

Espaces métriques

Exercice 1 : Distance discrète

Soit X un ensemble non vide. Pour $x, y \in X$, on pose $\delta(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $\delta(x, x) = 0$.

1. Montrer que δ est une distance sur X .
2. Décrire les boules $B(a, r)$ et $B_f(a, r)$ selon la valeur de $r > 0$.
3. Montrer que toute partie de X est à la fois ouverte et fermée pour δ .
4. Caractériser les suites convergentes de (X, δ) .
5. Montrer que toute application de (X, δ) vers un espace métrique quelconque est continue.
6. On prend $X = \mathbb{R}$. Déterminer les applications continues de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ vers $(\mathbb{R}, \delta)$.

Exercice 2 : Les distances d_1 , d_2 et d_∞ du plan

Pour $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ dans $\mathbb{R}^2$, on pose $d_1(u, v) = |x - x'| + |y - y'|$,
 $d_2(u, v) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ et $d_\infty(u, v) = \max(|x - x'|, |y - y'|)$.

1. Calculer les trois distances entre $u = (1, 2)$ et $v = (4, -2)$.
2. Montrer que d_∞ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

- Montrer que $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq 2 d_\infty$.
- Montrer que $d_1 \leq \sqrt{2} d_2$ et que la constante $\sqrt{2}$ est optimale.
- En déduire que les trois distances ont les mêmes ouverts et les mêmes suites convergentes.

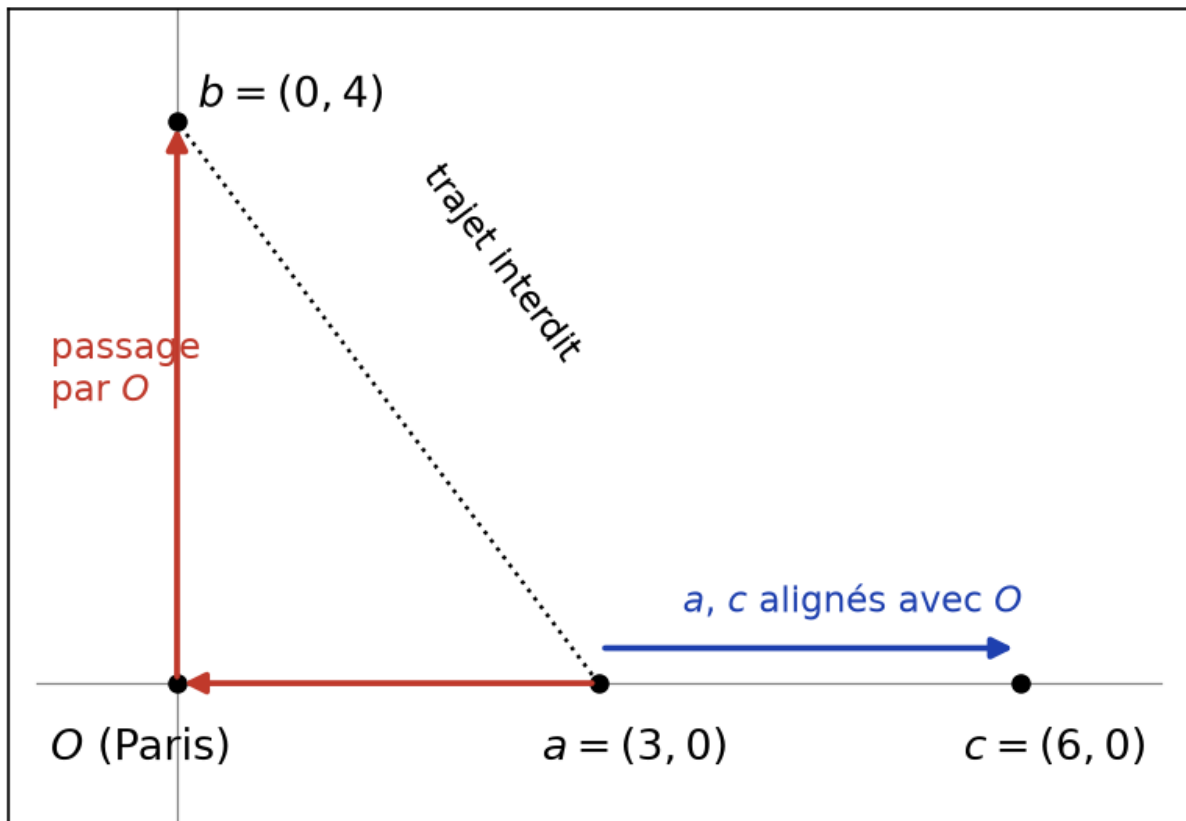
Exercice 3 : Fonctions d'une distance

Soit (X, d) un espace métrique. Soit $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction croissante, telle que $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$, et **sous-additive** : $\varphi(a+b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$ pour tous $a, b \geq 0$.

- Montrer que $\varphi \circ d$ est une distance sur X .
- Vérifier que $\varphi_1(t) = \min(1, t)$, $\varphi_2(t) = \frac{t}{1+t}$ et $\varphi_3(t) = \sqrt{t}$ conviennent.
- On note $d' = \min(1, d)$. Comparer les boules ouvertes de d et de d' , puis montrer que d et d' ont les mêmes ouverts.
- On note $d'' = \frac{d}{1+d}$. Exprimer $B_{d''}(x, r)$ à l'aide d'une boule de d , selon que $r < 1$ ou $r \geq 1$. Conclure comme à la question précédente.
- Sur $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, $\mathbb{R}$ est-il borné ? Et pour d' ? Que peut-on en conclure sur la notion de partie bornée ?

Exercice 4 : La distance SNCF

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ et on note O l'origine. On dit que x et y sont alignés avec O si les vecteurs x et y sont colinéaires. On pose $d(x, y) = \|x - y\|$ si x et y sont colinéaires, et $d(x, y) = \|x\| + \|y\|$ sinon. Comme le suggère la figure ci-dessous, pour aller de a à b non alignés avec O , il faut passer par O .



1. Calculer $d(a, b)$ et $d(a, c)$ pour $a = (3, 0)$, $b = (0, 4)$ et $c = (6, 0)$. Comparer avec la distance euclidienne.
2. Montrer que d est une distance et que $|x - y| \leq d(x, y)$ pour tous x, y .
3. On pose $a = (2, 0)$. Décrire et dessiner $B(a, 1)$ et $B(a, 3)$. Plus généralement, décrire $B(a, r)$ pour $a \neq O$ et $r > 0$, puis $B(O, r)$.
4. Soit $u \neq O$. Montrer que la demi-droite ouverte $L = \{t u : t > 0\}$ est ouverte pour d . Est-elle ouverte pour la distance euclidienne ?
5. Montrer que l'identité de $(\mathbb{R}^2, d)$ vers $(\mathbb{R}^2, \dots)$ est continue, mais que sa réciproque n'est pas continue en $(1, 0)$.

Exercice 5 : La distance arctangente sur $\mathbb{R}$

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$.

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{R}$ est borné pour d .
2. Montrer que $d(x, y) \leq |x - y|$ pour tous réels x, y .
3. Montrer qu'il n'existe aucune constante $c > 0$ telle que $|x - y| \leq c d(x, y)$ pour tous x, y .
4. Montrer que d et la distance usuelle ont les mêmes ouverts.
5. La suite $u_n = n$ converge-t-elle dans $(\mathbb{R}, d)$? Calculer $\lim_{n, m \rightarrow +\infty} d(u_n, u_m)$ et commenter.

Exercice 6 : Ouvert ou fermé ? Parties du plan

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de la distance euclidienne. Pour chacune des parties suivantes, dire si elle est ouverte, fermée, les deux ou aucun des deux, en justifiant.

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 1\}$.
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1\}$.
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$.
4. $D = \{(x, 0) : 0 < x \leq 1\}$.
5. $E = \bigcup_{n \geq 1} B_f\left(O, 1 - \frac{1}{n}\right)$. Que montre cet exemple ?

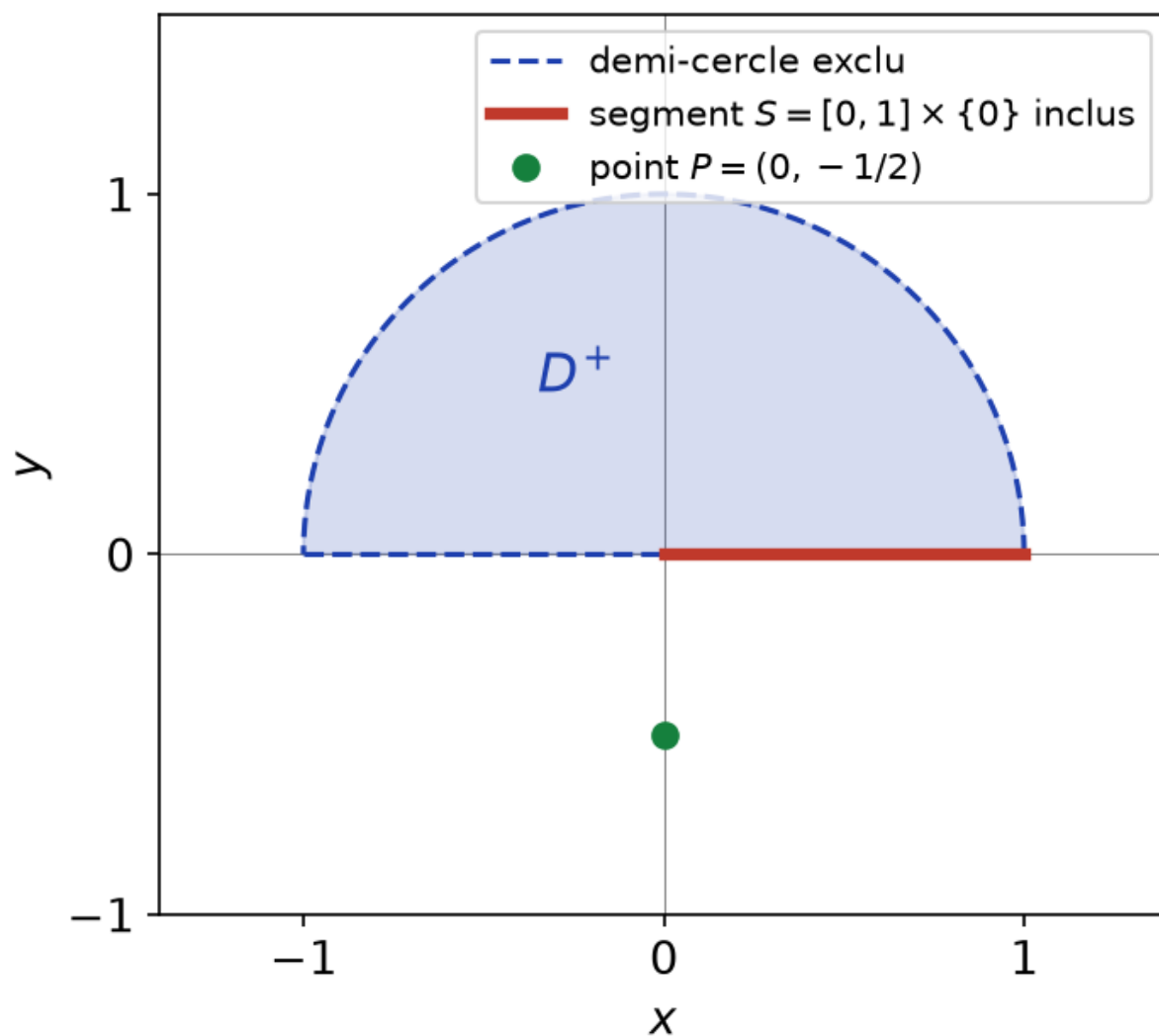
Exercice 7 : Intérieur, adhérence et frontière dans $\mathbb{R}$

Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière des parties suivantes.

1. $A = [0, 1[\cup \{2\}$.
2. $\mathbb{Z}$.
3. $\mathbb{Q}$.
4. $B = \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\}$.
5. $C =]0, 1[\cap \mathbb{Q}$.

Exercice 8 : Intérieur et adhérence d'une partie du plan

Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, on considère le demi-disque ouvert $D^+ = \left\{ (x, y), x^2 + y^2 < 1, y > 0 \right\}$, le segment $S = [0, 1] \times \{0\}$ et le point $P = (0, -\frac{1}{2})$. On pose $E = D^+ \cup S \cup \{P\}$, représentée ci-dessous.



1. Montrer que D^+ est ouvert et que $K = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 1, \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$ est fermé.
2. Déterminer $\text{Int}(E)$.
3. Déterminer $\overline{E}$.
4. En déduire $\text{Fr}(E)$. La partie E est-elle ouverte ? fermée ?

Exercice 9 : Boule fermée et adhérence de la boule ouverte

Soient (X, d) un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$.

1. Montrer que $B_f(a, r)$ est fermée et que $\overline{B(a, r)} \subset B_f(a, r)$.
2. On suppose que $X = E$ est un espace vectoriel normé non réduit à $\{0\}$, avec $d(x, y) = |x - y|$. Montrer que $\overline{B(a, r)} = B_f(a, r)$.
3. Dans ce même cadre, montrer que l'intérieur de $B_f(a, r)$ est $B(a, r)$ et que la frontière de $B(a, r)$ est la sphère $S(a, r)$.
4. On munit un ensemble X ayant au moins deux éléments de la distance discrète. Calculer $\overline{B(a, 1)}$, $B_f(a, 1)$ et l'intérieur de $B_f(a, 1)$. Conclure.

Exercice 10 : Opérations sur l'intérieur et l'adhérence

Soient A et B deux parties d'un espace métrique X .

1. Montrer que si $A \subset B$, alors $\text{Int}(A) \subset \text{Int}(B)$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$ et que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. Montrer que $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subset \text{Int}(A \cup B)$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
Montrer, à l'aide de $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, que ces inclusions peuvent être strictes.
4. Montrer que $X \setminus \overline{A} = \text{Int}(X \setminus A)$.
5. Soit U un ouvert de X . Montrer que $U \cap \overline{A} \subset \overline{U \cap A}$. Donner un exemple dans $\mathbb{R}$ montrant que l'hypothèse « U ouvert » est nécessaire.

Exercice 11 : Parties denses

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D} = \left\{ \frac{k}{2^n} : k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ des nombres dyadiques est dense dans $\mathbb{R}$.

2. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $|M| = \max_{i,j} |m_{ij}|$. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{R})$.
3. Soient U et V deux ouverts denses d'un espace métrique X . Montrer que $U \cap V$ est un ouvert dense.
4. Montrer par un exemple que l'intersection de deux parties denses peut être vide.

Exercice 12 : Caractérisation séquentielle dans $C([0,1])$

On note $E = C([0,1], \mathbb{R})$, muni de $d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$.

1. Justifier que d_∞ est bien définie et que c'est une distance sur E .
2. Montrer que $F = \{f \in E : f(0) = 0\}$ est fermée, à l'aide de la caractérisation séquentielle.
3. Montrer que $G = \left\{ f \in E : \begin{array}{l} \forall t \in [0,1], \\ f(t)t > 0 \end{array} \right\}$ est ouverte.
4. On pose $H = \left\{ f \in E : \begin{array}{l} \forall t \in [0,1], \\ f(t)t \geq 0 \end{array} \right\}$. Montrer que H est fermée, puis que $\overline{H} = G$ et $\overline{G} = H$.

Exercice 13 : Topologie induite

1. On pose $Y = [0, 2[$, muni de la distance induite par $\mathbb{R}$. Calculer $B_Y(0, 1)$ et $B_Y(1, \frac{1}{2})$. Montrer que $[0, 1[$ est ouvert dans Y et que $[1, 2[$ est fermé dans Y . Ces parties sont-elles ouvertes ou fermées dans $\mathbb{R}$?
2. Dans $Y = \mathbb{Q}$, on considère $A = \left\{ q \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} < q < \sqrt{3} \right\}$. Montrer que A est à la fois ouverte et fermée dans $\mathbb{Q}$. Est-elle ouverte ou fermée dans $\mathbb{R}$?
3. Montrer que toute partie de $\mathbb{Z}$ est ouverte pour la distance induite par $\mathbb{R}$.

4. Soit Y un ouvert d'un espace métrique X et $U \subset Y$. Montrer que U est ouvert dans Y si et seulement si U est ouvert dans X . Énoncer et prouver le résultat analogue pour les fermés lorsque Y est fermé.

Exercice 14 : Continuité par image réciproque

1. On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert, que $SL_n(\mathbb{R}) = \{M : \det M = 1\}$ est fermé et que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé.
2. On identifie le polynôme $P = aX^2 + bX + c$ au triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que l'ensemble des polynômes de degré 2 ayant deux racines réelles distinctes est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 < 1, z < 1\}$ est ouvert et que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 = 1\}$ est fermé.
4. Montrer par des exemples que l'image directe d'un ouvert, ou d'un fermé, par une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas forcément ouverte, ou fermée.

Exercice 15 : Distance à une partie

Soient (X, d) un espace métrique et A une partie non vide de X . Pour $x \in X$, on pose $d_A(x) = \inf_{a \in A} d(x, a)$.

1. Montrer que $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$ pour tous x, y . Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
3. En déduire que tout fermé F non vide est une intersection dénombrable d'ouverts.
4. Soient A et B deux fermés non vides et disjoints. On pose $f = \frac{d_A}{d_A + d_B}$. Montrer que f est bien définie et continue, et calculer f sur A et sur B .
5. En déduire qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

6. Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, calculer d_A lorsque A est l'axe des abscisses, puis lorsque A est le disque ouvert $B(O, 1)$.

Exercice 16 : Applications lipschitziennes

1. Montrer que $x \rightarrow \sqrt{1+x^2}$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la racine carrée n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$, mais qu'elle est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.
3. Soient $f: X \rightarrow Y$ k -lipschitzienne et $g: Y \rightarrow Z$ k' -lipschitzienne. Montrer que $g \circ f$ est kk' -lipschitzienne.
4. Montrer que $s: (x, y) \rightarrow x + y$ est 1-lipschitzienne de $(\mathbb{R}^2, d_1)$ dans $\mathbb{R}$, et 2-lipschitzienne de $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ dans $\mathbb{R}$. Les constantes sont-elles optimales ?
5. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne lorsque $X \times X$ est muni de la distance $D((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(y, y')$.

Exercice 17 : Continuité uniforme

1. Soit $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$. Montrer que f n'est pas uniformément continue si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n), (y_n)$ de X telles que $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ et $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ pour tout n .
2. En déduire que $x \rightarrow x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $x \rightarrow \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, bien qu'elle soit bornée.
4. Montrer que $\ln$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.
5. Montrer que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ pour tous $x, y \geq 0$. En déduire que la racine carrée est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 18 : Homéomorphismes

1. Montrer que $\varphi : x \rightarrow \frac{x}{1+|x|}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$, et expliciter sa réciproque.
2. Montrer de même que $\Phi : x \rightarrow \frac{x}{1+|x|}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ euclidien sur le disque ouvert $B(O, 1)$.
3. Montrer que $]0, 1[$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.
4. On note $\mathbb{U}$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et $g : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{U}, t \rightarrow (\cos t, \sin t)$. Montrer que g est une bijection continue, mais que g^{-1} n'est pas continue en $(1, 0)$.
5. Citer une propriété préservée par homéomorphisme et une propriété qui ne l'est pas, en s'appuyant sur les questions précédentes.

Exercice 19 : Espace produit

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Sur $X \times Y$, on pose $d_\infty((x, y), (x', y')) = \max(d_X(x, x'), d_Y(y, y'))$ et $d_1((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y')$.

1. Montrer que d_∞ est une distance et que $d_\infty \leq d_1 \leq 2 d_\infty$.
2. Montrer qu'une suite (x_n, y_n) converge vers (x, y) si et seulement si $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$.
3. Montrer que les projections p_X et p_Y sont 1-lipschitziennes, et que $U \times V$ est ouvert si U et V sont ouverts.
4. Soit $f : X \rightarrow Y$ continue. Montrer que son graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$.
5. Montrer que la réciproque est fautive, en étudiant $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

6. Montrer que la diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ est fermée dans $X \times X$.

Exercice 20 : Distances uniforme et intégrale sur $C([0,1])$

On note $E = C([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $d_\infty(f, g) = \sup_{[0, 1]} |f - g|$ et

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt.$$

1. Montrer que d_1 est une distance sur E .
2. Montrer que $d_1 \leq d_\infty$. Qu'en déduit-on pour l'identité de (E, d_∞) vers (E, d_1) ?
3. On pose $f_n(t) = t^n$. Calculer $d_1(f_n, 0)$ et $d_\infty(f_n, 0)$. Les distances d_1 et d_∞ sont-elles équivalentes ?
4. Montrer que la boule $B_\infty(0, 1)$ n'est pas ouverte pour d_1 . Les deux distances ont-elles les mêmes ouverts ?
5. On pose $F = \{f \in E : f(\frac{1}{2}) = 0\}$. Montrer que F est fermée pour d_∞ .
6. Pour $n \geq 2$, on note θ_n la fonction « tente », affine par morceaux, nulle hors de $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$, avec $\theta_n(\frac{1}{2}) = 1$. Pour $f \in E$, on pose $g_n = f - f(\frac{1}{2}) \theta_n$. Montrer que $g_n \in F$ et calculer $d_1(f, g_n)$. En déduire que F est dense dans (E, d_1) , puis que F n'est pas fermée pour d_1 .

Exercice 21 : Distance p-adique sur $\mathbb{Z}$

Soit p un nombre premier. Pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on note $v_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de $|n|$ en facteurs premiers. Pour $m, n \in \mathbb{Z}$, on pose $d_p(m, n) = p^{-v_p(m-n)}$ si $m \neq n$, et $d_p(n, n) = 0$.

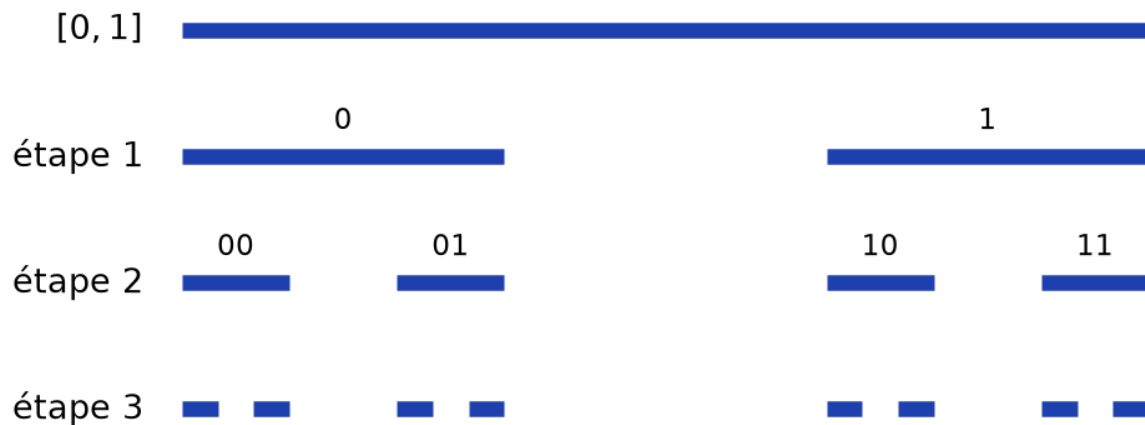
1. Montrer que $v_p(a+b) \geq \min(v_p(a), v_p(b))$ lorsque a , b et $a+b$ sont non nuls. En déduire l'**inégalité ultramétrique** $d_p(x, z) \leq \max(d_p(x, y), d_p(y, z))$, puis que d_p est une distance.
2. Montrer que si $d_p(x, y) \neq d_p(y, z)$, alors $d_p(x, z) = \max(d_p(x, y), d_p(y, z))$: « tout triangle est isocèle ».
3. Montrer que tout point d'une boule ouverte en est un centre : si $b \in B(a, r)$, alors $B(b, r) = B(a, r)$.
4. Montrer que toute boule ouverte est fermée et que toute boule fermée est ouverte.
5. Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer $B_f(0, p^{-k})$.
6. Montrer que $p^n \rightarrow 0$ pour d_p . On pose $u_n = 1 + p + \dots + p^{n-1}$: montrer que $(1-p)u_n \rightarrow 1$.
7. L'identité de $(\mathbb{Z}, |\cdot|)$ vers $(\mathbb{Z}, d_p)$ est-elle continue ? Et sa réciproque ?

Exercice 22 : Problème : l'espace de Cantor

On note $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans $\{0, 1\}$. Pour $x \neq y$, on note $N(x, y) = \min\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}$ et on pose $d(x, y) = 2^{-N(x, y)}$, avec $d(x, x) = 0$.

1. Montrer que $N(x, z) \geq \min(N(x, y), N(y, z))$ pour x, y, z deux à deux distincts. En déduire que d est une distance ultramétrique.
2. Soient $x \in X$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $B_f(x, 2^{-k}) = \{y \in X : y_n = x_n \text{ pour } 0 \leq n \leq k-1\}$. Montrer que cette boule est ouverte et fermée.
3. Montrer qu'une suite $(x^{(m)})_m$ de X converge vers x si et seulement si, pour tout n , la suite $(x_n^{(m)})_m$ est stationnaire égale à x_n .
4. On définit le décalage $\sigma : X \rightarrow X$ par $\sigma(x) = (x_{n+1})_{n \geq 0}$. Montrer que σ est 2-lipschitzienne, surjective et non injective.

5. On pose $\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x_n}{3^{n+1}}$. Pour $x \neq y$ et $N = N(x, y)$, montrer que $\frac{1}{3^{N+1}} \leq |\phi(x) - \phi(y)| \leq \frac{1}{3^N}$.
6. En déduire que ϕ est injective et 1-lipschitzienne, et que ϕ est un homéomorphisme de X sur $K = \phi(X)$, muni de la distance usuelle. La figure ci-dessous montre les premières étapes de la construction de K , avec les mots binaires qui les indexent.
7. Montrer que $\phi^{-1}: K \rightarrow X$ est uniformément continue, mais pas lipschitzienne.



Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [espaces métriques, cours de maths en L3](#)
- Chapitre suivant : [Espaces normés et applications linéaires continues](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)