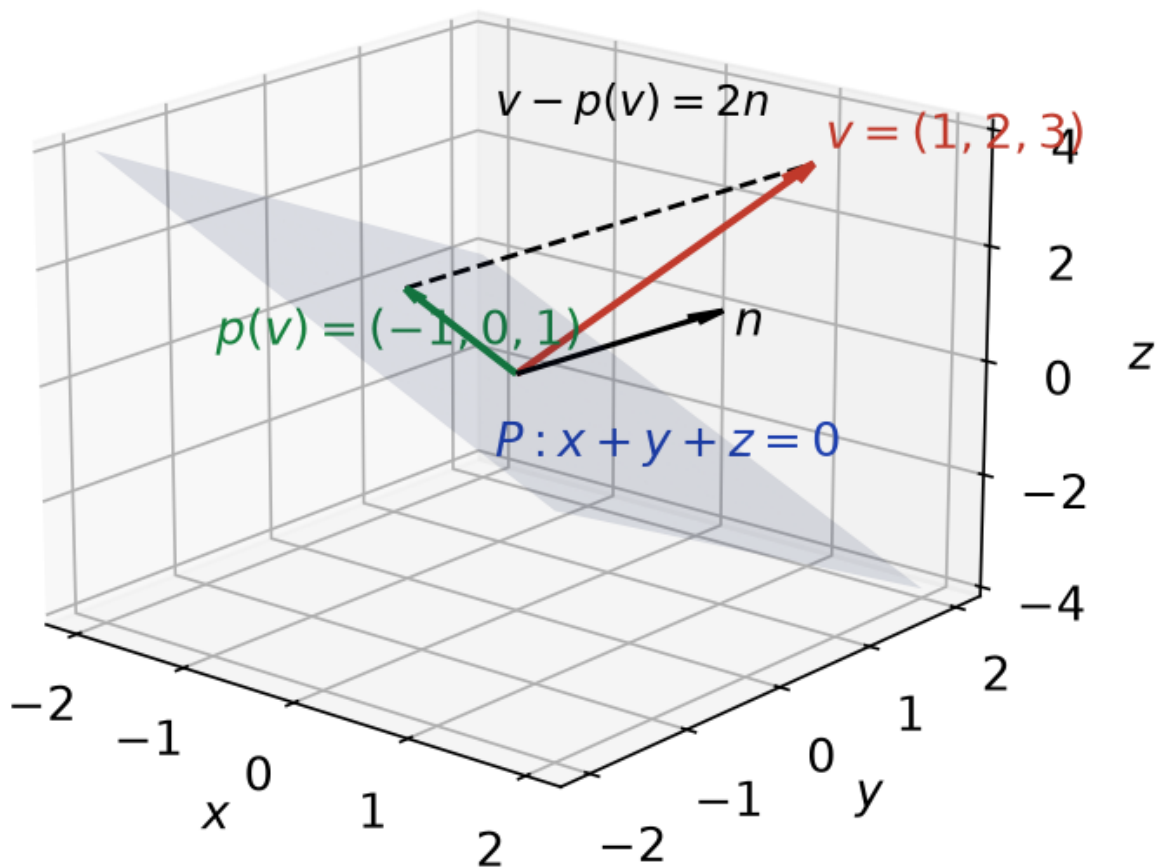
Corrigé de l'exercice 14 : Projection orthogonale sur un plan de $\mathbb{R}^3$

1. Le plan P a pour équation $\langle n, v \rangle = 0$ avec $n = (1,1,1)$. Donc $P = \{n\}^\perp$, et
 $P^\perp = \text{Vect}(n)$. Le projeté sur P s'obtient en retirant la composante selon n . Ainsi,
 $p(v) = v - \frac{\langle v, n \rangle}{3} n$.
2. Notons J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. La composante
 $\frac{\langle v, n \rangle}{3} n$ a pour matrice $\frac{1}{3}J$. Donc

$$M = I_3 - \frac{1}{3}J = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $J^2 = 3J$, on a $M^2 = I_3 - \frac{2}{3}J + \frac{1}{9} \times 3J = I_3 - \frac{1}{3}J = M$. De plus, M
est visiblement symétrique : $M^2 = M$ et $M^T = M$.

3. On a $\langle v, n \rangle = 6$, donc $p(v) = (1,2,3) - 2(1,1,1) = (-1,0,1)$. Ensuite,
 $v - p(v) = 2n$, de norme $2\sqrt{3}$. **Le projeté est $(-1,0,1)$ et la distance de v à P
vaut $2\sqrt{3}$.** La figure ci-dessous représente v , son projeté et le vecteur normal.



4. La symétrie orthogonale par rapport à P vérifie $s = 2p - \text{id}$. Sa matrice est donc

$$2M - I_3 = I_3 - \frac{2}{3}J = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice de la réflexion par rapport à P . Par exemple, elle envoie v sur $v - 4n = (-3, -2, -1)$.

Corrigé de l'exercice 15 : Projeté orthogonal dans $\mathbb{R}^4$ par le

système normal

1. Les vecteurs a et b ne sont pas colinéaires, car la deuxième coordonnée de a est nulle et pas celle de b . Donc (a, b) est une base de F . Écrivons $p_F(x) = \lambda a + \mu b$. La condition $x - p_F(x) \perp a$ et $x - p_F(x) \perp b$ donne le système normal

$$\begin{cases} \lambda \langle a, a \rangle + \mu \langle b, a \rangle = \langle x, a \rangle \\ \lambda \langle a, b \rangle + \mu \langle b, b \rangle = \langle x, b \rangle \end{cases}$$

Or $\langle a, a \rangle = 2$, $\langle a, b \rangle = 2$, $\langle b, b \rangle = 4$, $\langle x, a \rangle = 4$ et $\langle x, b \rangle = 10$. **Le système s'écrit** $2\lambda + 2\mu = 4$ **et** $2\lambda + 4\mu = 10$.

2. Par soustraction, $2\mu = 6$, donc $\mu = 3$, puis $\lambda = -1$. Ainsi, $p_F(x) = -a + 3b = (2, 3, 2, 3)$. Ensuite, $x - p_F(x) = (-1, -1, 1, 1)$. On vérifie $\langle (-1, -1, 1, 1), a \rangle = -1 + 1 = 0$ et $\langle (-1, -1, 1, 1), b \rangle = 0$. **Donc** $p_F(x) = (2, 3, 2, 3)$.
3. La distance vaut $|(-1, -1, 1, 1)| = 2$. Par ailleurs, $|x|^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$ et $|p_F(x)|^2 = 4 + 9 + 4 + 9 = 26$. **On a bien** $30 = 26 + 4$, **soit** $|x|^2 = |p_F(x)|^2 + d(x, F)^2$, **et** $d(x, F) = 2$.

Point de méthode : le système normal évite d'orthonormaliser. Sa matrice est la matrice de Gram de la base choisie, étudiée à l'exercice 20.

Corrigé de l'exercice 16 : Matrices de trace nulle et matrices symétriques

1. Pour toute matrice M , on a $\langle I_n, M \rangle = \text{tr}(I_n^T M) = \text{tr } M$. Donc $M \in H$ si et seulement si $M \perp I_n$. **Ainsi**, $H = \{I_n\}^\perp = \text{Vect}(I_n)^\perp$, **et** $\dim H = n^2 - 1$.
2. Comme $H = \text{Vect}(I_n)^\perp$ en dimension finie, on a $H^\perp = \text{Vect}(I_n)$. Le projeté sur H s'obtient donc en retirant la composante selon I_n , avec $|I_n|^2 = n$:

$$p_H(A) = A - \frac{\langle A, I_n \rangle}{|I_n|^2} I_n = A - \frac{\text{tr } A}{n} I_n.$$

Ensuite, $d(A, H) = \left\| \frac{\text{tr } A}{n} I_n \right\| = \frac{|\text{tr } A|}{n} \sqrt{n}$. **Donc** $d(A, H) = \frac{|\text{tr } A|}{\sqrt{n}}$.

3. La matrice nulle appartient à H . Donc $d(A, H) \leq |A - 0| = |A|$, c'est-à-dire $\frac{(\text{tr } A)^2}{n} \leq \text{tr}(A^T A)$. **On obtient** $(\text{tr } A)^2 \leq n \text{tr}(A^T A)$. Il y a égalité si et seulement si 0 réalise la distance, donc si et seulement si $p_H(A) = 0$, par unicité du point le plus proche. **Cela équivaut à** $A = \frac{\text{tr } A}{n} I_n$, c'est-à-dire à A scalaire.

4. On écrit $A = S + T$ avec $S = \frac{1}{2}(A + A^T) \in \mathcal{S}_n$ et $T = \frac{1}{2}(A - A^T) \in \mathcal{A}_n$. Or $\mathcal{A}_n = \mathcal{S}_n^\perp$. **Par la caractérisation du projeté** ($S \in \mathcal{S}_n$ et $A - S \in \mathcal{S}_n^\perp$), on a $p_{\mathcal{S}_n}(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$.

5. Ici, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $d(A, \mathcal{S}_2) = |T| = \sqrt{0+1+1+0} = \sqrt{2}$. Par ailleurs, $\text{tr } A = 4$, donc $d(A, H) = \frac{4}{\sqrt{2}}$. **On trouve** $d(A, \mathcal{S}_2) = \sqrt{2}$ **et** $d(A, H) = 2\sqrt{2}$.

Corrigé de l'exercice 17 : Meilleure approximation affine de x^3 sur $[0,1]$

1. Minimiser $\int_0^1 (t^3 - c)^2$ revient à calculer la distance de h à la droite des constantes. Le projeté est $\frac{\langle h, 1 \rangle}{|1|^2} \cdot 1$, avec $\langle h, 1 \rangle = \frac{1}{4}$ et $|1|^2 = 1$. Donc $c = \frac{1}{4}$. Ensuite, Pythagore donne le minimum $|h|^2 - c^2 |1|^2 = \frac{1}{7} - \frac{1}{16}$. **La meilleure constante est $\frac{1}{4}$, et le minimum vaut $\frac{9}{112}$.**
2. On cherche le projeté de h sur $F = \text{Vect}(1, t)$. La condition $h - at - b \perp 1$ et $h - at - b \perp t$ s'écrit

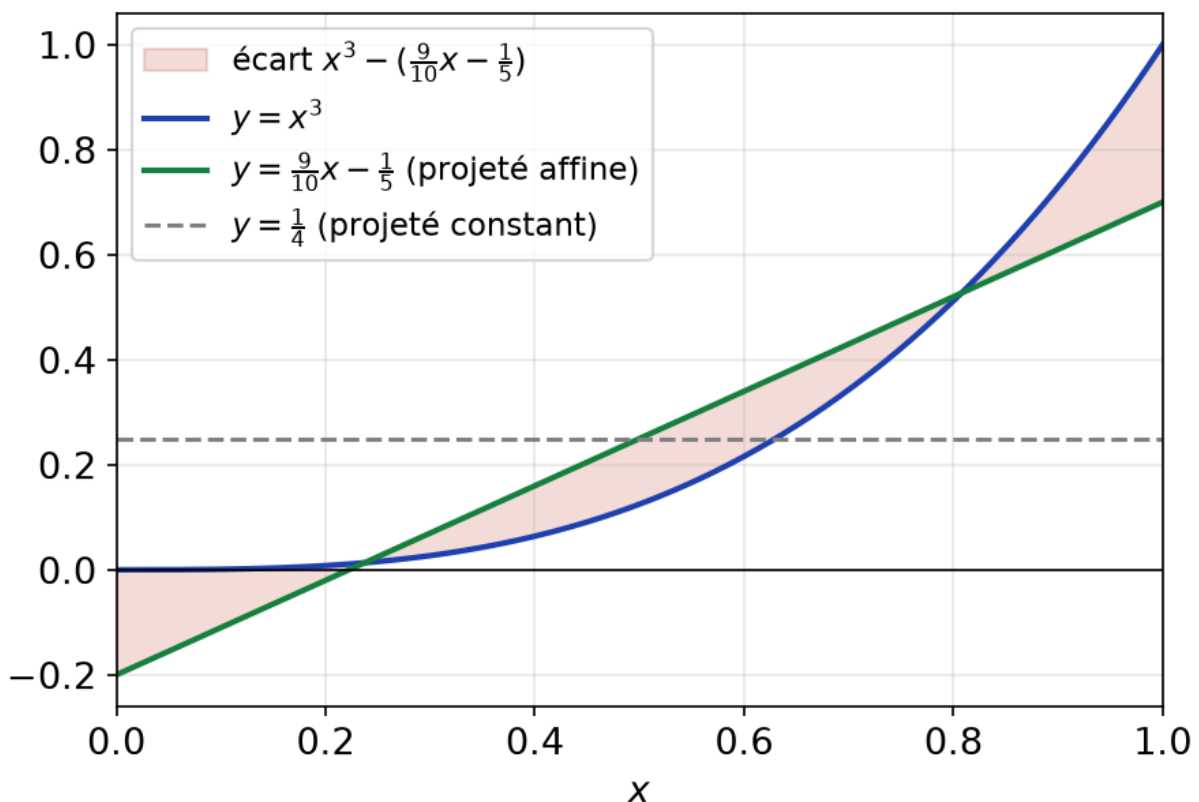
$$\begin{cases} \frac{a}{2} + b = \frac{1}{4} \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

La première équation donne $b = \frac{1}{4} - \frac{a}{2}$. En reportant, $\frac{a}{3} + \frac{1}{8} - \frac{a}{4} = \frac{1}{5}$, soit $\frac{a}{12} = \frac{3}{40}$. **Donc**
 $a = \frac{9}{10}$ **et** $b = -\frac{1}{5}$. Contrôle : $\frac{9}{20} - \frac{4}{20} = \frac{1}{4}$ et $\frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$.

3. Comme $h - p_F(h)$ est orthogonal à $p_F(h)$, le minimum vaut $\langle h - p_F(h), h \rangle$:

$$\int_0^1 t^6 dt - \frac{9}{10} \int_0^1 t^4 dt + \frac{1}{5} \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{7} - \frac{9}{50} + \frac{1}{20} = \frac{100 - 126 + 35}{700}.$$

Le minimum vaut $\frac{9}{700}$, soit environ 0,0129, contre $\frac{9}{112} \approx 0,0804$ pour les constantes. L'erreur quadratique est donc divisée par 6,25, comme le suggère la figure ci-dessous.



Corrigé de l'exercice 18 : Droite des moindres carrés

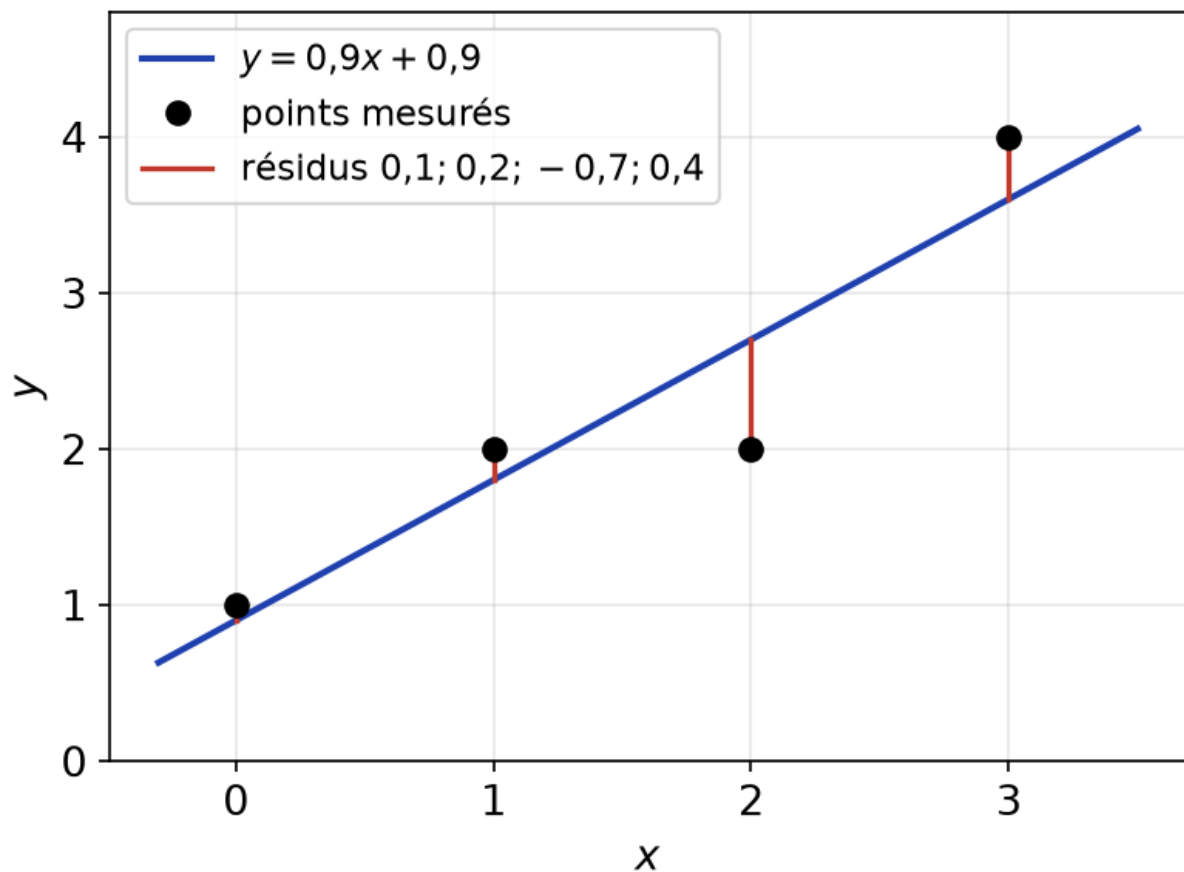
1. Posons dans $\mathbb{R}^4$: $X = (0,1,2,3)$, $U = (1,1,1,1)$ et $Y = (1,2,2,4)$. Alors $S(a,b) = |Y - aX - bU|^2$. Les vecteurs X et U ne sont pas colinéaires. **Donc** $S(a,b)$ **est le carré de la distance de** Y **au vecteur** $aX + bU$ **de** $F = \text{Vect}(X, U)$, **plan de** $\mathbb{R}^4$. Son minimum est $d(Y, F)^2$.

2. On calcule $\langle X, X \rangle = 14$, $\langle X, U \rangle = 6$, $\langle U, U \rangle = 4$,
 $\langle Y, X \rangle = 0 + 2 + 4 + 12 = 18$ et $\langle Y, U \rangle = 9$. Le système normal s'écrit

$$\begin{cases} 14a + 6b = 18 \\ 6a + 4b = 9 \end{cases}$$

En multipliant la seconde équation par $\frac{3}{2}$, on obtient $9a + 6b = 13,5$. Par soustraction,
 $5a = 4,5$. **Donc** $a = 0,9$ **et** $b = \frac{9 - 5,4}{4} = 0,9$: **la droite est** $y = 0,9x + 0,9$.

3. Les résidus valent $r_1 = 1 - 0,9 = 0,1$, $r_2 = 2 - 1,8 = 0,2$, $r_3 = 2 - 2,7 = -0,7$
et $r_4 = 4 - 3,6 = 0,4$. Ainsi, $S = 0,01 + 0,04 + 0,49 + 0,16$. **La valeur minimale est** $S = 0,7$. La figure ci-dessous montre la droite et les résidus.



4. Le vecteur des résidus est $R = (0,1 ; 0,2 ; -0,7 ; 0,4)$. D'une part,
 $\langle R, U \rangle = 0,1 + 0,2 - 0,7 + 0,4 = 0$. D'autre part,
 $\langle R, X \rangle = 0 + 0,2 - 1,4 + 1,2 = 0$. **Donc** $R \in F^\perp$, ce qui confirme que
 $0,9X + 0,9U$ est bien le projeté de Y .

Corrigé de l'exercice 19 : Caractérisation des projecteurs orthogonaux

- Si p est la projection orthogonale sur F , alors $x = p(x) + (x - p(x))$ avec $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$. Le théorème de Pythagore donne $|x|^2 = |p(x)|^2 + |x - p(x)|^2$. **Donc** $|p(x)| \leq |x|$.
- Soit $a \in \text{Im } p$: il existe c tel que $a = p(c)$, donc $p(a) = p^2(c) = a$. Soit $b \in \ker p$

. Par linéarité, $p(a + tb) = a + t p(b) = a$. L'hypothèse appliquée à $a + tb$ donne $|a|^2 \leq |a + tb|^2$. En développant, on obtient pour tout réel t :

$$t(2\langle a, b \rangle + t|b|^2) \geq 0.$$

Pour $t > 0$, on divise par t puis on fait tendre t vers 0 : $\langle a, b \rangle \geq 0$. Pour $t < 0$, la division renverse l'inégalité, et la limite donne $\langle a, b \rangle \leq 0$. **Par conséquent, $\langle a, b \rangle = 0$.**

- La question 2 montre que $\ker p \subset (\operatorname{Im} p)^\perp$. Or $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$, donc $\dim \ker p = \dim E - \dim \operatorname{Im} p = \dim (\operatorname{Im} p)^\perp$. Ainsi, $\ker p = (\operatorname{Im} p)^\perp$. **Le projecteur p projette sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $(\operatorname{Im} p)^\perp$: c'est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} p$.**
- On décompose $(x, y) = (x - y)(1, 0) + y(1, 1)$. Donc $q(x, y) = (x - y, 0)$. Prenons $v = (1, -1)$: $q(v) = (2, 0)$, de norme 2, alors que $|v| = \sqrt{2}$. **Ainsi, $|q(v)| = 2 > \sqrt{2} = |v|$: un projecteur non orthogonal peut allonger certains vecteurs.**

Corrigé de l'exercice 20 : Matrice de Gram et distance à une droite

- Par bilinéarité, $\left\| \sum_j \lambda_j x_j \right\|^2 = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \langle x_i, x_j \rangle$. **Cette somme est exactement $A^T G A$.**

- Supposons la famille libre et soit A tel que $GA = 0$. Alors $A^T G A = 0$, donc $\sum \lambda_j x_j = 0$, puis $A = 0$ par liberté. Ainsi, G est inversible.

Réciproquement, supposons la famille liée. Il existe $A \neq 0$ tel que $\sum_j \lambda_j x_j = 0$. La i -

ème coordonnée de GA vaut $\sum_j \langle x_i, x_j \rangle \lambda_j = \left\langle x_i, \sum_j \lambda_j x_j \right\rangle = 0$. Donc

$GA = 0$ avec $A \neq 0$, et G n'est pas inversible. **En conclusion, G est inversible si et seulement si la famille est libre.**

- Dans une base orthonormée, le produit scalaire se calcule sur les coordonnées. Donc

$$\langle x_i, x_j \rangle = \sum_{k=1}^m A_{ki} A_{kj} = (A^T A)_{ij}, \text{ et } G = A^T A.$$

Si la famille est libre, alors $m = p$, la matrice A est carrée et $\det G = (\det A)^2 > 0$.
Sinon, G n'est pas inversible par la question 2, et $\det G = 0$. **Dans tous les cas,**
 $\det G \geq 0$.

4. Pour $p = 2$, on a $\det G = |x_1|^2 |x_2|^2 - \langle x_1, x_2 \rangle^2$. La question 3 donne donc
 $\langle x_1, x_2 \rangle^2 \leq |x_1|^2 |x_2|^2$, qui est Cauchy-Schwarz. De plus, l'égalité équivaut à $\det G = 0$,
donc à la liaison de (x_1, x_2) . **On retrouve le théorème avec son cas d'égalité :
colinéarité.**

5. Le projeté de x sur D est $\frac{\langle x, u \rangle}{|u|^2} u$. Par Pythagore, $d(x, D)^2 = |x|^2 - \frac{\langle x, u \rangle^2}{|u|^2}$. En
réduisant au même dénominateur,

$$d(x, D)^2 = \frac{|u|^2 |x|^2 - \langle u, x \rangle^2}{|u|^2} = \frac{\det G(u, x)}{|u|^2}.$$

Application : $|u|^2 = 3$, $|x|^2 = 14$ et $\langle u, x \rangle = 6$, donc $\det G(u, x) = 42 - 36 = 6$.
On obtient $d(x, D)^2 = 2$, **soit** $d(x, D) = \sqrt{2}$. Vérification : le projeté est $(2, 2, 2)$, et
 $|(1, 2, 3) - (2, 2, 2)| = |(-1, 0, 1)| = \sqrt{2}$.

Corrigé de l'exercice 21 : Problème : inégalité de Bessel et somme des inverses des carrés

Partie A.

1. L'intégrale existe, car fg est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$. La bilinéarité et la symétrie
viennent de la linéarité de l'intégrale. De plus, $\langle f, f \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 \geq 0$. Si cette intégrale est
nulle, f^2 est continue, positive et d'intégrale nulle, donc nulle. **Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit
scalaire sur E .**

2. Soient $k, l \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $m \neq 0$, on a $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \, dt = 0$. Examinons les trois types de produits.

- La fonction $t \rightarrow \cos(kt)\sin(lt)$ est impaire, donc son intégrale sur $[-\pi, \pi]$ est nulle. En particulier, $\langle c_0, s_l \rangle = 0$ et $\langle c_k, s_l \rangle = 0$.
- Pour $k \neq l$, on a $\cos(kt)\cos(lt) = \frac{1}{2}(\cos((k-l)t) + \cos((k+l)t))$, avec $k-l \neq 0$ et $k+l \neq 0$. L'intégrale est donc nulle. Ce calcul couvre aussi c_0 , multiple de $\cos(0t)$.
- Pour $k \neq l$ non nuls, $\sin(kt)\sin(lt) = \frac{1}{2}(\cos((k-l)t) - \cos((k+l)t))$: l'intégrale est encore nulle.

Ensuite, pour $k \geq 1$, $|c_k|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos(2kt)}{2} \, dt = 1$, et de même $|s_k|^2 = 1$. Enfin, $|c_0|^2 = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{2} \times 2\pi = 1$. **La famille est donc orthonormée.** Elle est libre, et engendre T_n . **Donc** $\dim T_n = 2n + 1$.

Partie B.

1. Pour $0 \leq k \leq n$, la fonction $t \rightarrow t\cos(kt)$ est impaire. **Donc** $\langle f, c_k \rangle = 0$. En revanche, $t \rightarrow t\sin(kt)$ est paire, d'où $\langle f, s_k \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t\sin(kt) \, dt$. Une intégration par parties, avec $u(t) = t$ et $v(t) = -\frac{\cos(kt)}{k}$, donne

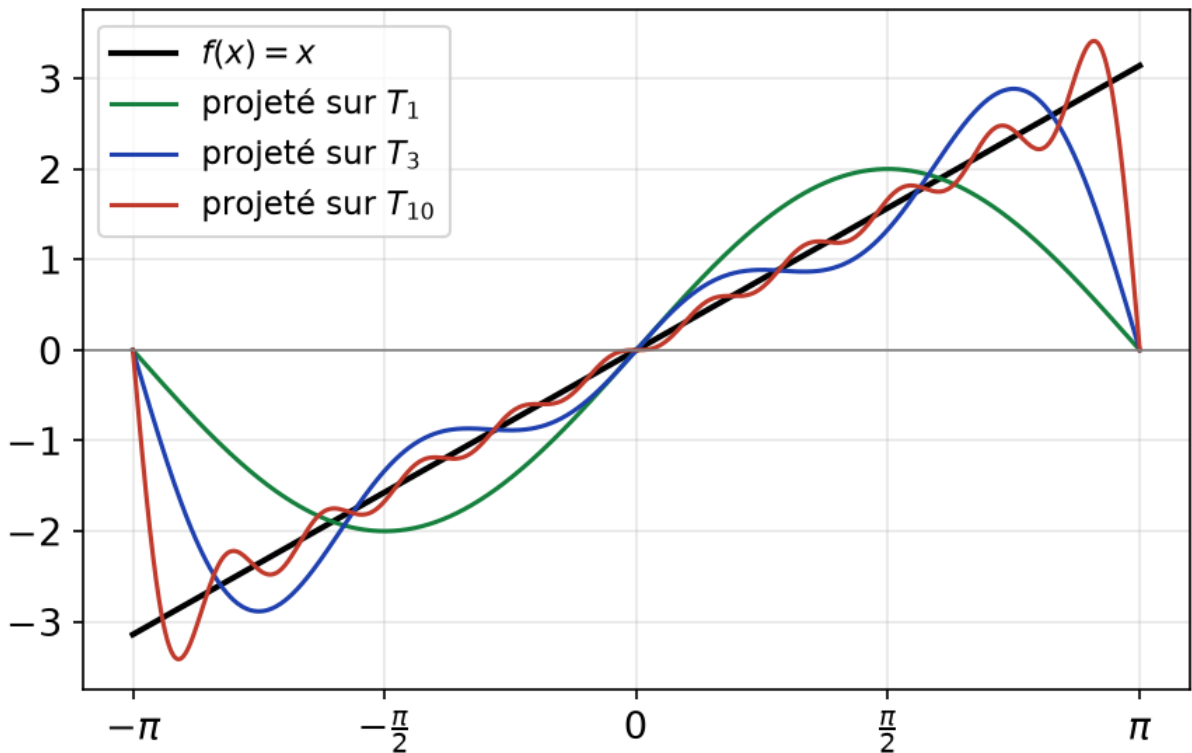
$$\int_0^{\pi} t\sin(kt) \, dt = \left[-\frac{t\cos(kt)}{k} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos(kt) \, dt = -\frac{\pi(-1)^k}{k} + 0.$$

Par conséquent, $\langle f, s_k \rangle = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$.

2. La famille de la partie A est une base orthonormée de T_n . Le projeté est donc la somme des composantes :

$$p_n(f) = \sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kt).$$

Seuls les sinus interviennent, ce qui était attendu pour une fonction impaire. La figure ci-dessous compare f à $p_1(f)$, $p_3(f)$ et $p_{10}(f)$.



3. On a $|f|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{\pi} \times \frac{2\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$. Ensuite, Pythagore donne

$$d(f, T_n)^2 = |f|^2 - |p_n(f)|^2, \text{ et } |p_n(f)|^2 = \sum_{k=1}^n \frac{4}{k^2}. \text{ Donc}$$

$$d(f, T_n)^2 = \frac{2\pi^2}{3} - 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

Partie C.

1. Une distance au carré est positive. D'après la question précédente, $|p_n(f)|^2 \leq |f|^2$.

Autrement dit, $\sum_{k=1}^n \langle f, s_k \rangle^2 \leq |f|^2$: c'est l'inégalité de Bessel.

2. On en déduit $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{2\pi^2}{3}$, soit $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$ pour tout n . Les sommes partielles de cette série à termes positifs sont croissantes et majorées. **Donc la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, et sa somme est au plus $\frac{\pi^2}{6}$.**

Remarque hors programme : on peut montrer que $d(f, T_n)$ tend vers 0. La somme vaut alors exactement $\frac{\pi^2}{6}$. La figure suggère d'ailleurs cette convergence, sauf près des bords.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [espaces préhilbertiens réels, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur espaces préhilbertiens réels](#)
- À maîtriser avant : [Espaces vectoriels de dimension finie, Applications linéaires et théorème du rang](#)
- Chapitre précédent : [Espérance, variance et inégalités probabilistes](#)
- Chapitre suivant : [Fonctions de deux variables](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)